# A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI

XIII. KÖTET



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1963

## TARTALOMJEGYZÉK



## A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL



## KÖNYVISMERTETÉSEK

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI

XIII. KÖTET 1. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1963

III. OSZT. KÖZL.

# A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI





XIII. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.


A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésén bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismeretetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

# ALGEBRAI RENDSZEREKEN ÉRTELMEZETT FÜGGVÉNYEGYENLETEK, II.

## Az asszociativitás függvényegyenleteinek általánosításai

Írta: HOSSZÚ MIKLÓS

Binér, ternér stb. rendszereken értelmezett függvényegyenletek szokásos megoldási módszereit vizsgálva azonnal szembetűnik, hogy az általános törekvés mindig az, hogy az illető albegrai struktúrát valamely speciális tulajdonságú csoport segítségével állítsuk elő, vagyis, hogy az illető függvényegyenletet az asszociativitás

$$F[F(x,y),z] = F[x,F(y,z)]$$

függvényegyenletére vezessük vissza. Példaként a dolgozat első részében [8] felsorolt egyenleteket említhetnénk, amelyek megoldásai, mint láttuk, valamely csoport bizonyos izotópjaiként* jelentkeztek.

Minthogy tehát az algebrai struktúrák között központi szerepet játszanak a csoportok, azért az algebrai rendszereken értelmezett függvényegyenletek vizsgálata közben is rendszerező elvnek tekinthetjük azt, hogy legfontosabb feladat az asszociativitás függvényegyenletének „környezetét" felderíteni. E törekvés jegyében alapvető lépést tett előre a [4] dolgozat, mely az asszociativitási egyenlet

$$F[G(x,y),z] = H[x,K(y,z)] \tag{1}$$

általánosítását oldotta meg, a szereplő függvényekről feltételezve, hogy valamennyien kvázicsoport műveletek, azaz mindkét változóban invertálhatók. Gyakran van azonban szükség arra, hogy az (1) egyenletet olyan körülmények között vizsgáljuk, midőn a szereplő függvények csak részben, nem mindegyik változójukban invertálhatók. Erre az esetre vezethető vissza pl. a ternér kvázicsoportokon értelmezhető asszociatív törvények vizsgálata; ezzel a kérdéssel a *4. §.* foglalkozik.

Az invertálhatóság enyhítése mellett a megoldás érdekében bizonyos változók szerint az invertálhatóságot célszerű fenntartani. Két fő eset válik szét ilyen szempont alapján: a függvények abban a változóban invertálhatók, melyek az (1) egyenletben közvetlenül, vagy közvetve az $x$ változót, illetve az $y$ változót tartalmazzák. Az *1. §.* és *2. §.* ezzel a két fő esettel foglalkozik.

Alkalmazásként a *3. §.* a poliadikus csoportokat vizsgálja.

Végül az *5. §.* az (1) egyenlet megoldását mutatja meg az $F(x,y) = G(y,x) = H(y,x) = K(x,y)$ speciális esetben, minden invertálhatósági feltétel nélkül, csupán az $F(x,y) = z$ egyenlet $x$ változó szerinti (nem feltétlenül egyértelmű) megoldhatóságát követeljük meg. Ekkor az (1) egyenlet

$$F[F(x,u),v] = F[F(x,v),u]$$

* Lásd pl. R. H. Bruck [3] könyvét az izotopizmus és egyéb fogalmak definíciójára vonatkozólag.

-ra redukálódik, tehát az egyenlet azt fejezi ki, hogy az $x \to F_u x \overset{\text{def}}{=} F(x, u)$ leképezések összessége, mely az $u$ paraméternek is függvénye, csupa felcserélhető leképezést tartalmaz [7]. A megoldási módszer remélhetővé teszi az invertálhatósági feltételek enyhíthetőségét az általánosított asszociativitás (1) egyenletének egyéb speciális eseteiben is. Ezek kivizsgálása további feladat.

## 1. §. Az x változót közvetlenül vagy közvetve tartalmazó változókban interválható megoldások

Vizsgáljuk az

$$F[G(x, u), v] = H[x, K(u, v)] \tag{1'}$$

egyenlet megoldását a

$$K: U \times V \to P, \quad H: X \times P \to Q, \quad G: X \times U \to Y, \quad F: Y \times V \to Q$$

ismeretlen függvényekre vonatkozólag.

Hogy a megoldás gondolatmenetét világosabban áttekinthessük, nem mondjuk ki előre az invertálhatósági mellékfeltételeket, amelyek az egyes lépések jogosságát majd alátámasztják, hanem utólag foglaljuk össze mindazt, amit a bizonyítás során felhasználtunk.

Rögzítsük (1')-ben $u = a$-t és vezessük be a

$$\gamma x \overset{\text{def}}{=} G(x, a), \qquad \varkappa_2 t \overset{\text{def}}{=} K(a, t) \tag{2}$$

jelölést, akkor

$$F(\gamma x, v) = H(x, \varkappa_2 v),$$

tehát az $y = \gamma x$ változóval

$$F(y, v) = H(\gamma^{-1} y, \varkappa_2 v). \tag{3}$$

Helyettesítsük ezt (1')-be, akkor a kapott

$$H[\gamma^{-1} G(x, u), \varkappa_2(v)] = H[x, K(u, v)]$$

egyenletből $v = b$ rögzítéssel az előzőkhöz hasonlóan

$$\begin{gathered} G(x, u) = \gamma \chi^{-1} H(x, \varkappa_1 u), \\ \chi t \overset{\text{def}}{=} H(t, c), \quad \varkappa_1 t \overset{\text{def}}{=} K(t, b), \\ [c = K(a, b)] \end{gathered} \tag{4}$$

adódik, tehát fennáll

$$H[\varkappa^{-1} H(x, \varkappa_1 u), \varkappa_2 v] = H[x, K(u, v)].$$

Végül $x = \chi^{-1} t$-t helyettesítve, $\varkappa_1 u$ és $\varkappa_2 v$ helyett új $u, v$ változót írva és bevezetve a

$$\begin{gathered} T(t, u) \overset{\text{def}}{=} H(\chi^{-1} t, u): Q \times P \to Q \\ I(u, v) \overset{\text{def}}{=} K(\varkappa_1^{-1} u, \varkappa_2^{-1} v): P \times P \to P \end{gathered} \tag{5}$$

függvényeket, a transzformáció:

$$T[T(x, u), v] = T[x, I(u, v)]; \qquad x \in Q; \ u, v \in P \tag{6}$$

jól ismert függvényegyenletéhez jutunk [1, 5].

Az így nyert egyenletünk azt fejezi ki, hogy az $u \in P$ paramétertől függő

$$x \to T_u x \overset{\text{def}}{=} T(x, u)$$

transzformációk *sereget* alkotnak, azaz két különböző paraméterrel egymásután végrehajtott transzformáció helyettesíthető egyetlen olyan transzformációval, melynek paramétere csupán az előző két transzformáció paraméterétől függ. Ha *effektív* transzformáció-sereget tekintünk, azaz feltesszük, hogy a paraméterek $P$ értelmezési tartománya csupa lényeges paramétert tartalmaz, azaz

(7) $$T(x, u) \not\equiv T(x, v) \quad [H(x, u) \not\equiv H(x, v)], \text{ ha } u \neq v,$$

akkor a paraméterek

$$u \circ v \overset{\text{def}}{=} I(u, v)$$

kompozíciós törvénye asszociatív:

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w),$$

ami nyilván következik a (6) ismételt alkalmazásával nyert

$$T_{(u \circ v) w} x = T_{u \circ v} T_w x = T_u T_v T_w x = T_u T_{v \circ w} x = T_{u \circ (v \circ w)} x, \quad x \in Q$$

azonosságból. Tehát $P^\circ$ félcsoport.

Az eddigieket összefoglalva, (2), (4), (5), (7) alapján a következő tételt lehet kimondani:

1. TÉTEL. *Legyenek valamely rögzített $u \in U$, $b \in V$ és $c = K(a, b) \in P$ esetén*

$$x \to G(x, a), \; H(x, c),$$
$$t \to \varkappa_1 t \overset{\text{def}}{=} K(t, b), \; \varkappa_2 t \overset{\text{def}}{=} K(a, t)$$

*invertálható leképezések, továbbá*

$$H(x, u) \not\equiv H(x, v), \quad \text{ha} \quad u \neq v,$$

*akkor az*

(1') $$F[G(x, u), v] = H[x, K(u, v)]; \qquad x \in X, \; u \in U, \; v \in V$$

*függvényegyenletnek minden $K: U \times V \to P$ megoldásához található olyan a $P$-n értelmezett asszociatív $I(u, v)$ művelet, amellyel fennáll:*

$$K(u, v) = I(\varkappa_1 u, \varkappa_2 v).$$

Ha pedig $P(K)$ kvázicsoport, akkor természetesen $P(I)$ csoport. Ekkor azonban a (6) alatti $x \to T_u x$ transzformációk ekvivalensek a $P(I)$ csoport valamely $S$ alcsoportja szerinti $S \circ p$ $(p \in P)$ jobb mellékosztályok [5]

(8) $$S \circ p \to T_u(s \circ p) \overset{\text{def}}{=} (S \circ p) \circ u, \; u \in P$$

*tranzlációival,* feltéve, hogy az $x \to T_u x$ transzformáció-sereg *tranzitív,* azaz fennáll

(9) $$T_P x = Q, \qquad x \in Q.$$

Ez utóbbi tranzitivitási feltétel nélkül is megállapítható, hogy $Q$ ilyen tranzitivitási tartományok összege:

$$Q = \bigcup_i Q_i; \; Q_i = T_P x_i,$$

amelyek mindegyikén $x \to T_P x$ ekvivalens valamely hasonló alakú, esetleg más $S$ alcsoporttal képezett mellékosztályok tranzlációival.

Ha speciálisan pl. van olyan $x_0$ érték, hogy $H(x_0, P) = Q$, akkor tekintetbe véve $T$ (5) alatti értelmezését, a (9) tranzivitási feltétel is teljesül, tehát $T(x, u)$-hoz lehet találni olyan $S$ alcsoportot, hogy $T(x, u)$ minden $x \in Q$ esetén ekvivalens legyen az $S$ szerinti jobb-mellékosztályok egyikének (8) tranzlációjával. Ezen $S$ alcsoport, konjugáltságtól eltekintve, egyértelműen meg van határozva $T$-vel, éspedig valamely $x_0 \in Q$ elem *stacioner operátor*ainak alcsoportja, melyekre fennáll

$$T(x_0, S) = x_0. \tag{1.2.10}$$

Könnyen belátható, hogy ezen $x_0$ az $S \circ p$ mellékosztályok közül éppen magával $S$-sel ekvivalens, ugyanis éppen erre érvényes, hogy

$$S \to T_S S = S \circ S = S.$$

A stacioner operátorok $S$ alcsoportjának (10) értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy ha megköveteljük az

$$u \to T(x_0, u), \text{ illetve } H(\chi^{-1} x_0, u) \tag{11}$$

leképezés invertálhatóságát legalább egy $x_0 \in Q$ esetén, akkor $S$ csak az egységelemből fog állni. Ekkor tehát (8)-ból megkapjuk $T(x, u)$ legáltalánosabb alakját:

$$\begin{aligned} \tau(x \circ u) &= T(\tau x, u), \\ T(x, u) &= \tau(\tau^{-1} x \circ u), \end{aligned} \tag{12}$$

amely tetszőleges invertálható $\tau$ függvénnyel és tetszőleges asszociatív $u \circ v = I(u, v)$-vel valóban ki is elégíti (6)-ot, vagyis a legáltalánosabb megoldást szolgáltatja a (11) alatti leképezések invertálhatósági feltétele mellett.

Egy (12) előállítást adó $\tau$ függvény ténylegesen megadható $T(x, u)$-val, ehhez csupán (6)-ba kell $x = x_0$-t helyettesíteni. Ekkor látható, hogy pl.

$$\tau u \overset{\text{def}}{=} T(x_0, u) = H(x_1, u), \quad x_1 = \chi^{-1} x_0, \quad u \in P \tag{13}$$

megfelel a célnak.

Megjegyezzük, hogy a (11) alatti leképezések invertálhatósága már maga után vonja a (7) effektivitási követelmény teljesülését is. Így a (3), (4), (5), (12) (13) formulák és az 1. tétel alapján kimondhatjuk a következőt:

2. TÉTEL. *Legyenek valamely rögzített $a \in U$, $b \in V$, $c = K(a, b) \in P$ és $x_1 \in X$ esetén*

$$\begin{aligned} &x \to \gamma x \overset{\text{def}}{=} G(x, a), \quad \chi x \overset{\text{def}}{=} H(x, c), \\ &u \to \varkappa_1 u \overset{\text{def}}{=} K(u, b), \\ &v \to \varkappa_2 v \overset{\text{def}}{=} K(a, v), \\ &t \to \tau t \overset{\text{def}}{=} H(x_1, t) \end{aligned}$$

*invertálható leképezések. Akkor az (1′) függvényegyenlet legáltalánosabb megoldása* *felírható*

$$(14)\qquad \begin{cases} F(y, v) = \tau(\tau^{-1}\chi\gamma^{-1}y \circ \varkappa_2 v), \\ G(x, u) = \gamma\chi^{-1}\tau(\tau^{-1}\chi x \circ \varkappa_1 u), \\ H(x, w) = \tau(\tau^{-1}\chi x \circ w), \\ K(u, v) = \varkappa_1 u \circ \varkappa_2 v \end{cases}$$

*alakban, ahol $u \circ v$ a P-n értelmezett tetszőleges asszociatív művelet, amely az invertálhatósági követelmények folytán rögzített $u = c$, $H(x_1, c)$, illetve $v = c$ esetén a második változóban invertálható.*

A (14) megoldást $\varphi = \tau^{-1}\chi\gamma^{-1}$, $\psi = \tau^{-1}\chi$-vel kissé rövidebb alakban is írhatjuk:

$$(15)\qquad \begin{cases} F(y, v) = \tau(\varphi y \circ \varkappa_2 v), \\ G(x, u) = \varphi^{-1}(\psi x \circ \varkappa_1 u), \\ H(x, w) = \tau(\psi x \circ w), \\ K(u, v) = \varkappa_1 u \circ \varkappa_2 v. \end{cases}$$

A (15) formulában $F, G, H, K$ nyilván tetszőleges $\varphi, \psi, \tau, \varkappa_1, \varkappa_2$-vel ki is elégíti (1′)-et, ha $u \circ v$ asszociatív:

$$(\psi x \circ \varkappa_1 u) \circ \varkappa_2 v = \varphi x \circ (\varkappa_1 u \circ \varkappa_2 v).$$

*Következmény.* A $Q(L)$ kvázicsoportokon értelmezett (1) asszociativitási egyenlet mindegyik $L = F, G, H, K$ megoldása ugyanazon csoportművelet izotópja [4].

## 2. §. Az y változót közvetlenül vagy közvetve tartalmazó változókban invertálható megoldások

Eddig az általánosított

$$(1)\qquad F[G(x, y), z] = H[x, K(y, z)]$$

egyenletet fokozatosan specializáltuk. Most már ismerve (1) megoldását kvázicsoportokon, ismét induljunk el az általánosítás útján, az eddigi iránytól azonban eltérően. Az eddig használt invertálhatósági feltételekre vezető általánosítás lényege abban állt, hogy (1)-ben az $x$ változót közvetlenül vagy közvetve tartalmazó változók szerinti invertálhatóságát fenntartottuk, az $y$, $z$ változót pedig az $x$-től eltérően más értelmezési tartományból választottuk. Így lényegében a (6) transzformáció függvényegyenlet általánosítását adó egyenletre jutunk. Most az invertálhatósági követelményt enyhítsük olyan módon, hogy (1)-ben az $y$-t közvetlenül vagy közvetve tartalmazó változók szerinti invertálhatóságot követeljük meg, e változó rögzítése mellett a másik változóban pedig csupán a tranzitivitást.

A változók értelmezési tartományát és a függvények értékkészletét is válasszuk a lehetőség szerint mind különbözőnek. Így az

$$F: Q \times Z \to R, \quad G: X \times Y \to Q,$$

$$H: X \times P \to R, \quad K: Y \times Z \to P$$

függvényekre vonatkozólag felírt (1)-hez jutunk. Az

$$u \to F(u, z), \quad y \to G(x, y),$$
$$v \to H(x, v), \quad y \to K(y, z)$$

leképezések invertálhatósága folytán (melyek közül elég lenne $H$, $K$ invertálhatóságát és $G$ tranzitivitását kiróni, mert ezekből és (1) fennállásából már következnék a többiek invertálhatósága), a $Q$, $P$, $R$ halmazok az általánosság sérelme nélkül azonosíthatók $Y$-nal.

Problémánk tehát az egyszerűbb írásmód kedvéért rögtön egyszerűsíthető az (1) egyenletnek az

$$F: Y \times Z \to Y, \quad G: X \times Y \to Y,$$
$$H: X \times Y \to Y, \quad K: Y \times Z \to Y$$

ismeretlen függvényekre vonatkozó megoldásává.

Vezessük be ezután az

$$x \in X_y \rightleftharpoons G(x, y_0) = y, \quad z \in Z_y \rightleftharpoons K(y_0, z) = y$$

összefüggéssel értelmezett $X_y$, $Z_y$ halmazokat[1]. A

$$G(X, y_0) = Y, \quad K(y_0, Z) = Y$$

tranzitivitási feltétel teljesülése esetén $X_y$, $Z_y$ nyilván minden $y \in Y$-ra értelmezve van és

$$X = \bigcup_{y \in Y} X_y, \quad Z = \bigcup_{y \in Y} Z_y.$$

Értelmezzük ezután a

$$\bar{G}(t, y) \stackrel{\text{def}}{=} G(X_t, y), \quad \bar{K}(y, t) \stackrel{\text{def}}{=} K(y, Z_t),$$
$$\bar{F}(y, t) \stackrel{\text{def}}{=} F(y, Z_t), \quad \bar{H}(t, y) \stackrel{\text{def}}{=} H(X_t, y)$$

függvényeket, melyekről a következő észrevételeket tehetjük:

I. $\bar{F}, \bar{H}, \bar{G}, \bar{K}: Y \times X \to Y$ egyértékű függvények;

II. létezik $t_0, s_0 \in Y$, melyre $y \to \bar{G}(t_0, y)$, $K(y, s_0)$ invertálhatók;

III. $t \to \bar{G}(t, y_0)$, $\bar{K}(y_0, t)$ invertálhatók;

IV. $y \to \bar{F}(y, s_0)$, $\bar{H}(t_0, y)$ invertálhatók;

V. $\bar{F}[\bar{G}(t, y), s] = \bar{H}[t, \bar{K}(y, s)]$, $t, y, s \in Y$.

Ezek közül I. rögtön belátható, ha pl. alkalmas $x$-szel felírjuk az

$$\bar{F}(y, s) = F(y, Z_s) = F[G(x, y_0), Z_s] = H[x, K(y_0, Z_s)] = H(x, s)$$

függvényt, mely $s$-nek valóban egyértékű függvénye s nyilván $y$-nak is. Hasonló érvényes $\bar{H}$-ra is. $\bar{G}$ egyértékűsége pedig $y \to F(y, z)$ invertálhatósága alapján abból

[1] Tehát pl. $X_y$ az $X$ azon $x$ elemeinek összességét jelöli, melyekre $G(x, y_0) = y$ teljesül.

következik, hogy

$$F[\bar{G}(t, y), z] = F[G(X_t, y), z] = H[X_t, K(y, z)] = \bar{H}[t, K(y, z)]$$

egy-egyértékű függvénye mind $t$-nek, mind $y$-nak, s hasonló áll $\bar{K}$-ra is.

II. Nyilvánvaló az értelmezés és az $y \to G(x, y)$, $K(y, z)$ invertálhatósága alapján.

III. alatt fennáll

$$\bar{G}(y, y_0) = G(X_y, y_0) = y$$

és hasonlóan $\bar{K}(y_0, y) = y$ is.

IV. úgy mutatható ki, hogy pl. alkalmas $x \to G(x, y_0)$-val az

$$\bar{F}(y, s_0) = F(y, Z_{s_0}) = F[G(x, y_0), Z_{s_0}] = H[x, K(y_0, Z_{s_0})] = H(x, s_0)$$

függvény $x$ változóban való invertálhatóságát felhasználjuk, és hasonlóan járunk el $\bar{H}(t_0, y)$-nal is.

Végül V. magától értetődik, ha 1-ben $x = X_t$, $z = Z_s$-et helyettesítünk.

Az I—V. észrevételek alapján alkalmazható a 2. tétel, amelyből azt kapjuk, hogy pl.

$$\bar{F}(u, t) = F(u, Z_t)$$

valamely, az $Y = R$-en értelmezett $a \circ b$ asszociatív művelet főizotópja:

$$F(u, Z_t) = \gamma u \circ \delta t.$$

Tehát értelmezve a $z \in Z_t$ elemekre a nem feltétlen invertálható

$$z \to \varepsilon z = t, \quad z \in Z_t$$

leképezést,

$$F(u, z) = \gamma u \circ \delta \varepsilon z = \gamma u \circ \psi z$$

adódik, és teljesen hasonlóan

$$H(x, v) = \varphi x \circ \varkappa v,$$

ahol $\varphi$ szintén nem feltétlen invertálható, de $\varkappa$, éppúgy mint $\gamma$, biztosan az.

Végül visszahelyettesítéssel megkapjuk a

$$G(x, y) = \gamma^{-1}(\varphi x \circ \sigma y)$$
$$K(y, z) = \varkappa^{-1}(\sigma y \circ \psi z)$$

összefüggéseket is.

Az invertálhatósági követelmények maguk után vonják, hogy a kifejezésben szereplő $\gamma$, $\varkappa$, $\sigma$ leképezések invertálhatók, továbbá a $G(x, y_0)$, $K(y_0, z)$ tranzivitásából következik, hogy $\varphi$, $\psi$ képtartománya az egész $R$. Az

$$y \to G(x, y), \quad K(y, z)$$

leképezésekre kirótt invertálhatósági feltételből pedig az $R^\circ$ félcsoportra vonatkozólag az az invertálhatósági megszorítás következik, hogy

$$r \to \varphi x \circ r, \quad r \circ \psi z$$

is invertálható, tetszőleges rögzített $x$, illetve $z$ esetén; vagyis $R^\circ$ csoport, minthogy $\varphi$, $\psi$ képtartománya az egész $R$.

Végezetül, eltekintve a $Q$, $P$, $R$, $Y$ halmazoknak csupán a könnyebb áttekinthetőség kedvéért történt azonosításától, teljes általánosságban kimondhatjuk a következőt:

3. TÉTEL. *Legyenek rögzített* $x \in X$, $z \in Z$ *esetén*

$$y \to K(y, z), \quad v \to H(x, v)$$

*invertálható leképezések, és*

$$G(x, Y) = G(X, y_0) = Q, K(y_0, Z) = P.$$

*Akkor az*

$$F: Q \times Z \to R, \quad G: X \times Y \to Q,$$

$$H: X \times P \to R, \quad K: Y \times Z \to P$$

*függvényekre értelmezett*

$$F[G(x, y), z] = H[x, K(y, z)] \tag{1}$$

*függvényegyenlet legáltalánosabb megoldása:*

$$\begin{cases} F(u, z) = \gamma u \circ \psi z \\ G(x, y) = \gamma^{-1}(\varphi x \circ \sigma y), \\ H(x, v) = \varphi x \circ \varkappa v, \\ K(y, z) = \varkappa^{-1}(\sigma y \circ \psi z), \end{cases}$$

*ahol* $R^\circ$ *az* $R$ *halmazon értelmezett tetszőleges csoport,* $\gamma$, $\varkappa$, $\sigma$ *a* $Q$, $P$, *illetve* $Y$ *halmazok tetszőleges* 1—1 *leképezései* $R$*-re,* $\varphi$ *és* $\psi$ *pedig* $X$, *illetve* $Z$ *tetszőleges leképezései* $R$*-re.*

Megjegyezzük, hogy a bizonyítás gondolatmenete nyilván megengedi azt az általánosítást is, hogy az

$$y \to K(y, z), \quad v \to H(x, v)$$

leképezések invertálhatóságát csak bizonyos rögzített $x_0$, $z_0$ esetén követeljük meg. Akkor természetesen $R^\circ$ csupán félcsoport, de a megoldási formulában szereplő függvényekre vonatkozó invertálhatósági feltételek nehezen áttekinthetővé válnak.

## 3. §. Az asszociativitás függvényegyenletének általánosítása multinér kvázicsoportokon

Maguk a kvázicsoportok is általánosíthatók pl. úgy, hogy binér művelet helyett ternér stb. műveletet tekintünk. Így a kvázicsoportokon binér műveletekre értelmezett függvényegyenletek között központi szerepet játszó (1) egyenletnek megfelelő

$$F[G(x, y, z), u, v] = H[x, K(y, z, u), v] = N[x, y, N(z, u, v)]$$

általánosításhoz jutunk. Sőt, feladva azt az elvet is, hogy az egyenletben csak azonos

# AZ ACTA PHYSICA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE-BAN KÖZLÉSRE KERÜLŐ DOLGOZATOK KÉZIRATAINAK ELKÉSZÍTÉSÉVEL KAPCSOLATOS TUDNIVALÓK

Az Acta Physica szerkesztőségéhez beküldött dolgozatok megjelentetését rendkívül nagy mértékben hátráltatja, hogy idegen nyelven beküldött dolgozatok esetén a fordítás általában igen gyenge és a kéziratok kiállítása nem felel meg a kiadó és a nyomda által támasztott követelményeknek. A szerkesztőség ezért nyomatékosan kéri a szerzőket, hogy a kéziratok elkészítésénél az alábbi szempontokat szíveskedjenek figyelembe venni.

1. Az Acta Physica angol, német, orosz és francia nyelven közöl dolgozatokat. A szerkesztőség kéri a szerzőket, hogy dolgozataikat lehetőleg e nyelvek egyikére lefordítva szíveskedjenek a szerkesztőségnek beküldeni. A beküldött cikkeknek nyelvi szempontból olyannak kell lenniök, hogy legfeljebb kisebb mértékű nyelvi korrekció legyen szükséges. Az idegen nyelvű szöveggel együtt kérjük a dolgozat magyar szövegét is a nyelvi lektorálás megkönnyítése céljából.

2. A dolgozatok kéziratai (a rövid közlemények kivételével) rövid összefoglalással legyenek ellátva a cikk nyelvén és orosz nyelven, illetve orosz nyelvű cikkek esetén német, angol, vagy francia nyelven. Az összefoglalás szükség esetén magyar nyelven is beküldhető, fordíttatását a szerkesztőség vállalja.

3. A dolgozatokon (a rövid közleményeket kivéve) fel kell tüntetni az akadémiai bemutató nevét.

4. A kéziratokat jóminőségű papiron, két gépelt példányban, csak a papír egyik oldalára 2-es sortávolsággal, 20 betűhelyes margóval gépelve kérjük.

5. Az ábrákat külön lapokon kérjük, nem pedig a szöveg közé beragasztva vagy betűzve, minden egyes ábra hátán a szerző nevének és a cikk rövid címének feltüntetésével. Az ábrák aláírásait szintén külön lapon kérjük.

6. Különös figyelmet kell fordítani a képletek olvashatóságára, szem előtt tartva, hogy a nyomdai szedőnek nincs matematikai képzettsége. Gondosan meg kell különböztetni (lehetőleg különböző színekkel aláhúzva):

különleges (görög, gót, kurzív, írott, fett stb.) betűket,
kis és nagy betűket,
alsó és felső indexeket pl.: $x_3^{\text{u}}$, $x_{\text{n}}^3$,
kis $l$-et és 1-et (egy),
nullát és $O$-t,
kézzel beírt képleteknél ezenkívül $e$-t és $l$-et, $n$-et és $u$-t, $\nu$-t és $v$-t stb.

A képleteket és a szövegben előforduló kézzel beírt egyes matematikai jeleket (betűket) a nyomda kurzívval szedi. Ezeket tehát külön aláhúzni nem kell. Kiemelendő azonban a képletekben antiqua-val (álló szedéssel) szedendő minden rövidítés, pl. exp (log és a trigonometriai függvények kiemelése nem szükséges).

7. Kis betűvel (petit) szedendő sorok a margón „petit" szó feltüntetésével legyenek megjelölve.

8. Az irodalmi utalások lábjegyzet formájában, vagy a cikk végén összesítve legyenek feltüntetve, pl. folyóirat idézése esetén:

J. Ise and W. D. Fretter, Phys. Rev., *76*, 933, 1949.

Könyvekre való hivatkozás esetén feltüntetendő a könyv címe, a kiadó, a kiadás helye és éve, pl.:

J. C. Slater, Quantum Theory of Atomic Structure I., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1960.

**A fenti szempontoknak meg nem felelő cikkeket a szerkesztőség nem fogad el közlésre.**

változószámú függvények forduljanak elő, több változóval mindjárt az

$$F[G(x_1, x_2, \dots, x_p), x_{p+1}, \dots, x_n] = \\ = H[x_1, x_2, \dots, x_q, K(x_{q+1}, \dots, x_n)], \quad (p>q) \tag{16}$$

általánosítást tekinthetjük [9].

A megoldás érdekében tegyük fel, hogy $F, H$ az első, illetve utolsó változójukban invertálhatók.

Az egyszerűség kedvéért vezessük be az

$$u=(x_1, \dots, x_q)\in Q^q,$$

$$v=(x_{q+1}, \dots, x_p)\in Q^{p-q},$$

$$w=(x_{p+1}, \dots, x_n)\in Q^{n-p},$$

változókat, mellyel (16) így írható:

$$F[G(u, v), w]=H[u, K(v, w)], \\ u\in Q^q, \ v\in Q^{p-q}, \ w\in Q^{n-p}. \tag{17}$$

Ekkor (17)-ből a $w=w_0$, illetve $u=u_0$ rögzítéssel látható, hogy

$$G(u, v)=\alpha^{-1}H[u, k(v)],$$

$$K(v, w)=\beta^{-1}F[g(v), w],$$

ahol

$$\alpha x \overset{\text{def}}{=} F(x, w_0), \ \beta x \overset{\text{def}}{=} H(u_0, x), \ x\in Q,$$

$$k(v)\overset{\text{def}}{=} K(v, w_0), \ g(v)\overset{\text{def}}{=} G(u_0, v), \ v\in Q^{p-q}.$$

Ezzel (17) a következő alakot ölti:

$$F\{\alpha^{-1}H[u, k(v)], w\}=H\{u, \beta^{-1}F[g(v), w]\},$$

$$u\in Q^b, \ v\in Q^{p-q}, \ w\in Q^{n-p}.$$

Az $u=u_0$, $w=w_0$ rögzítéssel (17)-ből

$$\beta k(v) = \alpha g(v), \quad g(v) = \alpha^{-1}\beta k(v),$$

adódik, tehát egyenletünk az $y=k(v)$ változó bevezetésével és a

$$\bar{G}(u, y)\overset{\text{def}}{=} \alpha^{-1}H(u, y), \ \bar{K}(y, v)\overset{\text{def}}{=} \beta^{-1}F(\alpha^{-1}\beta y, w)$$

jelöléssel

$$F[\bar{G}(u, y), w]=H[u, \bar{K}(y, w)],$$

$$u\in Q^q, \ y\in Q, \ w\in Q^{n-p}$$

alakot ölt.

Ha a 3. tétel

$$\bar{G}(u_0, Q)=\bar{G}(Q^q, y_0)=Q, \ \bar{K}(y_0, Q^{n-p})=Q$$

feltételei, valamint az

$$y\to \bar{K}(y, w), \ H(u, y)$$

függvényre vonatkozó invertálhatósági feltételek teljesülnek, akkor

$$F(x, w) = \gamma x \circ \psi w,$$
$$H(u, x) = \varphi u \circ \varkappa x,$$

amelyet (17)-be helyettesítve, a változók alkalmas rögzítése után rögtön megkapjuk a

$$G(u, v) = \gamma^{-1}(\varphi u \circ \sigma v),$$
$$K(v, w) = \varkappa^{-1}(\sigma v \circ \psi w)$$

formulákat is.

Az eddigi gondolatmenet alapján összefoglalva a felhasznált invertálhatósági, illetve tranzivitási feltételeket, kimondjuk a következőt:

4. TÉTEL. *Ha valamely*

$$F(x_0, w_0) = H(u_0, y_0)$$

*összefüggést kielégítő, rögzített* $x_0 \in Q$, $w_0 \in Q^{n-p}$, $U_0 \in Q^q$, $y_0 \in Q$ *elemekre teljesül a*

$$K(Q^{p-q}, x_0) = H(u_0, Q) = H(Q^q, y_0) = (x_0, Q^{n-p}) = Q$$

*feltétel, és ha az*

$$x \to F(x, w), \quad H(u, x) \quad (Q \to Q)$$

*leképezések tetszőlegesen rögzített* $u \in Q^q$, $w \in Q^{n-p}$ *esetén invertálhatók, akkor az*

$$F[G(u, v), w] = H[u, K(v, w)], \qquad u \in Q^q, \quad v \in Q^{p-q}, \quad w \in Q^{n-p}, \tag{17}$$

*illetve részletezve az*

$$F[G(x_1, \ldots, x_p), x_{p+1}, \ldots, x_n] = H[x_1, \ldots, x_q, K(x_{q+1}, \ldots, x_n)], \qquad (p > q), \tag{16}$$

*függvényegyenlet megoldásának legáltalánosabb alakja*

$$\begin{cases} F(x, w) = \gamma x \circ \psi w, \\ G(u, v) = \gamma^{-1}(\varphi u \circ \sigma v), \\ H(u, x) = \varphi u \circ \varkappa x, \\ K(u, x) = \varkappa^{-1}(\sigma v \circ \psi w), \end{cases}$$

*illetve részletesen*

$$\begin{aligned} F(x, x_{p+1}, \ldots, x_n) &= \gamma x \circ \psi(x_{p+1}, \ldots, x_n), \\ G(x_1, \ldots, x_p) &= \gamma^{-1}[\varphi(x_1, \ldots, x_q) \circ \sigma(x_{q+1}, \ldots, x_p)], \\ H(x_1, \ldots, x_q; x) &= \varphi(x_1, \ldots, x_q) \circ \varkappa x, \\ K(x_{q+1}, \ldots, x_n) &= \varkappa^{-1}[\sigma(x_{q+1}, \ldots, x_p) \circ \psi(x_{p+1}, \ldots, x_n)]; \end{aligned}$$

*ahol* $x \circ y$ *tetszőleges csoportművelet a* $Q$ *halmazon, és*

$$\gamma, \varkappa : Q \to Q$$

*tetszőleges invertálható leképezések,*

$$\varphi : Q^q \to Q, \quad \psi : Q^{n-p} \to Q, \quad \sigma : Q^{p-q} \to Q$$

*tetszőleges leképezések* $Q$*-ra.*

## 4. §. Ternér csoportok

A 4. tételből speciálisan megkapjuk

(18) $$F[G(x_1, x_2, x_3), x_4, x_5] = H[x_1, x_2, K(x_3, x_4, x_5)]$$

megoldását is:

$$F(x, x_4, x_5) = \gamma x \circ \psi(x_4, x_5),$$
$$G(x_1, x_2, x_3) = \gamma^{-1}[\varphi(x_1, x_2) \circ \sigma x_3],$$
$$H(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2) \circ \varkappa x,$$
$$K(x_3, x_4, x_5) = \varkappa^{-1}[\sigma x_3 \circ \psi(x_4, x_5)].$$

Ha itt további specializálással

(19) $$F = G = H = K,$$

akkor

$$F(x, y, z) = K(x, y, z) = \gamma x \circ \psi(y, z) = \varphi(x, y) \circ \varkappa z$$

folytán

$$\varphi(x, y) = \gamma x \circ \psi(y, z_0) \circ (\varkappa z_0)^{-1} = \gamma x \circ \chi y,$$

következőleg

$$\psi(y, z) = \chi y \circ \varkappa z.$$

Ezekkel az $F = G = K$ egyenlőség ilyen lesz:

$$\gamma x \circ \chi y \circ \varkappa z = \gamma^{-1}(\gamma x \circ \chi y \circ \sigma z) = \varkappa^{-1}(\sigma x \circ \chi y \circ \varkappa z),$$

tehát a $\gamma x = \varkappa z = e$ (ahol $e$ a $Q^\circ$ egységeleme) helyettesítésből nyilvánvalóan

$$\gamma y = y \circ c_1, \varkappa y = c_2 \circ y,$$

azaz végeredményben

$$F(x, y, z) = G = H = K = x \circ c_1 \circ \chi y \circ c_2 \circ z = x \circ \varepsilon y \circ z,$$

amely valóban tetszőleges $\varepsilon: Q \to Q$ leképezéssel ki is elégíti (18)-at és (19)-et.

A poliadikus (példánkban ternér) csoportok értelmezésében (18) mellett még [3, 10]

(20) $$F[F(x_1, x_2, x_3), x_4, x_5] = F[x_1, F(x_2, x_3, x_4), x_5]$$

fennállását is meg szokták követelni. Ekkor

$$x_1 \circ \varepsilon x_2 \circ x_3 \circ \varepsilon x_4 \circ x_5 = x_1 \circ \varepsilon(x_2 \circ \varepsilon x_3 \circ x_4) \circ x_5$$

csak úgy áll fenn, ha

(21) $$\varepsilon x \circ \varepsilon^{-1} y \circ \varepsilon z = \varepsilon(x \circ y \circ z),$$

vagyis ha teljesül az, hogy

$$\varepsilon x = a \circ \alpha x,$$

ahol $\alpha$ a $Q^\circ$ tetszőleges, az

$$\alpha a = a, \quad \alpha\alpha x = a^{-1} \circ x \circ a$$

feltételeket kielégítő automorfizmusa. Ez utóbbi állítások helyességét (21) alapján tudjuk belátni. Helyettesítsük ugyanis ott $z$ helyébe a $Q^\circ$ csoport $e$ egységelemét, akkor azt látjuk, hogy

$$\varepsilon(x \circ y) = \varepsilon x \circ \alpha y, \tag{22}$$

ahol

$$\alpha y \overset{\text{def}}{=} \varepsilon^{-1} y \circ \varepsilon e,$$

vagyis (22)-ben az $x=e$ helyettesítésből nyilván

$$\alpha y = (\varepsilon e)^{-1} \circ \varepsilon y,$$

amely $Q^\circ$-nak valóban automorfizmusa, amint ezt a (22) egyenlet mutatja, ha mindkét oldalt beszorozzuk balról $(\varepsilon e)^{-1}$-gyel. Hasonlítsuk most össze az $\varepsilon$-ra kapott két utóbbi kifejezést, akkor

$$\varepsilon y = a \circ \alpha y = \alpha^{-1}(y \circ a),$$

ahol

$$a \overset{\text{def}}{=} \varepsilon e.$$

Így, minthogy $\alpha$ automorfizmus, rögtön adódik:

$$\alpha a \circ \alpha\alpha y = y \circ a,$$

$$\alpha\alpha y = (\alpha a)^{-1} \circ y \circ a.$$

Azt kell tehát még kimutatni, hogy $\alpha a = a$. Ez pedig rögtön következik $\alpha$ és az $a$ iménti értelmezéséből:

$$\alpha a = \varepsilon^{-1} a \circ \varepsilon e = \varepsilon^{-1} \varepsilon e \circ a = a.$$

Végeredményben tehát $F$ kifejezhető $\varepsilon$ helyett $\alpha$-val:

$$F(x, y, z) = x \circ a \circ \alpha y \circ z.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy az ilyen $F$ a $Q^\circ$ tetszőleges az

$$\alpha a = a, \alpha\alpha x = a^{-1} \circ x \circ a$$

feltételeknek eleget tevő $\alpha$ automorfizmusával ki is elégíti (20)-at. Kimondhatjuk tehát a 4. tétel alábbi folyományát:

5. TÉTEL. *Egy $Q$ halmazon értelmezett*

$$F: Q \times Q \times Q \to Q,$$

*mindegyik változóban invertálható, asszociatív ternér művelet legáltalánosabb alakja*

$$F(x, y, z) = x \circ a \circ \alpha y \circ z,$$

*ahol $x \circ y$ a $Q$ halmazon értelmezett tetszőleges csoportművelet, melynek $\alpha$ tetszőleges,*

$$\alpha a = a, \quad \alpha\alpha x = a^{-1} \circ x \circ a$$

*feltételeket kielégítő automorfizmusa, és itt $a \in Q$ valamely rögzített elem, $a^{-1}$ pedig az $a$ elem inverzét jelöli a $Q^\circ$ csoportban.*

Megjegyezzük, hogy az $x \circ y$ csoportműveletet és az $\alpha$ automorfizmust az $F$ ternér művelet nem egyértelműen határozza meg, hanem csupán az

$$x \circ z = F(x, a^{-1}, z)$$
$$\alpha y = F(a^{-1}, y, e)$$

összefüggés alapján, ahol $b = e^{-1}$, $e \in Q$ tetszőlegesen választható

$$\left\{\begin{array}{l} F(x, b, e) = F(e, b, x) = x, \\ F(x, e, b) = F(b, b, x) \end{array}\right. \tag{23}$$

tulajdonságú elemek. Az $e$ és $b$ elemeknek ezek a tulajdonságai az

$$x \circ e = e \circ x = x, \quad \alpha\alpha x \circ a^{-1} = a^{-1} c x \tag{24}$$

egyenletek fennállásához elengedhetetlenek, s ha viszont (23) fennáll, akkor már

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$
$$\alpha a^{-1} = a^{-1}, \quad \alpha(x \circ y) = \alpha x \circ \alpha y$$

is minden feltétel nélkül teljesül, nemcsak (24). Ilyen speciális $a$, $b$ elemek létezése egyébként a 4. tétel imént leírt következménye alapján biztos.

## 5. §. Egy megjegyzés a felcserélhető leképezésekről

Tekintsük a $Q$ halmaz $x \to F_u x$ leképezéseinek összességét, melyek egy $u \in P$ paramétertől függnek. A leképezések felcserélhetősége azt jelenti, hogy fennáll

$$F_u F_v x = F_v F_u x, \qquad x \in Q;\ u, v \in P. \tag{25}$$

Ezen egyenlet legáltalánosabb megoldását fogjuk megadni olyan feltétel mellett, hogy az $y = F_u x$ egyenletnek tetszőleges, rögzített $x, y \in Q$ esetben van legalább egy (nem feltétlen egyértelmű) $u \in P$ megoldása, amit röviden úgy fejezhetünk ki, hogy az $x \to F_u x$ leképezések összessége tranzitív, azaz

$$F_P x = Q. \tag{9}$$

6. TÉTEL. *Egy $Q$ halmaz $x \to F_u x$ $(u \in P)$ felcserélhető leképezéseinek tranzitív összessége mindig felírható az*

$$F_u x = x + \varphi u, \qquad x \in Q,\ u \in P$$

*alakban, ahol „+" a $Q$ halmazon értelmezett Abel-féle csoportművelet, $\varphi$ pedig a $P$-nek $Q$-ra való leképezése* [7].

*Bizonyítás.* Válasszunk egy rögzített $x_0 \in Q$-t és értelmezzük a $Q$ halmazon az

$$x + y \overset{\text{def}}{=} F_u y$$

műveletet, ahol $u$ a $P$ olyan eleme, amelyre fennáll $F_u x_0 = x$. Az $x + y$ művelet értelmezése nyilván független attól, hogy $P$-nek melyik

$$F_u x_0 = F_{u'} x_0 = x$$

tulajdonságú $u$, $u'$ elemeit választjuk ki, ugyanis ekkor alkalmas $v$-vel $y = F_v x_0$, és így a felcserélhetőség miatt

$$F_u y = F_u F_v x_0 = F_v F_u x_0 = F_v F_{u'} x_0 = F_{u'} F_v x_0 = F_{u'} y$$

érvényes bármely $y \in Q$ esetén.

Kimutatjuk, hogy $Q^+$ *Abel*-féle csoport. Valóban, alkalmas $u, v$ elemekkel

$$x+y = F_u y = F_u F_v x_0 = F_v F_u x_0 = F_v x = y+x,$$

$$x+(y+z) = F_u(y+z) = F_u F_v z = F_v F_u z = y+(x+z),$$

$$Q+a = F_p a = Q,$$

amelyekből nyilvánvalóan következik állításunk.

Így végeredményben $x+y$ értelmezése alapján azt kapjuk, hogy

$$F(y, u) = x+y = y+x = y+\varphi u,$$

ahol

$$x = \varphi u \overset{\text{def}}{=} F(x_0, u).$$

Egyszerű számolással meg lehet győződni arról, hogy az ilyen alakú $F$ tetszőleges $x+y$ kommutatív csoportművelettel és tetszőleges $\varphi : P \to Q$ leképezéssel ki is elégíti az eredeti függvényegyenletet.[2]

Feltételezve, hogy $Q$ topológikus tér, melyen $F_u x$ folytonos, $x+y$ az értelmezése alapján az $y$ változónak folytonos függvénye, s minthogy $x+y$ kommutatív, ezért $x$-nek is folytonos függvénye; akkor tehát $Q^+$ topologikus csoport. Minthogy egy valós intervallumon értelmezett folytonos csoport mindig izomorf a valós additív csoporttal [1], abban a speciális esetben, amikor $Q$ egy valós intervallum, a következőt nyerjük:

*Következmény:* Egy valós intervallumon folytonos és felcserélhető leképezéseknek tranzitív összessége izomorf a tranzlációkkal, azaz

$$x \to F_u x = f^{-1}[f(x) + \varphi(u)]$$

alakban írható, ahol $f(x)$ az adott intervallumot a valós egyenesre leképező folytonos $1-1$ függvény.

Minthogy a tranzláció függvényegyenletének

$$F[F(x, u), v] = F(x, u \oplus v), \qquad x \in Q;\ u, v \in P$$

általánosítása kommutatív $u \oplus v$ gruppoidok esetén szintén közvetlenül visszavezethető (25)-re, hiszen akkor

$$F_u F_v x = F_{u \oplus v} x = F_{v \oplus u} x = F_v F_u x,$$

[2] FUCHS LÁSZLÓ megjegyezte, hogy a tranzitivitás helyett elég lenne feltételezni csupán azt, hogy $Q$ az $F_u$ leképezésekre nézve irreducibilis, azaz $Q$-nak nincs olyan $Q'$ valódi része, melyre $F_u Q' \subseteq Q'$ teljesül minden $u \in P$-re. Ekkor ugyanis tetszőleges $x, y \in Q$-hoz létezik olyan $u_1, u_2, \ldots, u_k \in P$ elemrendszer, hogy $y = F_{u_1} F_{u_2} \ldots F_{u_k} x$, mert az $F_{u_1} F_{u_2} \ldots F_{u_k} x$ alakú elemek nem lehetnek benne $Q$ egyetlen valódi részében sem, éppen az irreducibilitás miatt. Ezután $x+y$ ugyanúgy értelmezhető, mint a tétel fenti bizonyításában, csupán $u$ helyett kell egy $u_1, u_2, \ldots, u_k$ elemrendszert tekinteni.

ezért a 6. tétel hasznosnak látszik a tranzláció általánosításának megoldásánál is [6]. A tranzláció egyenlete pl. fontos szerepet játszik a törtrendű iteráltak értelmezésénél [2]. Az előbbi megjegyzés tehát arra világít rá, hogy ekkor is az iteráltak felcserélhetősége játszik döntő szerepet.

## IRODALOM


[1] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel, 1961.
[2] L. Berg, Unstetige Iterationsgruppen, *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 47–56.
[3] R. H. Bruck, *A survey of binary systems*, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1958.
[4] Hosszú M., Belouszov egy tételéről és annak néhány alkalmazásáról, *MTA III. Oszt. Közleményei*, **9** (1959). 51–56.
[5] Hosszú M., Függvényegyenletek és algebrai módszerek a geometriai objektumok elméletében, I., *MTA III. Oszt. Közleményei*, **9** (1959), 149–162.
[6] Hosszú M., A generalization of the functional equation of translation, *Mitt. Techn. Univ. Schwerind., Miskolc* **21** (1960), 7–10.
[7] Hosszú M., Note on commutable mappings, *Publ. Math.* **9** (1962), 105–106.
[8] Hosszú M., Algebrai rendszereken értelmezett függvényegyenletek, I., *MTA III. Oszt. Közleményei* **13** (1962), 303–315.
[9] F. Radó, Équations fonctionnelles caracterisant les nomogrammes avec trois echelles rectilinges, *Math. Cluj*, (1959), 19–23.
[10] E. Vincze, Über die Charakterisierung der associativen Funktionen von mehreren Veränderlichen, *Publ. Math.*, **6** (1959), 241–253.


(Beérkezett: 1962. IX. 17)

# A FINSLER-FÉLE FIBRÁLT TEREK ELMÉLETÉHEZ

Írta: SOÓS GYULA

## Bevezetés

A differenciálható fibrált terek elmélete (l. pl. [7], [8], [10]) a differenciálgeometria legújabb fejezete. Az elmélet alapja az EHRESMANNtól ([4]) származó, a principális fibrált terek felett értelmezett lineáris összefüggés fogalma, amely visszatükrözi, általános formában s szigorú fogalmazásban a CARTAN és más geometerek által vizsgált különböző differenciálható sokaságok közös geometriai tartalmát, más szavakkal, a differenciálgeometriai struktúrát.

Ezt az elméletet amiatt, hogy tekintetbe veszi a differenciálgeometriai struktúra hordozójának, a bázistérnek topológiai tulajdonságait és eszközeit is ennek megfelelően választja meg, szokás globális differenciálgeometriának is nevezni.

Ez a dolgozat, az EHRESMANN-féle gondolatmenet szellemében a FINSLER-féle fibrált terek (l. II. 2. 1. Def.) problematikájával foglalkozik. A globális megalapozást megnehezíti ezeknek a tereknek többrétű, specifikus szerkezete. Az EHRESMANN-módszer formális alkalmazása azzal a veszéllyel járna, hogy elhalványulna, helyesebben nem domborodnék ki jellegzetesen a mindenek előtt való geometriai lényeg, holott az *általánossal* szemben itt a *speciális* szerkezeti tulajdonságokban gazdagabb voltán van a hangsúly. Ezt szem előtt tartva vizsgálataimban arra törekedtem, hogy a rendelkezésre álló lehetőségekkel, a meglevő és megalkotandó módszerekkel úgy éljek, hogy az elsődleges cél mindig a geometriai lényeg megragadása legyen és hogy ennek elérését másodlagos tényezők előtérbe kerülése ne hátráltassa.

Ezért az I. fejezetben, minimális méretezésben, csak a legszükségesebb tudnivalók összefoglalására szorítkozom. Ami az elért eredményeket illeti, a II. fejezetből talán elsősorban a lineáris összefüggés új, esetünkben legcélszerűbb bevezetését, az érintő terek erre alapuló direkt szétbontását, a FINSLER-nyaláb torzió- és görbületelméletének teljesen geometriai (infinitezimális meggondolásoktól mentes) megalapozását emelném ki.

A III. fejezet a FINSLER-nyaláb automorfizmusaival (a lineáris összefüggést megőrző differenciálható homeomorfizmusaival) foglalkozik módszeresen. E fejezetben a figyelmet az érintő térben operáló endomorfizmus-csoport bevezetésére legyen szabad felhívnom. Ez a csoport sajátos módon tükrözi vissza a tér görbületi viszonyait és remélhetően hasznosnak bizonyul bizonyos problémák vizsgálatában.

A dolgozat felépítése axiomatikusnak tekinthető. A globális megalapozás messzemenően leegyszerűsített, áttekinthető tárgyalásmódot tesz lehetővé, a klasszikus tenzorkalkulus alkalmazására csak ott került sor, ahol ezt a probléma természete indokolta.

A fibrált terek s a rokon területek magyar terminológiája még nem alakult ki, ezért elkerülhetetlenné vált egy sor kifejezés magyar megfelelőjének megválasztása s további új elnevezések bevezetése. Nem állítom, hogy a javasolt elnevezések megválasztása minden esetben szerencsés módon történt.

TARTALOMJEGYZÉK



# I. DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁGOK

## 1. A differenciálható struktúra

*Alapsokaságnak* nevezzük az $M$ topologikus teret, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

B 1.: $M$ *Hausdorff*-féle, összefüggő topologikus tér, $\dim M = n$,

B 2.: $M$ lokálisan euklideszi.

Ez utóbbi tulajdonság annyit jelent, hogy $M$ bármely $x$ pontjának létezik olyan $U$ környezete, amely az $R^n$ $n$-dimenziós euklideszi tér $K^n$ nyílt egységgömbjével homeomorf. ($K^n$ helyett természetesen bármilyen vele homeomorf $E \subset R^n$ halmaz is vehető.)

Jelölje $\varphi_U$ a B 2. alapján létező

$$\varphi_U: \quad U \to E_U \subset R^n, \quad E_U \rightleftharpoons K^n$$

homeomorfizmust. A $\varphi_U(x) \in E_U$ pont derékszögű koordinátái legyenek rendre $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (x^i)$. Megállapodás szerint az $(x^i)$ számrendszert az $x \in U$ pont *koordinátáinak* nevezzük. Az

$$x \to x^i(x) \in R \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

leképezés az $i$-edik *koordinátafüggvény*. Az $\{U; \varphi_U; E_U\}$ hármast *lokális koordinátarendszernek* nevezzük, $U$ a lokális koordinátarendszer *tartománya*. A B 2. követelmény következményeként azt kaptuk, hogy $M$ bármely pontja eleme valamely koordinátakörnyezetnek.

Ha $x \in U \cap V$, a $\varphi_U$, illetve $\varphi_V$ homeomorfizmusok segítségével az alábbi homeomorfizmus értelmezhető:

$$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \quad \varphi_V(U \cap V) \to \varphi_U(U \cap V)$$

Mivel $\varphi_U : U \to E_U$, $\varphi_V : V \to E_V$, ezért

$$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \quad E_V \to E_U,$$

az $U \cap V$ metszet $E_V$-be eső képét $E_U$-ba eső képébe képezi le homeomorf módon. Ha $x_U^i(x)$ az $U$, $x_V^i(x)$ a $V$ felett érvényes koordinátafüggvények, $U \cap V$ felett a $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$ leképezés az

$$x_U^i(x) = \varphi_{UV}^i\big(x_V(x)\big) \tag{1.1}$$

függvényrendszerrel írható le. Az (1. 1) függvényrendszert *lokális koordinátatranszformációnak* nevezzük. Ez a transzformáció $C^r$-osztályú, ha $\varphi^i \in C^r$ és $J_{UV} \neq 0$, ahol $J_{UV} = \det\left(\dfrac{\partial x_U}{\partial x_V}\right)$ az (1. 1) rendszer *Jacobi*-determinánsa.

Legyen $\mathfrak{A} = \{U_\alpha;\ \varphi_{U_\alpha};\ E_{U_\alpha} | \alpha \in I\}$ lokális koordinátarendszerek valamely halmaza. $\mathfrak{A}$-t az $M$ alapsokaság $C^r$-atlaszának nevezzük, ha $\mathfrak{A}$ kielégíti az alábbi két követelményt:

$\mathfrak{A}_1^{(r)}$: Az $U_\alpha$-k lefedik $M$-et: $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha = M$.

$\mathfrak{A}_2^{(r)}$: Ha $U_\alpha$, $U_\beta \in \mathfrak{A}$ és $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, akkor
$\varphi_{U\alpha} \circ \varphi_{U\beta}^{-1} \in C^r$ és $J_{U\alpha U\beta} \neq 0$.

1. 1. DEFINÍCIÓ. Az $\mathfrak{M} = \{M, \mathfrak{A}^{(r)}\}$ kettőst $C^r$-osztályú *differenciálható sokaságnak* nevezzük. Az $M$ alapsokaság a differenciálható sokaság *hordozója*, az $\mathfrak{A}^{(r)}$ atlasz pedig *M koordinátarendszere.*

Tekintsük az $A = \{\mathfrak{A}_\sigma^{(r)}, \sigma \in \Sigma\}$ halmazt, azaz, az $M$ alapsokaság $C^r$-osztályú atlaszainak rendszereit. $\mathfrak{A}_\sigma^{(r)} \sim \mathfrak{A}_\tau^{(r)} : \mathfrak{A}_\sigma^{(r)}$ ekvivalens $\mathfrak{A}_\tau^{(r)}$-val, $(\mathfrak{A}_\sigma^{(r)}, \mathfrak{A}_\tau^{(r)} \in A)$, ha e két atlasz egyesítése ismét $A$-hoz tartozik. Az $\mathfrak{A}^{(r)} = \{U_\alpha;\ \varphi_\alpha;\ E_\alpha | \alpha \in I\}$ és az $\mathfrak{A}^{(r)\prime} = \{U'_\beta;\ \varphi'_\beta;\ E'_\beta | \beta \in I'\}$ $C^r$-atlaszok egyesítésén az

$$\{U_\alpha, U'_\beta;\ \varphi_\alpha, \varphi'_\beta;\ E_\alpha, E'_\beta \,|\, \alpha \in I, \beta \in I'\}$$

atlaszt értjük. Könnyű igazolni, hogy ez a reláció ekvivalencia-reláció. Jelöljön $A^{(r)}$ egy ekvivalencia-osztályt.

1. 2. DEFINÍCIÓ. Az $\{M, A^{(r)}\}$ kettőst *differenciálható struktúrának nevezzük M* fölött. Azt mondjuk, hogy $\{M, \mathfrak{A}^{(r)}\}$ és $\{M, \mathfrak{A}^{(r)\prime}\}$ *ugyanazt* a differenciálható struktúrát realizálják, ha $\mathfrak{A}^{(r)} \in A^{(r)}$ és $\mathfrak{A}^{(r)\prime} \in A^{(r)}$.

Ugyanaz az $M$ alapsokaság egyidejűleg több, nem-ekvivalens struktúra hordozója lehet. A $C^r$-osztály $r$ rendszáma nyilván bármilyen pozitív egész lehet. Ha $r = \infty$, vagy $r = \omega$, a differenciálható sokaságot *korlátlanul differenciálhatónak*, vagy *analitikusnak* nevezzük. A továbbiakban megállapodunk abban, hogy a tekintett sokaságok általában $C^\infty$-osztályúak.

Az $\mathfrak{M} = \{M, \mathfrak{A}^{(r)}\}$ differenciálható sokaságot irányíthatónak nevezzük (az $\mathfrak{A}^{(r)}$ atlaszra nézve), ha bármely $U \cap V \neq \emptyset$ esetén $J_{UV} > 0$, (vagy $J_{UV} < 0$).

## 2. Lokális érintővektor. Érintőtér, duális érintőtér

Legyen $f$ valós értékű függvény $M$ fölött:

$$f: \quad M \to R, \quad x \to f(x) \in R.$$

Jelölje $f_U$ az $f$ leszűkítését az $U$ koordinátakörnyezetre: $f_U = f|U$. E környezetben nyilván

$$f_U(x) = f_U^*(x^1(x), x^2(x), \dots, x^n(x)), \tag{2.1}$$

ahol $x^i(x)$ az $U$ feletti $i$-edik koordinátafüggvény.

Az $f$ függvény $C^r$*-osztályú,* ha bármely $U$ fölött a (2. 1) előállításban fellépő $f_U^*$ függvény az $(x^i)$ lokális változók $C^r$-osztályú függvénye. Nyilvánvaló, hogy ha $f \in C^r$ az $\mathfrak{A}^{(r)}$ atlaszra vonatkozóan, ugyanilyen tulajdonságú bármely, $\mathfrak{A}^{(r)}$-rel ekvivalens atlasz alapulvétele esetén is, azaz, e fogalomalkotás független a koordinátarendszer megválasztásától.

Jelöljük $\mathscr{F}_M$-mel az $M$ sokaság fölött értelmezett differenciálható függvények halmazát. $\mathscr{F}_{x_0}$-lal jelöljük az $x_0$ környezetében differenciálható függvények családját. $\mathscr{F}_{x_0}$ nyilván gyűrű.

2. 1. DEFINÍCIÓ. Az $M$ sokaság $x_0$ támadó-pontú $L_{x_0}$ *lokális érintővektora* olyan

$$L_{x_0}: \quad \mathscr{F}_{x_0} \to R, \qquad f \to L_{x_0}(f) \in R,$$

leképezés, amelyre az alábbiak teljesülnek:

LTV 1.: $L_{x_0}(k) = 0, \; k = \text{const.}$,

LTV 2.: $L_{x_0}(k_1 f_1 + k_2 f_2) = k_1 L_{x_0}(f_1) + k_2 L_{x_0}(f_2)$,

LTV 3.: $L_{x_0}(fg) = g(x_0) L_{x_0}(f) + f(x_0) L_{x_0}(g)$,

$(k_1, k_2 = \text{const.}, \; f, g, fg \in \mathscr{F}_{x_0})$.

$T_{x_0}$-lal jelölve az $\{L_{x_0}\}$ halmazt, kimutatjuk, hogy $T_{x_0}$ vektortér a valós számok teste felett, továbbá azt, hogy $\dim T_{x_0} = \dim M = n$. $T_{x_0}$-ban az additív struktúrát az

$$(L_1, L_2) \to L_1 + L_2 : \quad (L_1 + L_2)(f) = L_1(f) + L_2(f)$$
$$(k, L) \to kL : \quad (kL)(f) = kL(f)$$

relációkkal értelmezzük. $T_{x_0}$ neutrális eleme a $0(f) = 0$ vektor.

$T_{x_0}$ $n$-dimenziós voltát az alábbiakban bizonyítjuk. Legyen $f_U \in \mathscr{F}_{x_0}$. Értelmezzük az $f_i$ függvényeket a következő módon

$$f_i(x^1, x^2, \dots, x^n) = \begin{cases} \dfrac{f(x^1, \dots, x^i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, x_0^i, \dots, x_0^n)}{x^i - x_0^i}, \\ \qquad \text{ha} \quad x^i \neq x_0^i, \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{x_0}, \qquad \text{ha} \quad x^i = x_0^i, \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \tag{2.2}$$

ahol $x^i$ az $x \in U$, $x_0^i$ pedig az $x_0 \in U$ lokális koordinátái. Nyilván $f_i \in \mathscr{F}_{x_0}$, $(i=1, 2, \ldots, n)$. Azonnal látni, hogy az

$$f_U(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^{i=n} f_i(x)(x^i - x_0^i) + f(x_0)$$

előállítás érvényes. Számítsuk ki $L_{x_0}(f)$-et. Az LTV követelmények alkalmazásával

$$L_{x_0}(f) = L_{x_0}(\sum f_i \cdot (x^i - x_0^i)) = \sum L_{x_0}(f_i \cdot (x^i - x_0^i)) =$$
$$= \sum [(x^i - x_0^i)_{x_0} L_{x_0}(f_i) + (f_i)_{x_0} L_{x_0}(x^i - x_0^i)] =$$
$$= \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{x_0} L_{x_0}(x^i),$$

mivel (2. 2) miatt $(f_i)_{x_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_0}$ és $L_{x_0}(x^i - x_0^i) = L_{x_0}(x^i)$. Az

$$L_{x_0}(f) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{x_0} L_{x_0}(x^i),\ f \in \mathscr{F}_{x_0}$$

kifejezésből, avagy, operátor-írásmódra térve át, az

$$L_{x_0} = \sum \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0} L_{x_0}(x^i) \tag{2.3}$$

alakból nyilvánvaló, hogy $L_{x_0}$-t ismerjük, ha ismeretesek az $x^i$ koordinátafüggvények feletti értékei. Az

$$L_{x_0}(x^i) = \xi^i \in R$$

számokat az $L_{x_0}$ vektor ($U$-ra vonatkozó) lokális komponenseinek nevezzük. Ezek felhasználásával (2. 3) a

$$L_{x_0} = \sum \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0} \tag{2. 4}$$

alakban írható. Az

$$\underset{(i)}{L}_{x_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{2. 5}$$

operátorok nyilván lokális érintővektorok az $x_0$ pontban. (2. 4)-ből, továbbá abból, hogy ezek a vektorok $x_0$-ban lineárisan függetlenek, következik, hogy a (2. 5) rendszer $T_{x_0}$ *bázisa*, azaz, dim $T_{x_0} = n$. Nevezzük a (2. 5) vektorrendszert *természetes bázisnak*, vagy természetes *n-élnek*. $T_{x_0}$ bármely más $n$-élje, $\{e_i | i=1, 2, \ldots, n\}$,

$$e_i = R_i^s \left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)_{x_0}, \quad (R_i^s) \in GL(n, R), \tag{2. 6}$$

alakban adható meg. ($GL(n, R)$ az $n$-edrendű, valós elemű reguláris matrixok csoportja). Az

$$\{e_i\}_{x_0} \rightleftharpoons (R_i^s) \tag{2. 7}$$

hozzárendelés nyilván kölcsönösen egyértelmű. $R_{x_0}$-lal a továbbiakban az $x_0$ támadópontú $n$-élek halmazát jelöljük.

$T^*_{x_0}$ jelölje a $T_{x_0}$ vektortér duális terét, azaz, $T_{x_0}$ lineáris formáinak terét. Kimutatjuk, hogy dim $T^*_{x_0}=n$, továbbá azt, hogy $T_{x_0}$ bármely bázisához kanonikus módon $T^*_{x_0}$-nak egy ún. duális bázisa tartozik. Írjuk evégből az

$$f \to L(f) \in R, \qquad L \in T_{x_0}, f \in \mathscr{F}_{x_0}$$

leképezést $\langle f, L\rangle$ alakban. Ha $f$-t rögzítjük s $L$ befutja $T_{x_0}$ elemeit, az

$$\omega_f(L) = \langle f, L\rangle = L(f) \in R$$

egyenlettel értelmezett $\omega_f$ lineáris függvény $T_{x_0}$ felett, azaz, $\omega_f \in T^*_{x_0}$. Ezt a formát az $f \in \mathscr{F}_{x_0}$ által indukált lineáris formának nevezzük. Tegyük $f$ helyébe rendre az $x^i$ koordinátafüggvényeket. Az

$$\omega^i(L) = \omega_{x^i}(L) = L(x^i) = \xi^i \qquad (i=1, 2, \dots, n) \tag{2.8}$$

módon értelmezett formákról kimutatható, hogy $T^*_{x_0}$ bázisát alkotják. (2. 8) szerint $\omega^i$ az a forma, amely $L$-hez annak $i$-edik lokális komponensét rendeli. (Ez a tulajdonság $\omega^i$ definíciójaként szolgálhat.) Speciálisan ha $L = \underset{(j)}{L}$,

$$\omega^i(\underset{(j)}{L}) = \delta^i_j, \quad (\delta^i_j = 1, \quad \text{ha} \quad i=j, \quad \text{egyébként nulla}), \tag{2.9}$$

hiszen $\underset{(j)}{L}$ lokális komponensei az $\{\underset{(k)}{L}\}$ természetes bázisra vonatkozóan nyilván $\delta^j_k$. A hagyományt követve megtartjuk az

$$\omega^i = (dx^i)_{x_0} \tag{2.10}$$

jelölést. (2. 9) így is írható

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \delta^i_k. \tag{2.11}$$

A $\{dx^i\}_{x_0}$ bázist a (2. 11) tulajdonság miatt a $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{x_0}$ bázis *duális bázisának, kobázisának* nevezzük. $T^*_{x_0}$ egy tetszőleges $\omega$ eleme ezek szerint

$$\omega = \Sigma \alpha_i (dx^i)_{x_0}$$

alakban írható. Az $\alpha_i$ számok *$\omega$ lokális komponensei.*

2. 2. DEFINÍCIÓ. A $T_{x_0}$, illetve a $T^*_{x_0}$ vektortér az $M$ sokaság *érintő-*, illetve *duális érintőtere* az $x_0$ pontban. $T_{x_0}$ elemeit *kontravariáns,* $T^*_{x_0}$ elemeit *kovariáns* érintővektoroknak nevezzük.

Ha $\{e_i\}_{x_0} \in R_{x_0}$, a

$$\theta^j(e_i) = \delta^j_i, \quad \theta^j \in T^*_{x_0} \tag{2.12}$$

relációval értelmezett $\{\theta^j\}_{x_0}$ rendszert a $\{e_i\}_{x_0}$ bázis duális bázisának, duális $n$-éljének nevezzük. A duális $n$-élek halmazát $R^*_{x_0}$-lal jelöljük. Nyilván

$$\theta^j = \bar{R}^j_s (dx^s)_{x_0}, \quad (\bar{R}^j_s) \in GL(n, R).$$

Ha $e_i = R_i^m \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_{x_0}$ és (2. 12) fennáll, azonnal látni, hogy

$$R_i^m \bar{R}_m^j = \delta_j^i,$$

azaz $\bar{R} = R^{-1}$, ha $R = (R_i^k) \in GL(n, R)$.

Az eddigiek során $x_0$ az $M$ sokaság rögzített, egyébként tetszőleges pontja volt. A 2. pontban elmondottak röviden így összegezhetők: Az $M$ alapsokaságon a differenciálható struktúra az

$$x \to T_x, \quad x \to T_x^*, \quad x \to R_x, \quad x \to R_x^*$$

hozzárendeléseket teszi lehetővé.

2. 3. DEFINÍCIÓ. A $T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x$ és $T^*(M) = \bigcup_{x \in M} T_x^*$, illetve az $R(M) = \bigcup_{x \in M} R_x$ és az $R^*(M) = \bigcup_{x \in M} R_x^*$ halmazokat rendre az $M$ sokaság *érintő-*, *duális érintőnyalábjának*, ill. *n-él* és *duális n-élnyalábjának* nevezzük.

Látni fogjuk, hogy ezek a nyalábok egy később értelmezendő általánosabb fogalomnak, a differenciálható fibrált térnek számunkra legfontosabb speciális esetei.

### 3. Vektormező. Differenciálforma. (Pfaff-forma)

3. 1. DEFINÍCIÓ. Az $M$ sokaság $Y$ *vektormezője* olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya $M$, értékei pedig lokális érintővektorok, pontosabban

$$Y: \quad x \to Y_x, \qquad x \in M, \quad Y_x \in T_x.$$

$Y_{x_0}$ az $Y$ mező „értéke" az $x_0$ pontban.

Bármely $Y$ vektormezőhöz, illetve $f \in \mathscr{F}_M$ függvényhez egyértelműen egy $Y(f)$ függvény rendelhető az alábbi értelmezés szerint:

$$Y(f): \quad x \to Y_x(f) \in R.$$

Az $Y$ vektormező *differenciálható*, ha $Y(f)$ differenciálható, azaz, ha $Y(f) \in \mathscr{F}_M$. Legyen $Y_U(f) = Y(f)|U$, akkor a 2. pontban elmondottak alapján

$$Y_U(f) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} Y(x^i = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} y^i(x),$$

azaz $Y$ differenciálhatósága az $y^i = Y(x^i)$ függvények ($Y$ *komponens-függvényei*) differenciálhatóságát jelenti. Ha nem is említjük kifejezetten, a továbbiak során vektormezőn mindig differenciálható vektormezőt értünk.

Az $X$ és $Y$ vektormezők összegén az

$$(X+Y)(f) = X(f) + Y(f) \in \mathscr{F}_M \tag{3. 1}$$

relációval értelmezett $X+Y$ mezőt, az $Y$ mező $\varphi Y$ skalárszorosán, $(\varphi \in \mathscr{F}_M)$, a

$$(\varphi Y)(f) = \varphi \cdot Y(f) \in \mathscr{F}_M \tag{3. 2}$$

tulajdonsággal jellemzett mezőt értjük.

Ha $\mathfrak{V}_M$-mel $M$ vektormezőinek halmazát jelöljük, akkor (3. 1) és (3. 2) alapján világos, hogy $\mathfrak{V}_M$: modulus, pontosabban $\mathscr{F}_M$-*modulus*. Ha skaláris szorzóként függvények helyett csak számokat engedünk meg, $\mathfrak{V}_M$ nyilván *vektortér*, (általában végtelen dimenziójú) az $R$ test fölött.

3. 2. DEFINÍCIÓ. Az $X$ és $Y$ vektormezők *kommutátorán* (zárójeles kifejezésen) az $[X, Y]$ szimbólummal jelölt s az

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

módon értelmezett mezőt értjük. $[X, Y]$ tulajdonságai:

a) $$[X, Y] = -[X, Y], \text{ tehát } [X, X] = 0,$$

b) $$[[X, Y], Z]+[[Y, Z], X]+[[Z, X], Y] = 0. \text{ (Jacobi-identitás).}$$

Az $(X, Y) \to [X, Y]$ művelet bevezetésével $\mathfrak{V}_M$ az $R$ test felett *Lie-algebrát* alkot. $\mathfrak{V}_M$ Lie-algebra, illetve modulus-struktúrája között összefüggést a

(3. 3) $$[fX, gY] = fg[X, Y]+f\cdot(X\cdot g)Y-g\cdot(Yf)X$$

formula adja meg.

A vektormező értelmezéséhez analóg módon definiálható a formamező, a differenciálforma fogalma. *Differenciálformának* nevezünk minden

$$\omega: x \to \omega_x \in T_x^*$$

hozzárendelést. Ha $Y \in \mathfrak{V}_M$, értelmezhetjük az

(3. 4) $$\omega(X): x \to \omega_x(Y_x) \in R$$

függvényt. Megkívánjuk, hogy $\omega(X) \in \mathscr{F}_M$. Az $\omega_1$ és $\omega_2$ formák $\omega_1+\omega_2$ összegét, s $\omega$-nak $\varphi\omega$ skalárszorosát az

(3. 5) $$(\omega_1+\omega_2)(X) = \omega_1(X)+\omega_2(X), \quad (\varphi\omega)(X) = \varphi\cdot\omega(X)$$

definiáló relációkkal értelmezzük. Ha $\mathfrak{V}_M^* = \{\omega\}$, akkor (3. 5) alapján $\mathfrak{V}_M^*$: $\mathscr{F}_M$-modulusnak tekinthető. Az $\omega$ forma $\omega_U$ leszűkítése nyilván

$$\omega_U = \sum \omega_i(dx^i)$$

alakban írható, hiszen a $dx^i$ formák (az $U$ koordinátakörnyezet felett) lineárisan függetlenek.

Bármely $f \in \mathscr{F}_M$ függvényhez tartozik egy $\omega_f \in \mathfrak{V}_M^*$ differenciálforma az

(3. 6) $$\omega_f(X) = X(f)$$

definíció alapján. Az $\omega_f$ forma $f$ *teljes differenciálja*. Bevezetve a hagyományos $\omega_f = df$ jelölést, (3. 6) így is írható

(3. 7) $$(df)(X) = X(f).$$

## 4. Tenzorok, külső differenciálformák

Vegyük az $M$ sokaság $T_x$, illetve $T_x^*$ érintőtereinek $s$, illetve $r$ példányát s készítsük el a

$$\mathfrak{T}_x = \underbrace{T_x \times \ldots \times T_x}_{(r\text{-szer})} \times \underbrace{T_x^* \times \ldots \times T_x^*}_{(s\text{-szer})}$$

szorzatot. Az $M$ sokaság $(s, r)$*-típusú* (másképpen: $s$-szeresen kovariáns, $r$-szeresen kontravariáns) $t_x$ *tenzora* az $x$ pontban a $\mathfrak{T}_x$ direkt szorzaton értelmezett, valós értékű multilineáris függvény:

$$t_x(X_1, \ldots, X_r\, ;\ \omega_1, \ldots, \omega_s) \in R,$$

ahol $X_i \in T_x$, $\omega_j \in T_x^*$. Az $(s, r)$-típusú $t_x$ tenzorok ($R$ fölött) vektorteret alkotnak, amelyet $T_r^s$-sel jelölünk. $T_x$, illetve $T_x^*$ elemei nyilván az $(0, 1)$-, ill. $(1, 0)$-típusú tenzorokkal azonosíthatók.

4. 1. DEFINÍCIÓ. Az $M$ sokaság $(s, r)$*-típusú tenzormezője* olyan $t$ függvény, amelynek értelmezési tartománya $M$, értékei pedig (lokális) tenzorok:

$$t:\quad x \to t_x \in T_r^s.$$

A $t$ mezőt differenciálhatónak mondjuk, ha $t$ lokális komponensei ($t_U$ komponensei) a koordináták differenciálható függvényei.

A külső differenciálforma értelmezéséhez vegyük a $\mathfrak{V}_M$ modulus $r$ példányának direkt szorzatát:

$$V = \mathfrak{V}_M \times \ldots \times \mathfrak{V}_M.$$

Az $M$ tér $\omega$ *r-edfokú külső differenciálformáján*, röviden: *r-formáján* $V$-nek $\mathscr{F}_M$-be való olyan leképezését értjük, amelyre teljesül

DF 1.: $\omega(X_1, \ldots, X_r) \in \mathscr{F}_M$ alternáló, azaz

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}) = (\operatorname{sign} \sigma)\, \omega(X_1, \ldots, X_r);$$

DF 2.: $\omega(X_1, \ldots, X_r)$ multilineáris ($r-1$ számú változót rögzítve a leképezés Pfaff-formát eredményez).

(A $\operatorname{sign} \sigma$ a $\sigma:\ (1, \ldots, r) \to (\sigma(1), \ldots, \sigma(r))$ permutációk halmazán értelmezett függvény: $\operatorname{sign} \sigma = \pm 1$ aszerint, hogy $\sigma$ páros, avagy páratlan).

Az $r$-formák $\mathfrak{D}^r$ halmazán az $\omega_1 + \omega_2, f\omega$ műveletek értelmezése nyilvánvaló. Ha $\omega_1 \in \mathfrak{D}^r$ és $\omega_2 \in \mathfrak{D}^s$, akkor $\omega_1 \wedge \omega_2$-vel a két forma (ismert módon értelmezett) *külső szorzatát* jelöljük: $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathfrak{D}^{r+s}$. A $\mathfrak{D}^1$ teret $\mathfrak{V}_M^*$-gal, $\mathfrak{D}^0$-t $\mathscr{F}_M$-mel azonosítva, a *külső deriválás d* operációja az alábbi módon értelmezhető:

ED 1.: Ha $f \in \mathscr{F}_M (= \mathfrak{D}^0)$, akkor $df = f$ teljes differenciálja.

ED 2.: $d\omega \in \mathfrak{D}^{r+1}$, ha $\omega \in \mathfrak{D}^r$; a $d: \mathfrak{D}^r \to \mathfrak{D}^{r1+}$ leképezés lineáris.

ED 3.: $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2$, $(\omega_1 \in \mathfrak{D}^r)$, $\omega_2 \in \mathfrak{D}^s)$,

ED 4.: $d(d\omega) = 0$.

Ismeretes, hogy az ED követelmények a $d$ operátort egyértelműen meghatározzák.

Az $r$-formákon még az alábbi két operációt szokás értelmezni.

Ha $X \in \mathfrak{V}_M$ és $\omega$ külső forma, $\omega$-nak $X$-re vonatkozó $L(X)\omega$ ún. *Lie-deriváltja* ismét formát eredményez. Az $L(X)$ lineáris operátor definiáló relációi:

LD 1.: $L(X)f = X(f) \in \mathscr{F}_M, f \in \mathscr{F}_M$,

LD 2.: $L(X)(d\omega) = d(L(X)\omega)$,

LD 3.: Ha $\omega_1$ és $\omega_2$ $r$-, illetve $s$-forma, $L(X)(\omega_1 \wedge \omega_2) = (L(X)\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (L(X)\omega_2)$.

Az $i(X): \omega \to i(X)\omega$ lineáris operátort $X$-re vonatkozó belső szorzásnak s $i(X)\omega$-t az $\omega$ forma s az $X$ mező *belső szorzatának* nevezzük, ha $i(X)$ eleget tesz az alábbi követelményeknek:

IP 1.: $i(X)f = 0, f \in \mathscr{F}_M$,

IP 2.: $i(X)\omega = \omega(X)$, ha $\omega$ Plaff-forma (ld.: (3. 4)),

IP 3.: Ha $\omega_1$ és $\omega_2$ $q$-, illetve $r$-forma, $i(X)(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i(X)\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^q \omega_1 \wedge (i(X)\omega_2)$.

Felsoroljuk a $d$, $L(X)$, $i(X)$ operátorok legfontosabb tulajdonságait:

(4. 1) $$L([X, Y]) = L(X)L(Y) - L(Y)L(X)$$

(4. 2) $$L(X)i(Y) - i(Y)L(X) = i([X, Y])$$

(4. 3) $$L(X) = i(X)d + di(X)$$
(ez a reláció $L(X)$ definíciójának is tekinthető)

(4. 4) $$i(X)i(X) = 0.$$

A DF definícióban szereplő $\omega(X_1, \ldots, X_r)$ az $i(X)$ segítségével így írható:

$$\omega(X_1, \ldots, X_r) = \frac{1}{r!} i(X_1)i(X_2)\ldots i(X_r)\omega.$$

Ha $\omega$ Pfaff-forma (1-forma), akkor

(4. 5) $$(d\omega)(X_1, X_2) = X_1(\omega(X_2)) - X_2(\omega(X_1)) - \frac{1}{2}\omega([X_1, X_2]).$$

## 5. Differenciálható leképezések. Egyparaméteres globális és lokális transzformáció-csoportok

5. 1. DEFINÍCIÓ. Legyenek $\mathfrak{M} = \{M, \mathfrak{A}\}$ és $\mathfrak{M}' = \{M', \mathfrak{A}'\}$ differenciálható sokaságok. A

$$\varphi: \quad M \to M', \qquad x \to \varphi(x) \in M'$$

leképezést *differenciálhatónak* nevezzük az $x \in M$ pontban, ha bármely $f' \in \mathscr{F}'_{\varphi(x)}$ függvényre fennáll: $f'(\varphi(x)) \in \mathscr{F}_x$. ($\mathscr{F}_x$, illetve $\mathscr{F}'_{\varphi(x)}$ az $M$ sokaság $x$, illetve az $M'$ sokaság $\varphi(x)$ pontja környezetében értelmezett differenciálható függvények gyűrűje.) A $\varphi$ leképezés differenciálható, ha minden $x \in M$ pontban differenciálható. Ha $\varphi$ az $M$-et homeomorf módon képezi le $M'$-re, $\varphi$ és $\varphi^{-1}$ differenciálhatók, $\varphi$-t *differenciál-*

*ható homeomorfizmusnak (diffeomorfizmusnak)* nevezzük. (Ekkor nyilván $\dim M = \dim M'$.)

Lokális koordináták bevezetésével a definíció így formulázható: ha $(x^i)$ koordinátarendszer $x$-nek $U$ környezetében és $(x'^i)$ a $\varphi(x)$ valamely $U'$ környezetében, akkor az $x \to \varphi(x)$ leképezés az

$$x'^i = \varphi^i(x^1, \ldots, x^n) \tag{5. 1}$$

függvényrendszerrel adható meg. A $\varphi$ leképezés differenciálható akkor és csak akkor, ha a $\varphi^i(x)$ függvények differenciálhatóak az $x^i$ változók szerint.

A $\varphi$ leképezés, mint látni fogjuk, a $T_x$ érintőtérnek $T_{\varphi(x)}$-be való lineáris leképezését indukálja. Legyen $Y_x \in T_x$ és $f' \in \mathscr{F}'_{\varphi(x)}$. Az

$$Y'_{\varphi(x)}(f') = Y_x(f' \circ \varphi) \tag{5. 2}$$

relációval értelmezett $f' \to Y'_{\varphi(x)}(f')$ leképezés nyilván lokális érintővektor $\varphi(x)$-ben: $Y'_{\varphi(x)} \in T_{\varphi(x)}$. Ezt a vektort az $Y_x$ vektor $\varphi$-képének nevezzük s így jelöljük:

$$Y'_{\varphi(x)} = \varphi'_x(Y_x) = \varphi'_x \cdot Y_x. \tag{5. 3}$$

A $\varphi'_x: \; T_x \to T_{\varphi(x)}$ leképezés nyilván lineáris, következésképpen $T_x$-et $T_{\varphi(x)}$-be homomorf módon képezi le.

A $\varphi$ leképezés *reguláris,* ha bármely $x$ pontban $\varphi'_x$ monomorf (kernel $\varphi'_x = 0$). Ha $\varphi$ diffeomorfizmus, $\varphi'_x$ a megfelelő érintőtereket egymásra izomorf módon képezi le. Lokális koordináták felhasználásával (5. 3) így írható:

$$\eta'^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^s}\eta^s \begin{cases} i = 1, \ldots, \dim M' \\ s = 1, \ldots, \dim M, \end{cases} \tag{5. 4}$$

tehát $\varphi'_x$ reguláris, ha a $\dfrac{\partial(\varphi)}{\partial(x)}$ matrix rangja maximális.

Szokás a $\varphi'$ leképezést *$\varphi$ lineáris bővítésének* (vagy *$\varphi$ differenciáljának,* $\varphi' = d\varphi$) is nevezni.

Ha $\omega \in T^*_{\varphi(x)}$ (duális érintőtér a $\varphi(x)$ pontban), a $\varphi^*_x\omega \in T^*_x$ formát a

$$(\varphi^*_x\omega)(Y_x) = \omega(\varphi'_x(Y_x)) = \omega(\varphi'_x \cdot Y_x)$$

relációval definiáljuk. Ez a definíció könnyen kiterjeszthető $\omega \in \mathfrak{D}^r$ esetére is. A $\varphi^*_x: T^*_{\varphi(x)} \to T^*_x$ lineáris leképezést *$\varphi$ duális bővítésének* (*$\varphi$ kodifferenciáljának:* $\varphi^* = \delta\varphi$) nevezzük. Ha

$$\varphi: \; M \to M' \quad \text{és} \quad \psi: \; M' \to M'',$$

akkor $\psi \circ \varphi: \; M \to M''$ és

$$(\psi \circ \varphi)' = \psi' \circ \varphi', \quad (\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*, \tag{5. 5}$$

továbbá

$$d \cdot \varphi^* = \varphi^* \cdot d, \tag{5. 6}$$

ahol $d$ a külső differenciálás operátora.

A fenti fogalomalkotások nyilván érvényesek $M=M'$ esetében is. Különösen fontosak azok az (egy paramétertől függő) differenciálható leképezései $M$-nek, amelyek $M$ vektormezőivel állanak szoros összefüggésben.

5. 2. DEFINÍCIÓ. $M$ önmagába való differenciálható leképezéseinek $\varphi_t$, $(-\infty<t<\infty)$ serege $M$ *egyparaméteres globális transzformáció-csoportja*, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

GTG 1.: Rögzített $t$ esetén a $\varphi_t: M\to M$, $x\to\varphi_t(x)$ leképezés differenciálható ($\varphi_0=$identikus leképezés).

GTG 2.: A $(t, x)\in R\times M\to\varphi_t(x)\in M$ leképezés mindkét változóban differenciálható.

GTG 3.: $\varphi_{t+s}=\varphi_t\circ\varphi_s$, $s, t\in R$.

A $\varphi_t$ csoporthoz kanonikus módon egy $X\in\mathfrak{V}_M$ vektormező rendelhető az

$$(Xf)(x)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(\varphi_t(x))-f(x)]$$

módon. Azt mondjuk, hogy $X$-et $\varphi_t$ *indukálja*. Az $f\in\mathcal{F}_M$ függvény $\varphi_t$*-invariáns*, ha $Xf=0$.

Ha $X$ az $M$ tetszőleges vektormezője, nem létezik általában olyan $\varphi_t$ globális csoport, amely $X$-et a fenti értelemben indukálja. Létezik azonban egy *egyparaméteres lokális transzformáció-csoport*, amelyet $X$ *generál*. Pontosabb fogalmazásban: az $M$ sokaság bármely $x$ pontjához található egy $U$ környezet és egy $\varepsilon=\varepsilon(x)>0$ szám, továbbá leképezéseknek egy $\varphi_t$, $|t|<\varepsilon$ serege az alábbi tulajdonságokkal:

LTG 1.: Rögzített $|t|<\varepsilon$ esetén a $\varphi_t: U\to\varphi_t(U)$ leképezés differenciálható,

LTG 2.: A $(t, x)\to\varphi_t(x): I_\varepsilon\times U\to\varphi_t(U)$ leképezés a változóktól differenciálható módon függ, $I_\varepsilon=(-\varepsilon, \varepsilon)$.

LTG 3.: Ha $t, s\in I_\varepsilon$ és $t+s\in I_\varepsilon$, akkor teljesül $\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$, (feltéve, hogy $x$, $\varphi_t(x)\in U$).

Ismeretes, hogy ha $X|U=\Sigma f^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, akkor a $\varphi_t$ sereget a

$$\frac{d\varphi^i}{dt}=f^i(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)) \tag{5. 7}$$

egyenletrendszer $\varphi^i(t, x)$ megoldása szolgáltatja a $\varphi^i(0; x)=x^i$ kezdeti feltételek mellett. A $\{\varphi^i(t; x)\}=\varphi_t(x)$ leképezés lesz a lokális csoport $t$-hez tartozó leképezése. Ezt a leképezést, nyilvánvaló okokból, szokás

$$\varphi(t; x)=x(t)=\exp(tX)x \tag{5. 8}$$

módon is jelölni. LTG 3. ezek szerint az

$$\exp(sX)\circ\exp(tX)x=\exp[(s+t)X]x$$

relációval fejezhető ki. Az $\exp(tX)$ lineáris folytatásait $\exp(tX)'$-vel, illetve $\exp(tX)^*$-gal jelöljük.

$X$ és $Y$ legyen két vektormező $M$ fölött. Az

(5. 9) $$x(t) = \exp(-tY)\exp(-tX)\exp(tY)\exp(tX)x$$

görbét, egy, a Lie-csoportok elméletéből ismert fogalom analogonjaként az $(X, Y)$ kettőshöz tartozó „kommutátor-görbének" nevezzük. Ismeretes, hogy az (5. 9) érintővektora a $t=0$ pontban:

(5. 10) $$\dot{x}_0 = 2([X, Y]_0),$$

azaz, az $X$ és $Y$ mezők kommutátor-mezője értékének kétszerese a görbe kezdőpontjában.

## II. A FINSLER-FÉLE FIBRÁLT TÉR

### 1. Differenciálható fibrált terek*

Az előző fejezetben a

$$T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x$$

halmazt az $M$ differenciálható sokaság érintőnyalábjának neveztük. Most kimutatjuk, hogy ez a halmaz, természetes módon, differenciálható struktúrával látható el s így $T(M)$ differenciálható sokasággá tehető. Értelmezzük evégből a

(1. 1) $$\pi : \quad T(M) \to M$$

leképezést, az ún. projekciót, az alábbi módon: ha $L_x \in T(M)$ lokális érintővektor,

$$\pi(L_x) = x \in M,$$

azaz, a $\pi$ leképezés a lokális érintővektorokhoz azok támadási pontját rendeli. Nevezzünk két lokális vektort ekvivalensnek, ha projekciójuk azonos:

$$(L_x \sim Y_{x'}) \Leftrightarrow (x \equiv x').$$

Ez a reláció nyilván ekvivalencia-reláció, s azonnal látható, hogy az $L_x$-et tartalmazó ekvivalencia-osztály éppen $\pi^{-1}(x) = T_x$, azaz, a lokális érintőtér az $x$ pontban. A $\pi^{-1}(x)$ halmazt $x$ feletti *fibrumnak* nevezzük. Következésképpen $T(M) = \bigcup_{x \in M} \pi^{-1}(x)$, azaz, a $T(M)$ fibrumok egyesítési halmazaként fogható fel s mint ilyen, speciális esete a *fibrált tér* néven ismert fogalomalkotásnak. Mielőtt ezt a fogalmat teljes általánosságban értelmeznénk, mutassunk rá a $T(M)$ halmaz néhány fontos tulajdonságára. Legyen $U \subset M$ és tekintsük $T(M)$-nek $U$ feletti részét, azaz, az

$$U' = \pi^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} \pi^{-1}(x) \subset T(M)$$

halmazt. Ezt a halmazt koordinátakörnyezetté tehetjük, ha a koordinátafüggvényeket az

(1.2) $$L_x \to (x^i, y^i), \qquad \left(L_x = \sum y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

* [7], [14], [5].

hozzárendeléssel értelmezzük. Kissé általánosabb fogalmazással élve, a következőket mondhatjuk. Az $x$ és $x'$ feletti fibrumok, mint topologikus terek, nyilván homeomorfak, közös homeomorfjuk az $F$ $n$-dimenziós (absztrakt) vektortér (mint topologikus tér). Az $F$ teret *fibrum-típusnak* nevezzük. Válasszunk ebben a térben egy $\{\varepsilon^i\}$ bázist. Az (1.2) formulában fellépő $y^i$ számokkal ($x$ legyen most rögzített) elkészíthetjük az $l = \Sigma y^i \varepsilon_i$ vektort. Miközben $L_x$ befutja a $\pi^{-1}(x) = T_x$ fibrum elemeit, addig az $l$ vektorok nyilván kitöltik $F$-et. Ha most $x$ befutja $U$-t, nyilvánvaló, hogy $\pi^{-1}(U)$ az $U \times F$ direkt szorzattal homeomorf, más szavakkal a $T(M)$, mint topologikus tér, lokálisan, (de nem globálisan) direkt szorzatra esik szét, *lokálisan triviális.* Ha $\{U_\alpha; \alpha \in I\}$ az $M$ lefedése, akkor a fentiek alapján az $\{U'_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)\}$ rendszer lefedi $T(M)$-et. A

$$\varphi_\alpha : \quad U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

homeomorfizmusokat *koordináta-homeomorfizmusoknak* nevezzük. Legyen $x \in U_\alpha$, akkor a

$$\varphi_{\alpha, x} : \quad (x) \times F \to \pi^{-1}(x) \qquad [x \times F \rightleftharpoons F]$$

homeomorfizmus $F$-et az $x$ feletti fibrumba viszi át, következésképpen a

$$\varphi_{\beta, x}^{-1} \circ \varphi_{\alpha, x} : \quad F \to F, \qquad x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

homeomorfizmus az $F$ fibrum-típus *transzformáció-csoportjának* valamely eleme (esetünkben a $GL(n, R)$ csoport eleme). A $T(M)$ sokaság felépítésében tehát az alábbi matematikai elemek fordulnak elő: $T(M)$, $M$, $\pi$, $F$, $GL(n, R)$, $\Phi = \{\varphi_\alpha\}$. E példát szem előtt tartva értelmezhetjük a differenciálható fibrált tér fogalmát.

1. 1. DEFINÍCIÓ. A $\mathfrak{B} = \{B, M, p, F, G, \Phi\}$ kollekciót *differenciálható fibrált térnek* nevezzük $M$ fölött, ha teljesülnek az alábbi követelmények:

1. $B$ : *a fibrált tér*, differenciálható sokaság;
2. $M$: *a bázistér*, differenciálható sokaság;
3. $p$ : *a projekció*, $B$-t differenciálható módon képezi le $M$-re: $p: B \to M$;
4. $F$ : *a fibrum-típus*, differenciálható sokaság;
5. $G$ : *a strukturális csoport*, mint $F$ transzformáció-csoportja, Lie-csoport;
6. $\Phi$ : *a koordináta-homeomorfizmusok* rendszere, $\Phi = \{\varphi_{U_\alpha} | U_\alpha \subset M, \alpha \in I\}$, elemei kielégítik a következő kirovásokat:
   a) a $\varphi_{U_\alpha}$ : $U_\alpha \times F \to p^{-1}(U_\alpha) \subset B$ leképezések differenciálható homeomorfizmusok;
   b) ha $x \in U_\alpha$, $y \in F$, akkor $(p \circ \varphi_{U_\alpha})(x, y) = x$;
   c) ha $\varphi_{U_\alpha}$, $\varphi_{U_\beta} \in \Phi$, akkor a $\varphi_{U_\alpha, x}$ : $x \times F \to p^{-1}(x) = F_x$ (fibrum) módon értelmezett leképezésekből származtatható $\varphi_{U_\beta, x}^{-1} \circ \varphi_{U_\alpha, x}$ : $F \to F$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ transzformációk a $G$ strukturális csoport elemei;
   d) a $p^{-1}(U_\alpha)$-k lefedik $B$-t.

Az $M$ sokaság érintővektorainak összessége tehát egy $\mathfrak{T} = \{T(M), \pi, M, F, GL(n, R), \Phi\}$ szimbólumú fibrált tér. Ugyancsak fibrált tér az $n$-élek halmaza is. Láttuk, hogy egy adott $x$ pontban az $n$-élek $R_x$ halmaza a $GL(n, R) = G_n$ csoporttal állt kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban. Az $R(M)$ fibrált tér szimbóluma tehát

$$\mathfrak{R} = \{R(M), M, p, G_n, G_n, \Psi\},$$

ahol $R(M)$ a fibrált tér, az $n$-élek halmaza, $p$ az a leképezés, amely egy $n$-élhez annak érintési pontját rendeli, fibrumtípusa a $G_n$, strukturális csoportja ugyancsak $G_n$, amely önmagán operál az ismert módon.

Azokat a fibrált tereket, amelyek fibrum-típusa homeomorf a strukturális csoporttal, *principális fibrált tereknek* szokás nevezni. Ezek a terek, éppen egyszerűbb struktúrájuk miatt, fontos szerepet játszanak a fibrált terek elméletében.

## 2. Az $M$ sokasághoz rendelt Finsler-féle fibrált tér

Kiindulásult ekintsük az $M$ differenciálható sokaságot, valamint $M$ felett a $V=T(M)$ érintőnyalábot. E paragrafusban a $V$ bázissokaságon egy fibrált teret kívánunk értelmezni, amely a továbbiakban fundamentális szerepet játszik. A $GL(n,R)$ csoportot röviden $G_n$-nel jelöljük, egy elemét $R$-rel. A $V$ felett értelmezendő $Q$ fibrált tér (pontatlan fogalmazásban) úgy áll elő, hogy $V$ minden $v=(x, y)$ pontjához fibrumként az $n$-élek összességét rendeljük. A $Q$ tér tehát principális fibrált tér lesz.

2. 1. DEFINÍCIÓ. Az $\mathcal{F}=\{Q, p, V, G_n, G_n, \Psi\}$ principális fibrált teret az $M$ sokaság $V$ érintőnyalábjához tartozó *Finsler-féle fibrált térnek*, röviden: *Finsler-nyalábnak* nevezzük.

Az $M$ sokaság $\{U_\alpha\}$ lefedéséből kiindulva az $\mathcal{F}$-nyaláb (vagy ami lényegében ugyanaz), a $Q$ tér konstruálása a következőképpen történik. A $\{\pi^{-1}(U_\alpha), \alpha\in I\}$ rendszer, ezt az előző pontban már láttuk, lefedi $V$-t. Az $U_\alpha=\pi^{-1}(U_\alpha)$ jelölést használva tekintsük az

(2. 1)
$$U''_\alpha=p^{-1}(\pi^{-1}(U_\alpha))\subset Q$$

halmazt. A $Q$ tér koordinátafüggvényeit a

$$\psi_\alpha:\quad U'_\alpha\times G_n\to U''_\alpha,\qquad \psi_\alpha\in\psi$$

homeomorfizmusok segítségével értelmezzük. Ha $(x, y)\in U_\alpha$, $R\in G_n$, a

(2. 2)
$$\psi_\alpha\{(x, y), R\}\to\left(x^i, y^i;\ R_1^s\frac{\partial}{\partial x^s}, \dots, R_n^s\frac{\partial}{\partial x^s}\right)$$

hozzárendelés, ahol $R_m^s$ az $R\in G_n$ matrix elemei, koordinátarendszer bevezetését teszi lehetővé. Ha $(x, y)$-t rögzítjük s $R$ változik, megkapjuk a $Q$ sokaság $(x, y)$ feletti $G_{(x,y)}$ fibrumát.

A $p$ leképezés a (2. 2) lokális koordinátarendszerben

(2. 3)
$$p(q) = p(x, y; R) = (x, y)\in V$$

alakú, ahol (bár szabálytalanul), a $q=(x, y; R)$ jelöléssel $Q$-nak az $(x, y)\in V$, ill. $R\in G_n$ adatokkal meghatározott pontját jelöljük.

A $GL(n, R)$ a $Q$ sokaság transzformáció-csoportjaként fogható fel az alább ismertetendő leképezés, az ún. *jobboldali eltolás* alapján. Legyen $\beta\in G_n$. A $\varphi_\beta: Q\to Q$:

(2. 4)
$$\varphi_\beta:\quad q\to\varphi_\beta(q)\in Q,\qquad (q\in U''_\alpha)$$

leképezést a $\psi_\alpha$ homeomorfizmus segítségével értelmezzük: ha $q=\psi_\alpha\{(x, y), R\}$, akkor, definíció szerint,

$$\varphi_\beta(q) = q\beta = \psi_\alpha\{(x, y), R\beta\},$$

vagy lokális koordinátákban

$$(2.\,5) \qquad q\beta = (x, y;\, R)\,\beta = (x, y;\, R\beta) \to (x^i, y^i;\, R_s^1\beta_1^s, \ldots, R_s^n\beta_n^s).$$

Világos, hogy a $G_n$ csoport egyszeresen tranzitív bármely $G_{(xy)} = G_v$ fibrumon (azaz, bármely $q \in G_v$, $q' \in G_v$ pár esetén van egy és csak egy olyan $\beta$, hogy $q' = q\beta$).

Szükségünk lesz még a $Q$ tér homogén transzformációinak nevezett leképezéseire. Legyen $z \in R^+ \subset R$, ($R^+$ a pozitív valós számok halmaza). A

$$(2.\,6) \qquad z:\; Q \to Q, \qquad q \to zq$$

*homogén transzformáció,* definíció szerint, a $q = (x, y;\, R)$ pontnak a $zq = (x, zy;\, R)$ pontot felelteti meg. Lokális koordinátarendszerben: $z:\; (x^i, y^i;\, R_k^i) \to (x^i, zy^i;\, R_k^i)$.

### 3. Lineárisan összefüggő Finsler-féle fibrált tér

Az előző paragrafusban láttuk, hogy a $\{Q, V, p, G_n, G_n\}$ szimbólumú, ún. *Finsler*-féle fibrált tér természetes módon differenciálható struktúrával látható el és $\dim Q = 2n + n^2$. Az I. fejezetben vázolt módon képezhetjük a $Q$ sokaság érintőnyalábját:

$$(3.\,0) \qquad T(Q) = \bigcup_{q \in Q} T_q, \qquad (\dim T_q = 2n + n^2).$$

Azon a közvetlenül belátható tényen túl, miszerint a $T_q$ vektortér (algebrailag) izomorf bármely $T_{q'}$-vel, a differenciálható struktúra egymagában nem nyújt lehetőséget a $q \neq q'$ pontokban értelmezett $T_q$, ill. $T_{q'}$ terek egymásra vonatkoztatására. A továbbiakban a $Q$ téren egy geometriai természetű struktúrát értelmezünk (a lineáris összefüggés struktúráját), amely lehetőséget nyújt arra, hogy a fentebb említett egymásra vonatkoztatást (bizonyos feltételek mellett) megvalósítsuk. Mivel ez a vonatkozás (párhuzamos eltolás) a $V$ alapsokaság görbéitől függ, térjünk ki röviden az idevágó fogalmak ismertetésére.

Jelentse $I = \{t \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$ az $R$ tér egységintervallumát. A

$$(3.\,1) \qquad c:\; I \to V, \qquad t \to c(t) \subset V$$

leképezést, amely egyrészt topologikus, másrészt (szakaszonként) differenciálható, a $V$ sokaság (szakaszonként) *sima görbéjének* nevezzük. A $v_0 = c(0)$, $v_1 = c(1)$ a $c$ görbe *kezdő-*, ill. *végpontja.* Lokális koordinátarendszerben a (3. 1) leképezés a

$$(3.\,2) \qquad c(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \{x^i(t), y^i(t)\} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

függvényekkel írható le, s a (szakaszonkénti) differenciálhatóság az $x^i(t)$, $y^i(t)$ függvények $t$ szerinti differenciálhányadosának létezésével ekvivalens.

Legyen $q_0 \in Q$ és $p(q_0) = v_0$. A

$$(3.\,3) \qquad \bar{c}:\; I \to Q, \qquad \bar{c}(0) = q_0$$

differenciálható görbét a (3. 1) görbe *fedőgörbéjének* nevezzük, ha

$$p(\bar{c}(t)) = c(t), \qquad t \in I \tag{3.4}$$

teljesül.

Lokális koordinátarendszerben (3. 3) a

$$\bar{c}(t) = (x(t), y(t); R(t)) = \{x^i(t), y^i(t); R^i_k(t)\}$$

függvényrendszerrel adható meg.

A fibrált terek homotopia-elméletéből ismeretes*, hogy a $c(t) \subset V$, $q_0 \in Q$, $p(q_0) = v_0$ adatok előírása mellett mindig létezik olyan $\bar{c}(t) \subset Q$ görbe, amely a $q_0$ pontban kezdődik s a fenti értelemben fedi $c(t)$-t. A $\bar{c}(t)$ görbéről azt mondjuk, hogy a $\bar{c}(0) = q_0$-t $c(1) = q_1$-gyel összeköti. A $c(t)$-t fedő $\bar{c}(t)$ görbe azonban nincs egyértelműen meghatározva, pótlólagos feltételek szükségesek tehát, amelyek a (görbétől függő) $q_0 \to q_1$ hozzárendelést egyértelművé teszik. Ezt (egyelőre pontatlan fogalmazásban) azáltal érjük el, hogy a $c(t)$ fedőgörbéi közül egyet *egyértelműen* kitüntetünk. Legkényelmesebben ezt oly módon tehetjük, hogy a kitüntetendő fedőgörbe érintővektorainak viselkedését alkalmasan korlátozzuk (pl. azzal az előírással, hogy ezek a vektorok mindig a megfelelő pontban vett $T_q$ érintőtér bizonyos részterébe essenek). Az így kitüntetett görbe $q_1$ végpontjáról azt mondjuk, hogy a $q_0$ pontból keletkezett, párhuzamos eltolás révén.

A párhuzamos eltolástól bizonyos feltételek teljesülését követeljük meg, amelyek geometriai tartalma nyilvánvaló. Ha az $(x(t), y(t); R(t))$ görbe kitüntetett, megköveteljük, hogy vele együtt az $(x(t), y(t); R(t)\alpha)$ görbe is legyen kitüntetett, azaz, a kitüntetés művelete a $G_n$ csoporttal szemben legyen invariáns. Természetes az is, hogy a kitüntetett görbék, differenciálgeometriáról lévén szó, a (szakaszonként) sima görbék osztályából legyenek választhatók.

Ezek után rátérünk a lineáris összefüggés pontos értelmezésére.

Tekintsük a $\{Q, V, p, G_n, G_n\}$ fibrált tér $T(Q)$ érintőnyalábját, amely a $T_q$ érintőterek egyesítési halmaza. A $T_q$ vektortér egy bizonyos résztérét értelmezi az alábbi meggondolás. A $p: Q \to V$ projekció a $p(q) = v$ feletti fibrum minden $q$ pontját a $v \in V$ pontba vetíti, azaz, a $p$ leképezés a $v$ feletti fibrumon *konstans*. Ebből adódik, hogy a $p'$ lineáris leképezés a fibrumot érintő vektorokat a 0-ba viszi át.

3. 1. DEFINÍCIÓ. A $T_q$ vektortér mindazon $X_q$ vektorait, amelyek a $p(q) = v$ feletti fibrumot érintik, (más szavakkal: $p'(X_q) = 0$) *vertikális vektoroknak*, ezek $\mathcal{V}_q$ halmazát pedig $T_q$ *vertikális résztérének* nevezzük.

Az előző pontban láttuk, hogy a $GL(n, R)$ csoport a $Q$ sokaság transzformációcsoportjaként tekinthető a

$$\varphi_\alpha : \quad Q \to Q, \qquad q \to \varphi_\alpha(q) = (x, y; R\alpha) = q\alpha$$

hatás alapján. Vegyük a $\varphi_\alpha$ lineáris bővítést:

$$\varphi'_\alpha : \quad T(Q) \to T(Q), \qquad \varphi'_\alpha : \quad T_q \to T_{q\alpha}.$$

3. 2. DEFINÍCIÓ. A $Q$ Finsler-féle fibrált tér *h lineáris összefüggésén* olyan

$$h : \quad T(Q) \to T(Q)$$

* [14].

lineáris és differenciálható leképezést értünk, amelynek bármely $h_q = h|T_q$ leszűkítésére az alábbiak teljesülnek:

LC 1.: a) $h|T_q = h_q : \ T_q \to T_q, \qquad q \in Q$;
b) $h_q \circ h_q = h_q$;
c) $p'_q(X_q) = 0 \Leftrightarrow h_q(X_q) = 0$, más szavakkal Kernel $p'_q$ = Kernel $h_q$;

LC 2.: $h_{q\alpha} \circ \varphi'_\alpha = \varphi'_\alpha \circ h_q, \qquad \alpha \in GL(n, R)$. (Invariancia-feltétel.)

3. 1. *Megjegyzés.* E két feltétel lényegében a paragrafus elején támasztott követelményeket fejezi ki szigorú megfogalmazásban. Az LC 1. feltétel a $h_q : T_q \to T_q$ leképezés természetét határozza meg. Eszerint $h_q$ a $T_q$ vektortér olyan önmagába való projekciója, amely a $\mathcal{V}_q \subset T_q$ vertikális résztér vektorait a 0-vektorba, $T_q$ egyéb vektorait pedig $T_q$ valamely részterébe vetíti. Különösen fontosak számunkra azok a vektorok, amelyeket $h_q$ invariánsan hagy. Ezekre vonatkozik a

3. 3. DEFINÍCIÓ. Az $X_q \in T_q$ vektor *horizontális*, ha

$$h_q(X_q) = X_q.$$

A $h_q$ leképezés tulajdonságaiból következik, hogy $T_q$ horizontális vektorai $T_q$-nak egy részterét feszítik ki. A

$$\mathcal{H}_q = \{X_q \in T_q | h_q(X_q) = X_q\}$$

vektortér a $T_q$ *horizontális résztere*.

3. 2. *Megjegyzés.* Legyen $X_q \in \mathcal{H}_q$, akkor $(\varphi'_\alpha \circ h_q)(X_q) = \varphi'_\alpha(X_q)$. LC. 2 szerint viszont $(h_{q\alpha} \circ \varphi'_\alpha)(X_q) = (\varphi'_\alpha \circ h_q)(X_q)$ áll fenn, azaz, $h_{q\alpha}(\varphi'_\alpha(X_q)) = \varphi'_\alpha(X_q)$ teljesül, más szavakkal, $\varphi'_\alpha(X_q) \in \mathcal{H}_{q\alpha}$. Tehát LC 2. így is fogalmazható: $X_q \in \mathcal{H}_q$ akkor és csak akkor, ha $\varphi'_\alpha(X_q) \in \mathcal{H}_{q\alpha}$. Ez az invariancia-követelmény szemléletes tartalma.

3. 3. *Megjegyzés.* Az LC. 1. b) feltételekből következik, hogy $h_q(X_q) = 0$ és $X_q \notin \mathcal{V}_q$ egyidejűleg csak akkor állhat fenn, ha $X_q = 0$. Ez annyit jelent, hogy $\mathcal{H}_q \cap \mathcal{V}_q = 0$ ($T_q$ zérusvektora).

3. 4. *Megjegyzés.* A $T_q$ tér dimenziója, dim $T_q = 2n + n^2$, dim $\mathcal{V}_q = n^2$, következésképpen $\mathcal{H}_q = h_q(T_q)$ dimenziója, dim $\mathcal{H}_q \leqq 2n$ lehet.

3. 4. DEFINÍCIÓ: A $h$ lineáris összefüggés *reguláris*, ha

$$\dim \mathcal{H}_q = 2n, \qquad q \in Q$$

teljesül.

3. 5. *Megjegyzés.* E definíció s a 3. 3. Megjegyzés következménye, hogy reguláris $h$ esetén

$$T_q = \mathcal{H}_q \oplus \mathcal{V}_q, \qquad q \in Q, \tag{3. 3}$$

következésképpen bármely $Y_q \in T_q$ egyértelműen az

$$Y_q = h_q(Y) + v_q(Y) \tag{3. 4}$$

alakban állítható elő. A $h_q(Y) \in \mathcal{H}_q$ az $Y_q$ *horizontális*, $v_q(Y) \in \mathcal{V}_q$ az $Y_q$ *vertikális része, komponense*.

Az előző pontban értelmeztük a $Q$ nyaláb $z$ homogén leképezését. Emlékeztetőül: legyen $z \in R^+$. A $q=(x, y; R) \rightarrow zq=(x, zy; R)$ leképezést $Q$ homogén transzformációjának nevezzük. Mivel $z: Q \rightarrow Q$, azért $z': T(Q) \rightarrow T(Q)$, speciálisan:

$$z'_q = z' | T_q : \quad T_q \rightarrow T_{zq}. \tag{3.5}$$

3. 5. DEFINÍCIÓ. A $h$ lineáris összefüggés *homogén invariáns*, ha

$$z'_q \circ h_q = h_{zq} \circ z'_q, \qquad q \in Q.$$

A $Q$ Finsler-féle fibrált tér $h$ lineáris összefüggései közül a homogén invariáns összefüggések a legfontosabbak.

Felmerül az az (elvileg) fontos kérdés, vajon megadható-e $Q$ felett mindig egy, az $LC$ feltételeket kielégítő $h$ összefüggés? Mielőtt erre választ adnánk, bizonyítjuk az alábbi tételt.

3. 1. TÉTEL. *A $Q$ nyaláb homogén invariáns lineáris összefüggéseinek $H=\{h\}$ halmaza konvex halmaz.*

*Bizonyítás:* Ha $h^1 \in H$, $h^2 \in H$, akkor a

$$\begin{aligned} (h^1 + h^2)(X) &= h^1(X) + h^2(X) \\ (ch)(X) &= ch(X), \quad c \in R \end{aligned} \tag{3.6}$$

definiáló relációk alapján beszélhetünk két összefüggés összegéről, egy összefüggés skalárszorosáról. Általában

$$h^1 + h^2 \notin H, \qquad ch \notin H. \tag{3.7}$$

(A következő pontban látni fogjuk, hogy a $\Gamma$ összefüggési objektum éppen e tulajdonság miatt nem tenzor.) Kimutatjuk azonban, hogy ha $h^i \in H$, és $\Sigma \gamma_k = 1$, $\gamma_k \geqq 0$, $(i, k = 1, \ldots, N)$, $\gamma_k \in R$, akkor a

$$h = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k h^k \tag{3.8}$$

konvex lineáris kombináció $H$-hoz tartozik. Igazolnunk kell, hogy a (3. 8) által értelmezett $h$ eleget tesz az $LC$ követelményeknek. Legyen $h_q = h | T_q$. Nyilvánvalóan

$$h_q^k \circ h_q^l = h_q^k. \tag{3.9}$$

Ennek felhasználásával egyrészt

$$h \circ h = \sum_k \gamma_k h^k \circ \sum_s \gamma_s h^s = \sum_{k,s} \gamma_k \gamma_s (h^k \circ h^s) =$$

$$= \sum \gamma_k \gamma_s h^k = \sum \gamma_s \sum \gamma_k h^k = \sum\nolimits_{\gamma_k} h^k = h,$$

másrészt

$$h \circ \varphi'_\alpha = (\sum \gamma_k h^k) \circ \varphi'_\alpha = \sum \gamma_k (h^k \circ \varphi'_\alpha) = \sum \gamma_k (\varphi'_\alpha \circ h^k) =$$

$$= \varphi'_\alpha \circ (\sum \gamma_k h^k) = \varphi'_\alpha \circ h.$$

Továbbá

$$h\circ z' = (\sum \gamma_k h^k)\circ z' = \sum \gamma_k (h^k \circ z') = \sum \gamma_k (z' \circ h^k) =$$
$$= z' \circ \sum \gamma_k h^k = z' \circ h.$$

Ha fennáll $h_q(X) = \Sigma\gamma_k h_q^k(X) = 0$, és $X_q \notin \mathcal{V}_q$, akkor $h_q^k(X) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Tehát $X_q = 0$. Ebből következik, hogy Kernel $h$ = Kernel $p'$. Ezzel viszont bizonyítást nyert, hogy $h \in H$.

A dolgozat utolsó fejezetében bizonyítandó egzisztenciatétel szempontjából a $H$ halmaznak a 3. 1 Tételben kimondott tulajdonsága döntő jelentőségű.

3. 6. DEFINÍCIÓ. A

$$\bar{c} : \quad I \to Q, \qquad (\bar{c}(t) = q(t) \subset Q)$$

differenciálható görbét *horizontálisnak* nevezzük, ha $\dot{q}(t)$-vel jelölt érintővektoraira

$$\dot{q}(t) \in \mathcal{H}_{q(t)}, \qquad t \in I$$

teljesül.

E fogalomra épül, amint ezt később látni fogjuk, a párhuzamos eltolásnak nevezett konstrukció minden tulajdonsága. E paragrafust a párhuzamosság értelmezésével zárjuk.

3. 7. DEFINÍCIÓ. Legyen $q(t)$ horizontális görbe. Azt mondjuk, hogy $q(1)$ a $q(0)$ pontból *párhuzamos eltolással* keletkezett.

## 4. Kapcsolat a klasszikus elmélettel*

A II. 2. részben láttuk, hogyan vezethetők be lokális koordinátarendszerek a $Q$ differenciálható sokaságban. Emlékeztetőül: ha $(x^1, \ldots, x^n)$ lokális koordinátarendszer $U \subset M$ fölött, akkor az $U' = \pi^{-1}(U) \subset V$ környezetet a

$$v = (x, y) \to (x^i, y^i), \qquad y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{4. 1}$$

hozzárendelés koordinátakörnyezetté teszi. Ezt alapul véve az $U'' = (p^{-1} \circ \pi^{-1})(U) \subset Q$ környezeten a

$$q = (x, y; R) \to (x^i, y^i; R_k^i), \quad R = \left\{ R_1^s \frac{\partial}{\partial x^s}, \ldots, R_n^s \frac{\partial}{\partial x^s} \right\} \tag{4. 2}$$

megfeleltetéssel vezethetünk be lokális koordinátarendszert. A (4. 1) és (4. 2) segítségével értelmezett koordinátákat *kanonikus koordinátáknak* nevezzük $U'$, ill. $U''$ fölött. Ha $\{U_\alpha\}$ lefedi $M$-et, nyilvánvaló, hogy $\{U'_\alpha\}$, illetve $\{U''_\alpha\}$ lefedik $V$-, illetve $Q$-t.

Az I. fejezet 2. pontja értelmében, mivel (4. 2) koordinátarendszer $U''$ felett, a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q, \quad \left(\frac{\partial}{\partial R_k^i}\right)_q \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4. 3}$$

* [1], [15].

vektorok a $q$ pontban $T_q$ bázisát alkotják. Bármely $X_q \in T_q$ tehát a

$$(4.4) \qquad X_q = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q + X^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q + X^i_k \left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_q$$

alakban áll elő. Ha $q$ variál $U''$-ben, az $X \to X_q$ vektormező lokális koordinátái: $X^i$, $X^{(i)}$, $X^i_k$ a $q$ koordinátáinak differenciálható függvényei. A

$$p: \quad Q \to V, \qquad p(x, y; R) = (x, y) = p(q)$$

projekciót lokális koordinátákban az

$$(x^i, y^i; R^s_k) \to (x^i, y^i)$$

leképezés adja. Nyilvánvalóan

$$(4.5) \qquad p'_q \left(\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right) = 0, \quad \text{mert} \quad \mathcal{V}_q = \left\{\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right\}_q,$$

továbbá

$$(4.6) \qquad p' \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p(q)}, \quad p' \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{p(q)}.$$

A $\varphi_\alpha: Q \to Q$ leképezés $U''$ felett a

$$(4.7) \qquad \begin{gathered} \varphi_\alpha(q) = q\alpha = (x, y; R)\alpha = (x, y; R\alpha) \\ (x^i, y^i; R^i_k) \to (x^i, y^i; R^1_s \alpha^s_1, \ldots, R^n_s \alpha^s_n) \end{gathered}$$

hozzárendeléssel adható meg. A $\varphi_\alpha: q \to q_\alpha$ leképezés lineáris bővítése a $\varphi'_\alpha: T_q \to T_{q\alpha}$ leképezés. (4. 7) alapján

$$(4.8) \qquad \varphi'_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{q\alpha}, \quad \varphi'_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{q\alpha},$$

míg az

$$X^i_k \left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_q \in \mathcal{V}_q$$

vertikális vektor $\varphi'_\alpha$-képe:

$$(4.9) \qquad \varphi'_\alpha \left\{ X^i_k(q) \left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_q \right\} = X^i_s(q) \alpha^s_k \left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_{q\alpha}.$$

Ezen előkészítő megjegyzések után számítsuk ki $h_q(X_q)$-t. LC 1.a. és b. alapján (4. 5) miatt

$$(4.10) \qquad h_q(X) = X^i h_q \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q + X^{(i)} h_q \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q \in \mathcal{H}_q,$$

elég tehát a $h_q$ összefüggésnek a $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\dfrac{\partial}{\partial y^i}$ bázisvektorokon előidézett hatásával foglalkoznunk. Mivel $h_q\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) \in T_q$, ezért

$$(4.11) \qquad h_q \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = a^j_i(q) \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q + b^j_i(q) \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q + g^s_{ki}(q) \left(\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right)_q.$$

Az LC 1.b. alapján

$$(h_q \circ h_q)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = a_i^j h_q \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q + b_i^j h_q \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q = h_q \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q,$$

rendezve

$$(a_i^j - \delta_i^j)\, h_q \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q + b_i^j h_q \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q = 0,$$

vagy más alakban

$$h_q \left\{(a_i^j - \delta_i^j)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q + b_i^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q\right\} = 0.$$

A zárójelben álló vektor $\notin \mathcal{V}_q$, ezért a 3. 3 Megjegyzés, valamint amiatt, hogy a $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial y^i}$ vektorok lineárisan függetlenek,

$$a_i^j = \delta_i^j, \quad b_i^j = 0.$$

(4. 11) szerint tehát

$$h_q \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q + g_{ki}^s(q)\left(\frac{\partial}{\partial R_k^s}\right)_q. \tag{4. 12}$$

Analóg módon jutunk a

$$h_q \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q + c_{ki}^s(q)\left(\frac{\partial}{\partial R_k^s}\right)_q \tag{4. 13}$$

képlethez. A $h_q$ összefüggés tehát $U''$ felett a

$$q \to g_{ki}^s(q), \quad q \to c_{ki}^s(q) \tag{4. 14}$$

függvények egzisztenciáját jelenti. A $h_q$ differenciálhatósága ($U''$ felett) a (4. 14) függvények deriválhatóságát jelenti a lokális koordináták szerint. Megvizsgáljuk, hogy az LC 2. invariancia-követelmény milyen feltételt szab ki a (4. 14) függvényekre.

Alkalmazzuk a (4. 8) és (4. 9) képleteket. Ezek alapján

$$\begin{aligned}(\varphi'_\alpha \circ h_q)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q &= \varphi'_\alpha\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q + g_{ki}^s(q)\left(\frac{\partial}{\partial R_k^s}\right)_q\right] = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{q\alpha} + g_{mi}^s(q)\alpha_k^m\left(\frac{\partial}{\partial R_k^s}\right)_{q\alpha}, \quad (\alpha_k^m) \in G_n.\end{aligned} \tag{4. 15}$$

Másrészt

$$(h_{q\alpha} \circ \varphi'_\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = h_{q\alpha}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{q\alpha}\right] = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{q\alpha} + g_{ki}^s(q\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial R_k^s}\right)_{q\alpha}. \tag{4. 16}$$

A (4. 15) és (4. 16) egyenlítéséből

$$g_{ki}^s(q\alpha) = g_{mi}^s(q)\alpha_k^m. \tag{4. 17}$$

Megismételve ezt az eljárást $\frac{\partial}{\partial y^i}$ esetére, a

$$c^s_{ki}(q\alpha) = c^s_{mi}(q)\alpha^m_k \tag{4.18}$$

képlethez jutunk.

Az invariancia-követelmény tehát a (4. 17) ill. (4. 18) tulajdonságokkal ekvivalens. Más szavakkal, ha ismerjük a $g$ és $c$ függvények értékét egy adott $\tilde{q}$ pontban, akkor ismerjük a $\tilde{q}$ feletti fibrum bármely $\tilde{q}\alpha$ pontjában.

Válasszuk a $\tilde{q}$ pontot az alábbi módon:

$$\tilde{q} = (x, y; \tilde{R}), \quad \text{ahol} \quad \tilde{R} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}.$$

Számítsuk ki $g$ és $c$ értékét a $\tilde{q}$ pontban:

$$g^s_{ik}(\tilde{q}) = g^s_{ik}(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n; \delta^1_1, \dots, \delta^n_n) = -\Gamma^s_{ik}(x, y),$$

$$c^s_{ik}(\tilde{q}) = c^s_{ik}(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n; \delta^1_1, \dots, \delta^n_n) = -C^s_{ik}(x, y),$$

ahol a $\Gamma$ és $C$ függvények csupán $(x, y)$-tól függenek. (4. 17) és (4. 18) alapján tehát

$$\left.\begin{aligned} g^s_{ki}(q) &= -R^m_k \Gamma^s_{mi}(x, y), \\ c^s_{ki}(q) &= -R^m_k C^s_{mi}(x, y), \end{aligned}\right. \qquad q \in U''. \tag{4.19}$$

Eddigi eredményeink összefoglalásaként tehát

$$h_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q - R^m_k \Gamma^s_{mi}\left(\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right)_q \tag{4.20}$$

$$h_q\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q - R^m_k C^s_{mi}(x, y)\left(\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right)_q. \tag{4.20}$$

4. 1. DEFINÍCIÓ. A $\{\Gamma^s_{ik}(x, y),\ C^s_{ik}(x, y)\}$ függvényrendszert a $h$ összefüggés *lokális komponenseinek*, vagy *összefüggési objektumnak* nevezzük.

Érvényes tehát az alábbi

4. 1. TÉTEL. *A $Q$ sokaságon a $h$ lineáris összefüggés megadása a*

$$U'_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha) \to \{\underset{(U'_\alpha)}{\Gamma^s_{ik}(x, y)},\ \underset{(U'_\alpha)}{C^s_{ik}(x, y)}\} \qquad \alpha \in I$$

hozzárendelés megadásával ekvivalens, ahol a $\Gamma(x, y)$ és $C(x, y)$ fügvénynek az $U'_\alpha \cap U'_\beta = \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ közös rész felett az ismert transzformációs törvényeknek tesznek eleget.

Vizsgáljuk meg, milyen további feltételeknek tesznek eleget egy homogén invariáns lineáris összefüggés lokális komponensei. A $z: q \to zq$ leképezés a

$$(x^i, y^i; R^i_k) \to (x^i, zy^i; R^i_k) \tag{4.21}$$

hozzárendeléssel adható meg $U''$ felett. A $z'_q = z'|T_q:\ T_q \to T_{zq}$ leképezés hatása a bázisvektorokon:

$$z'_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{zq}, \quad z'_q\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{zq}, \quad z'_q\left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_{zq}. \tag{4.22}$$

Ezek szerint

$$(z'_q \circ h_q)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = z'_q\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q - R_k^m C_{mi}^s(x, y)\left(\frac{\partial}{\partial R_k^s}\right)_q\right] =$$

$$= z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{zq} - R_k^m C_{mi}^s(x, y)\left(\frac{\partial}{\partial R_k^s}\right)_{qz}.$$

Másrészt

$$(h_{zq} \circ z'_q)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = h_{zq}\left[z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{zq}\right] = zh_{zq}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{zq} =$$

$$= z\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{zq} - C_{mi}^s(x, zy)\, R_k^m\left(\frac{\partial}{\partial R_k^s}\right)_{zq}\right].$$

A két egyenlet összevetéséből

$$C_{ik}^s(x, zy) = z^{-1}\, C_{ik}^s(x, y) \tag{4.23}$$

adódik. Hasonló eljárással a $\Gamma$-függvényekre vonatkozóan a

$$\Gamma_{ik}^s(x, zy) = \Gamma_{ik}^s(x, y) \tag{4.24}$$

relációt kapjuk. Eredményünket összefoglalja a

4. 2. TÉTEL. *A $h$ lineáris összefüggés akkor és csak akkor homogén invariáns, ha bármely lokális koordinátarendszerben a $\Gamma$ ill. $C$ objektumok az $y^i$ változók 0-adfokú illetve $(-1)$-edfokú homogén függvényei.*

Ezek az eredmények a kanonikus koordinátarendszerre vonatkoznak. Ha a

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\} \to \left\{R_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right\} = \{e_i\}\,; \quad \left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\right\} \to \left\{R_i^k \frac{\partial}{\partial y^k}\right\} = \{\varepsilon_i\}$$

transzformációval más vonatkoztatási rendszerre térünk át, a (4. 12) ill. (4. 13) relációk így változnak:

$$\begin{cases} h_q(e_i)_q = R_i^k h_q\left(\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right)_q \\ h_q(\varepsilon_i)_q = R_i^k h_q\left(\dfrac{\partial}{\partial y^k}\right)_q. \end{cases} \tag{4.25}$$

A (4. 12), ill. (4. 13) vektorok (s természetesen a (4. 25) vektorok is) $\mathcal{H}_q$ vektorai $h_q \circ h_q = h_q$ miatt. Ezek száma éppen $2n$. Vizsgáljuk meg, milyen feltételek mellett lesznek a (4. 25) vektorok lineárisan függetlenek (azaz, mikor tartoznak egy reguláris $h$ összefüggéshez). Képezzük a (4. 25) vektorok egy tetszőleges lineáris kombinációját a $q$ pontban és tegyük fel, hogy

$$Z_q = \sum\left[\lambda^i h_q(e_i) + \mu^i h_q(\varepsilon_i)\right] = 0, \qquad \lambda^i, \mu^i \in R.$$

Mint differenciáloperátor, az $Z_q$ vektor köteles minden $f(q)$ függvényt annullálni, tehát speciálisan az $x^i$, $\eta^i = \overset{(-1)}{R_r^i}\, y^r$ koordinátafüggvényeket is.

$$Z_q(x_j) = 0 \to \lambda_j = 0. \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$Z_q(\eta^i)$ számítása a

$$\frac{\partial \overset{(-1)}{R}{}^\lambda_\varepsilon}{\partial R^\sigma_\tau} = - \overset{(-1)}{R}{}^\lambda_\sigma \overset{(-1)}{R}{}^\tau_\varepsilon, \qquad \Big(\overset{(-1)}{R}{}^\lambda_\varepsilon R^\varepsilon_\varkappa = \delta^\lambda_\varkappa\Big) \tag{4.26}$$

reláció felhasználásával az

$$Z_q(\eta^m) = \left(\sum \mu^i h_q(\varepsilon_i)\right)(\eta^m) = \sum \mu^i R^\sigma_i \left(h_q\left(\frac{\partial}{\partial y^\sigma}\right)\right)(\eta^m) =$$

$$= \sum \mu^i R^s_i \overset{(-1)}{R}{}^m_r (\delta^r_s + y^k C^r_{ks}) = 0$$

módon történik. Ebből a $\mu^i = 0$ következtetésre csak akkor juthatunk, ha

$$\det(\delta^r_s + y^k C^r_{ks}) \neq 0,$$

azaz, ha a

$$C = (C^r_s), \quad C^r_s = \delta^r_s + C^r_{0s}, \quad C^r_{0s} = C^r_{ks} y^k \tag{4.27}$$

matrix *reguláris*. Ez bekövetkezik triviálisan, ha

$$C^r_{0s} = 0. \tag{4.28}$$

4. 3. TÉTEL. *A $h$ lineáris összefüggés reguláris és a* (4. 25) *vektorok lineárisan függetlenek, ha a* (4. 27) *matrix reguláris, vagy* (4. 28) *teljesül.*

4. 2. DEFINÍCIÓ. Reguláris $h$ összefüggés esetén a

$$h_q(e_i), \quad h_q(\varepsilon_i) \in \mathcal{H}_q \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

vektorokat *horizontális bázisvektoroknak* nevezzük. Ezek a

$$G^i_k = R^s_k \left(\frac{\partial}{\partial R^s_i}\right)_q \qquad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{4.29}$$

*vertikális bázisvektorokkal* együtt $T_q$ bázisát adják meg (bármely $q \in Q$ pontban).

A továbbiakban csak a (4. 28) feltételt kielégítő reguláris összefüggésekre szorítkozunk. Ezeket két további feltétellel kiegészítve *Cartan—Varga-féle összefüggéseknek** nevezzük.

## 5. Párhuzamosság. Az érintőterek direkt szétbontása

A 3. pontban a $\bar{c}: I \to Q$ görbét horizontálisnak neveztük, ha $\bar{c}(t) = q(t) \subset Q$ érintővektoraira

$$\dot{q}(t) \in \mathcal{H}_{q(t)}$$

teljesül. Vizsgáljuk meg, mit jelent analitikusan a horizontalitás követelménye. Vegyük evégből $q(t)$-nek egy koordinátakörnyezetbe eső ívét. A

$$q(t) = \big(x(t), y(t); R(t)\big) \to \big(x_i(t), y_i(t); R^i_k(t)\big) \tag{5.1}$$

* [1], [15].

parameteres előállításból világos, hogy $U''$-ben

$$(5.2)\qquad \dot{q}(t)=\dot{x}^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{q(t)}+\dot{y}^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{q(t)}+\dot{R}^i_k(t)\left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_{q(t)}.$$

A $\dot{q}(t)$ vektor horizontális, ha $h(\dot{q})=\dot{q}$. Az előző paragrafus eredményeit felhasználva, leegyszerűsített írásmóddal:

$$h(\dot{q})=\dot{x}^i h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)+\dot{y}^i h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)=\dot{x}^i\left[\frac{\partial}{\partial x^i}-R^m_k\Gamma^s_{mi}\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right]+$$

$$+\dot{y}^i\left[\frac{\partial}{\partial y^i}-R^m_k C^s_{mi}\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right]=\dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\dot{y}^i\frac{\partial}{\partial y^i}-R^m_k(\Gamma^s_{mi}\dot{x}^i+C^s_{mi}\dot{y}^i)\frac{\partial}{\partial R^s_k},$$

tehát a $h(\dot{q})=\dot{q}$ követelés (5. 2) alapján

$$\{\dot{R}^s_k+R^m_k(\Gamma^s_{mi}\dot{x}^i+C^s_{mi}\dot{y}^i)\}\frac{\partial}{\partial R^s_k}=0$$

alakban fejezhető ki. Mivel a $\dfrac{\partial}{\partial R}$ vektorok lineárisan függetlenek, ezért

$$(5.3)\qquad \frac{dR^s_k}{dt}+R^m_k\left(\Gamma^s_{mi}\frac{dx^i}{dt}+C^s_{mi}\frac{dy^i}{dt}\right)=\frac{DR^s_k}{dt}=0.$$

Igaz tehát az

5. 1. TÉTEL. *A $q(t)\subset Q$ görbe akkor és csak akkor horizontális, ha érintővektorainak lokális koordinátái az (5. 3) differenciálegyenletrendszert kielégítik.*

Az (5. 3) felépítéséből kitűnik, hogy $x(t)$, $y(t)$ ismeretében az $R^s_k(t)$-k *egyértelműen* meghatározhatók az $\overset{0}{R^s_k}$ kezdeti feltétel előírása esetén. Más fogalmazásban: ha adott az $(x(t),y(t))\subset V$ görbe $(0\leqq t\leqq 1)$, akkor mindig létezik egy és csak egy $(x(t),y(t);R(t))\subset Q$ horizontális görbe, amely a $q_0=(x_0,y_0;R_0)$ pontból indul ki s fedi $(x(t),y(t))$-t, azaz

$$p(q(t))=(x(t),y(t))\qquad 0\leqq t\leqq 1.$$

5. 1. DEFINÍCIÓ. A $q(t){:}\,p(q(t))=(x(t),y(t))$ horizontális görbe $q(1)$ végpontjáról azt mondjuk, hogy a $q(0)$ pontból keletkezett az $(x(t),y(t))\subset V$ görbe mentén történő *párhuzamos eltolás* révén.

A lokális bázisokra értelmezett párhuzamossági fogalom módot nyújt az $M$ alapsokaság vektorai párhuzamos eltolásának érelmezésére. Legyen $x(t)$ adott s tekintsük az $y(t)=y^i(t)\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x(t)}$ vektormezőt. Végrehajtva a $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\to R^s_i\dfrac{\partial}{\partial x^s}$ transzformációt s felhasználva az (5. 3) relációt, az

$$(5.4)\qquad \frac{dy^i}{dt}+y^s\left(\Gamma^i_{sk}\frac{dx^k}{dt}+C^i_{sk}\frac{dy^k}{dt}\right)=0$$

egyenletekhez jutunk. Az összefüggés regularitása miatt $y^s C^i_{sk}=0$ s így

$$\frac{dy^i}{dt}+y^s\Gamma^i_{sk}\frac{dx^k}{dt}=\frac{Dy^i}{dt}=0 \tag{5.5}$$

fejezi ki az $y(t)$ mező párhuzamosságát $x(t)$ mentén.

5. 2. DEFINÍCIÓ. Az $x(t)\subset M$ görbe mentén értelmezett $y(t)$ vektormezőt (vonalelem-mezőt) *párhuzamosnak* nevezzük, ha (5. 5) teljesül.

A továbbiakban a $\mathcal{H}_q\subset T_q$ horizontális teret két résztér direkt összegére bontjuk. A szétbontás alapját az alábbi definíció képezi.

5. 3. DEFINÍCIÓ. A $q(t)=(x(t), y(t);\, R(r))$ horizontális görbét *főhorizontális görbének* nevezzük, ha $y(t)$ eleget tesz az (5. 5) egyenleteknek.

Legyen $q(t)$ főhorizontális görbe. Számítsuk ki a $\dot q(t)$ érintővektort. (5. 5) miatt

$$\dot q(t)=\dot x^i\left[\frac{\partial}{\partial x^i}-y^s\Gamma^k_{si}\frac{\partial}{\partial y^k}\right]+\dot R^i_k\frac{\partial}{\partial R^i_k}.$$

Mivel $\dot q(t)$ horizontális, azért $h(\dot q)=\dot q$, azaz

$$\dot x^i\left[\frac{\partial}{\partial x^i}-R^m_k\Gamma^s_{mi}\frac{\partial}{\partial R^s_k}-y^l\Gamma^m_{li}\left(\frac{\partial}{\partial y^m}-R^r_kC^s_{rm}\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right)\right]=\dot q(t).$$

Vezessük be, Cartan nyomán, az

$$\Gamma^{*i}_{jk}=\Gamma^i_{jk}-C^i_{js}\Gamma^s_{mk}y^m \tag{5.6}$$

új összefüggési objektumot. Ennek segítségével a főhorizontalitás tulajdonsága végül is így írható: $q(t)$ főhorizontális, ha

$$\dot q(t)=\dot x^i\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}-y^s\Gamma^m_{si}\frac{\partial}{\partial y^m}-R^m_k\Gamma^{*s}_{mi}\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right\}_{q(t)}\in\mathcal{H}_{q(t)}.$$

Jelöljük a zárójelben álló vektorokat $E_i'$-vel. Az $E_i=R^s_iE_s'$ relációval bevezetett

$$E_i=R^s\left(\frac{\partial}{\partial x^s}-y^k\Gamma^m_{ks}\frac{\partial}{\partial y^m}-R^m_k\Gamma^{*r}_{ms}\frac{\partial}{\partial R^r_k}\right)_q\in\mathcal{H}_q \tag{5.7}$$

vektorokat $\mathcal{H}_q$ *főhorizontális bázisvektorainak* nevezzük.

5. 4. DEFINÍCIÓ. A főhorizontális bázisvektorok által generált $\mathcal{H}_q'=\{E_i\}\subset\mathcal{H}_q$ teret $\mathcal{H}_q$ *főhorizontális részterének* nevezzük.

Vezessük be az

$$F_i=R^s_i\left(\frac{\partial}{\partial y^s}-R^m_kC^r_{ms}\frac{\partial}{\partial R^r_k}\right)_q \tag{5.8}$$

*kohorizontális bázisvektorokat.* A $\mathcal{H}_q''=\{F_i\}\subset\mathcal{H}_q$ *vektortér* $\mathcal{H}_q$ *kohorizontális résztere.*

Könnyű igazolni a fentiek alapján a következő állítást.

5. 2. TÉTEL. *Reguláris h összefüggés esetén a* $T_q$ *ill.* $\mathcal{H}_q$ *vektorterek bármely* $q \in Q$ *pontban a*

$$T_q = \mathcal{H}_q' \oplus \mathcal{H}_q'' \oplus \mathcal{V}_q, \quad \mathcal{H}_q = \mathcal{H}_q' \oplus \mathcal{H}_q''$$

*direkt összegekre bonthatók. A* $\mathcal{H}_q'$ *teret az* (5. 7), *a* $\mathcal{H}_q''$*-t az* (5. 8), *a* $\mathcal{V}_q$ *vertikális teret pedig az*

$$G_k^i = R_k \frac{\partial}{\partial R_i^s} \tag{5.9}$$

*vertikális bázisvektorok feszítik ki.*

KOROLLÁRIUM. Bármely $X_q \in T_q$ vektor egyértelműen az

$$X_q = h'(X_q) + h''(X_q) + v(X_q)$$

alakban állítható elő. A szétbontásban szereplő vektorokat rendre az $X_q$ vektor *főhorizontális*, *kohorizontális*, illetve *vertikális komponensének (részének)* nevezzük. Nyilván $\dim \mathcal{H}_q' = \dim \mathcal{H}_q'' = n$, $\dim \mathcal{V}_q = n^2$ bármely $q \in Q$ pontban.

Tekintsük most a $Q$ *Finsler-féle* fibrált tér $V$ bázissokaságát (a vonalelemsokaságot). A $p: Q \to V$ projekció $p'$ lineáris folytatása

$$p': \quad T(Q) \to T(V)$$

a $T_q$ vektorteret $T_{p(q)}$-ba projiciálja. Ha $p(q) = v$, akkor a $p$ leképezés tulajdonságaiból következik, hogy $p'(\mathcal{V}_q) = 0$, $p'(\mathcal{H}_q) = T_v$, hiszen $\dim T_v = \dim \mathcal{H}_q = 2n$. A $\mathcal{H}_q$ tér direkt szétbontása a $T_v$, $v = p(q)$ direkt szétbontását indukálja.

5. 5 DEFINÍCIÓ. Az $(e_i^*)_v = R_i^s \left( \frac{\partial}{\partial x^s} - y^k \Gamma_{ks}^{*m} \frac{\partial}{\partial y^m} \right)_v$, illetve az $(\varepsilon_i^*)_v = R_i^s \left( \frac{\partial}{\partial y^s} \right)_v$ vektorokat a $T_v$ tér *szubhorizontális*, illetve *szubvertikális bázisvektorainak* nevezzük. A $H_v^* = \{(e_i^*)\}_v$, illetve a $V_v^* = \{(\varepsilon_i^*)_v\}$ részterek $T_v$ *szubhorizontális*, illetve *szubvertikális* része.

5. 6. DEFINÍCIÓ. A $V$ sokaság $v$ pontjában a $\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_v$, vagy *az* $e_i = R_i^s \left( \frac{\partial}{\partial x^s} \right)_v$ vektorok által generált részteret *Minkowski-féle érintőtérnek* nevezzük, jelölése: $T_v^{(\mu)}$. E tér

$$X_v = X^i(x, y) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_v, \qquad v = (x, y) \in V$$

vektorai a *Minkowski-vektorok*. Az

$$Y: v \to Y_v = y^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_v$$

vektormezőt a $V$ (vonalelem)-sokaság *fundamentális vektormezőjének* nevezzük.

A továbbiakban a $T_v^\mu$ s a $\mathcal{H}_v^*$, $\mathcal{V}_v^*$ terek kapcsolatával foglalkozunk.

Tekintsük az

$$(e_i)_v = R_i^s \left( \frac{\partial}{\partial x^s} \right)_v \begin{array}{l} \nearrow (e_i^*)_v \\ \searrow (\varepsilon_i^*)_v \end{array} \tag{5.10}$$

megfeleltetéseket. Ennek alapján bármely $X_v \in T_v^\mu$ vektorához egyértelműen egy $X_v^{sh} \in \mathcal{H}_v^*$ és egy $X_v^{sv} \in \mathcal{V}_v^*$ vektor rendelhető. Ha $X_v = \tilde{X}^s e_s$, akkor definíció szerint,

$$X_v^{sh} = \tilde{X}^s e_s^*, \quad X_v^{sv} = \tilde{X}^s \varepsilon_s^*. \tag{5.11}$$

Az $X^{sh}$, illetve $X^{sv}$ vektorok az $X$ Minkowski-vektor *szubhorizontális*, illetve *szubvertikális fedővektorai.* Az

$$\begin{aligned}(e_i^*)_v &\to (E_i)_q,\\ (\varepsilon_i^*)_v &\to (F_i)_q,\end{aligned} \qquad p(q) = v, \tag{5.12}$$

megfeleltetés alapján viszont bármely *szubhorizontális*, illetve szubvertikális vektorhoz egy főhorizontális, illetve egy kohorizontális vektor rendelhető. Speciálisan, ha $X_v$ Minkowski-vektor, az

$$X_q^{ph} = \tilde{X}^s (E_s)_q, \quad X_q^{ch} = \tilde{X}^s (F_s)_q \tag{5.13}$$

vektorokat $X_v$ *főhorizontális*, illetve *kohorizontális*, *fedővektorainak* nevezzük. E két vektor nyilván úgy is nyerhető, hogy $X_v$-t először a $\mathcal{H}_v^*$, majd a $\mathcal{H}_q'$ térbe, illetve először a $\mathcal{V}_v^*$, majd a $\mathcal{H}_q''$-térbe „emeljük fel” (lifting). Szemléletesen

$$X_v \begin{array}{l} \nearrow X_v^{sh} \to X_q^{ph} \\ \searrow X_v^{sv} \to X_q^{ch} \end{array}, \qquad p(q) = v. \tag{5.14}$$

Végezetül megjegyezzük, hogy az $M$ sokaság $X_x = X^i(x) \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ vektorai is „felemelhetők” mind a $V$, mind a $Q$ sokaság érintőtereibe oly módon, hogy $X_x$-et először a $T_v^\mu$ térbe „emeljük fel” az

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x \to \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v, \qquad x = \pi(v) = \pi(x, y) \tag{5.15}$$

hozzárendelés alapján.

Könnyű belátni, hogy a fedővektorok egyértelműen vannak meghatározva („alulról felfelé haladva”), ha adott a kiinduló Minkowski-vektor. Az is nyilvánvaló, hogy a $v$-ben vett vektorok csak a $p(q) = v$ tulajdonságú $q$ pontokba, (a $v$ feletti $p^{-1}(v)$ fibrum pontjaiba) emelhetők fel.

A következő pontban a lineáris összefüggéssel ellátott tér geometriai szerkezetével foglalkozunk.

## 6. A lineárisan összefüggő Finsler-féle fibrált tér struktúrája (Torzió- és görbületelmélet)

Tekintsünk a $Q$ tér fölött két horizontális vektormezőt:

$$\begin{aligned} X &: \quad q \to X_q \in \mathcal{H}_q,\\ Y &: \quad q \to Y_q \in \mathcal{H}_q, \end{aligned} \qquad q \in Q.$$

Nevezzük az $\{X, Y\}_q$ rendezett vektorpárt *horizontális kételnek* (horizontális bivektornak) a $q$ pontban. Az I. fejezet 5. pontja szerint az $X$ mező a

$$\tilde{q}(t) = \exp(tX)q, \qquad |t| < \varepsilon_1$$

az $Y$ mező pedig a

$$\tilde{\tilde{q}}(t) = \exp(tY)q \qquad |t| < \varepsilon_2$$

egyparameteres lokális transzformáció-csoportot generálja.

A görbületi és torziómennyiségek értelmezésének alapjául a horizontális paralelogramma fogalma szolgál. Ezt értelmezi a

6. 1. DEFINÍCIÓ. A $q \in Q$ pontból kiinduló $t \to q(t)$ görbét, ahol

$$q(t) = \exp(-tY)\exp(-tX)\exp(tY)\exp(tX)q, \quad |t| < \varepsilon \tag{6. 1}$$

az $\{X, Y\}_q$ horizontális kételhez tartozó *horizontális paralelogrammának* nevezzük a $q \in Q$ pontban.

A definíció geometriai tartalma világos. A paralelogramma „oldalai" horizontális görbék, azaz bármelyik oldal kezdőpontjából a végpontba a $q$ pont párhuzamos eltolással megy át. A (6. 1) görbe, általában, nem zárul, sőt az sem következik be, hogy $q$ és $q(t)$ ugyanazon $G_v$ fibrum pontjai lennének. A paralelogrammának ez a viselkedése a $Q$ tér szerkezetének tulajdonítható. Célunk az, hogy a tér szerkezetét torzió-, illetve görbületi mennyiségekkel jellemezzük. Világos, hogy az egyetlen szóbajövő objektum, amelyet a paralelogramma meghatároz és amelynek geometriai jelentése van, a $q(t)$ görbe érintővektora a kezdőpontban.

6. 2. DEFINÍCIÓ. Az

$$S_{\{X,Y\}_q} = \frac{1}{2}[\dot{q}(t)]_{t=0} \in T_q$$

vektort a $Q$ nyaláb $\{X, Y\}_q$ horizontális kételéhez tartozó *struktúravektorának* nevezzük a $q$ pontban.

Az 5. pont 5. 2 Tétele szerint érvényes az

$$S_{\{X,Y\}_q} = S_q = h'(S_q) + h''(S_q) + v(S_q)$$

direkt szétbontás.

6. 3. DEFINÍCIÓ. Az $S_{\{X,Y\}_q}$ struktúravektor főhorizontális részét a tér *torzióvektorának* nevezzük az $\{X, Y\}_q$ kételre vonatkozóan. Az $S_q$ kohorizontális, illetve vertikális komponensei a tér *redukált görbületi*, illetve teljes *görbületi vektorai* az $\{X, Y\}_q$ kételben.

Az I. fejezet (5. 10.) szerint a $q$-ból kiinduló horizontális paralelogramma érintővektora a $q$ kezdőpontban a $2([X, Y])_q$ vektor. Igaz tehát a

6. 1. TÉTEL. Az $\{X, Y\}_q$ kételhez tartozó $S_q$ struktúravektor az

$$S_{\{X,Y\}_q} = [X, Y]_q, \qquad X_q, Y_q \in \mathcal{H}_q$$

képlet szerint számítható.

A $T_q$ érintőtér direkt felbontása alapján bármely $[X, Y]_q$ kommutátor ismert, ha ismerjük az $[E_i, E_j]$, $[E_i, F_j]$, $[F_i, F_j]$ kommutátorok értékét, hiszen $E_i$ és $F_i$

a $\mathcal{H}_q$ tér bázisvektorai. Ha tehát e kommutátorokat rendre kiszámítjuk s a 6. 3 Definíció szerinti szétbontást végrehajtjuk, a szétbontás koefficienseiként olyan mennyiségekhez jutunk, amelyek a tér torzió-, illetve görbületi viszonyait visszatükrözik. Ezek lesznek a tér torzió-, illetve görbületi tenzorai. Az $[E_i, E_j]$ kommutátor direkt szétbontása az

$$(6.2) \qquad [E_i, E_j] = \tilde{T}^s_{ij} E_s + \tilde{R}^s_{oij} F_s + \tilde{R}^s_{kij} G^k_s$$

képletet eredményezi. Hasonló módon eljárva jutunk az

$$(6.3) \qquad [E_i, F_j] = \tilde{C}^s_{ij} E_s + \tilde{P}^s_{oij} F_s + \tilde{P}^s_{kij} G^k_s,$$

illetve az

$$(6.4) \qquad [F_i, F_j] = \tilde{S}^s_{oij} F_s + \tilde{S}^s_{kij} G^k_s$$

relációkhoz.

6. 4. DEFINÍCIÓ. A $\tilde{T}^s_{ij}$, $\tilde{C}^s_{ij}$ mennyiségek a $Q$ Finsler-nyaláb *torziótenzorai.* Az $\tilde{R}^s_{kij}$, $\tilde{P}^s_{kij}$, illetve $\tilde{S}^s_{kij}$ tenzorok a tér *teljes görbületi tenzorai;* az $\tilde{R}^s_{oij}$, $\tilde{P}^s_{oij}$, $\tilde{S}^s_{oij}$ tenzorokat pedig a tér *redukált görbületi tenzorainak* nevezzük.

A $\tilde{T}$, $\tilde{S}$, $\tilde{P}$, $\tilde{R}$ tenzorok kiszámítása a $h$ összefüggés $\Gamma$ és $C$ (vagy $\Gamma^*$ és $C$) objektumaiból az ismert módon történik. Az $\tilde{S}$, $\tilde{P}$, $\tilde{R}$ tenzorok *ferde szimmetriája* az $(i,j)$ párban az $[X, Y] = -[Y, X]$ reláció következménye. Megjegyezzük, hogy a $T, \ldots, \tilde{R}$ tenzorok a $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v$ természetes $n$-él szerinti $T, \ldots, R$ alakokból származnak a $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v \to R^s_i \left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)_v$ áttérés végrehajtásával (Beindarstellung). Természetes bázisban pl. $T^s_{ij} = \Gamma^{*s}_{ij} - \Gamma^{*s}_{ji}$, a $C^s_{ij}$ pedig éppen a $h$ összefüggésben fellépő koefficiensek. (6. 3) alapján $C^s_{ij}$ tenzori jellege világos.

A vonalelem-sokaságok klasszikus elméletében csak olyan reguláris összefüggéseket szoktak tekintetbe venni, amely a

$$(6.5) \qquad T^i_{jk} = \Gamma^{*i}_{jk} - \Gamma^{*i}_{kj} = 0, \quad S^i_{jk} = S^i_{ojk} = 0$$

feltételeket kielégíti. Ezeket *Cartan—Varga*-összefüggéseknek nevezzük. Az $S_0$ tenzor eltűnése a

$$(6.6) \qquad C^i_{jk} = C^i_{kj}$$

reláció teljesülésével függ össze. További speciális esetek (így pl. a *Minkowski-féle nyaláb*), a strukturális mennyiségekre tett újabb kikötések révén keletkeznek. Ezekre itt részletesen nem térünk ki.

## 7. Differenciáloperátorok. (Kovariáns deriváltak)

A Finsler-terek Cartan-féle elméletében három fontos differenciáloperátor (kovariáns deriváció) lép fel. Ezeknek közös jellemzője, hogy tenzorokhoz tenzort rendelnek, pontosabban: $(s, r)$-típusú tenzorhoz $(s+1, r)$-típusú tenzort, azaz a tenzorok kovariáns fokszámát eggyel növelik.

Látni fogjuk, hogy ezek a műveletek mind fogalmilag, mind pedig formailag igen egyszerűen illeszkednek az általunk követett tárgyalásmód kereteibe. A lényeg abban áll, hogy a deriválandó objektumot az $e_s = R_s^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v$ bázisból a $Q$ tér érintőnyalábjába emeljük fel. Ezen a szinten a kovariáns deriválásnak egyszerűen Lie-deriválás felel meg.

Az egyszerűség kedvéért a definíciókat egy $X = \tilde{X}^s(e_s)_v$ Minkowski-vektorra fogalmazzuk meg. (Emlékeztetőül: $\tilde{X}^s = \overset{(-1)}{R_i^s} X^i$, ahol $X^i$ az $X$ mező komponensei a természetes bázisra vonatkozólag.)

Vegyük az $X$ vektor $X^{ph}$, illetve $X^{ch}$ főhorizontális, illetve kohorizontális fedővektorait. Képezzük ezek kommutátorait az $E_i$, illetve $F_i$ bázisvektorokkal.

7. 1. DEFINÍCIÓ. A

$$h'([E_i, X^{ph}]) = \nabla_i'(X) \in \mathcal{H}_q' \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

vektort az $X$ $i$-edik *főhorizontális deriváltjának* vagy *elsőfajú kovariáns deriváltjának* nevezzük.

7. 2. DEFINÍCIÓ. A

$$h''([F_i, X^{ch}]) = \nabla_i''(X) \in \mathcal{H}_q'' \qquad (i = 1, \dots, n)$$

vektor az $X$ $i$-edik *kohorizontális* vagy *másodfajú kovariáns deriváltja.*

(A $\nabla_i'(X)$, ill. $\nabla_i''(X)$ jelölések jogosultak, hiszen az $X \to X^{ph}$, $X \to X^{ch}$ hozzárendelések egyértelműek.)

Az I. fejezet 3. pontjának (3. 3) képlete szerint

$$[E_i, X^{ph}] = [E_i, \tilde{X}^s E_s] = \tilde{X}^s [E_i, E_s] + E_i(\tilde{X}^s) E_s. \tag{7.1}$$

Rövid számítás eredményeként

$$\begin{aligned} E_i(\tilde{X}^s) &= R_i^k \overset{-1}{R}{}_j^s \left( \frac{\partial X^j}{\partial x^k} - \frac{\partial X_j}{\partial y^m} \Gamma_{xk}^{*m} + X^m \Gamma_{mk}^{*j} \right) = \\ &= R_i^k \overset{-1}{R}{}_j^s X_{|k}^j = \tilde{X}_{|i}^s. \end{aligned} \tag{7.2}$$

A (6. 2) formula szerint $[E_i, E_s]$ főhorizontális része éppen $\tilde{T}_{is}^k E_k$, így (7. 1) főhorizontális része:

$$h'([E_i, X^{ph}]) = \nabla_i'(X) = (\tilde{X}_{|i}^s + \tilde{T}_{ik}^s \tilde{X}^k) E_s. \tag{7.3}$$

A (7. 3) összefüggésből látni, hogy $E_s$ koefficiensei egy (1, 1)-típusú tenzor komponensei. Lokális természetes bázisban

$$\nabla_i' X^s = X_{|i}^s + T_{im}^s X^m. \tag{7.4}$$

Ha a $\Gamma^*$ mennyiségek szimmetrikusak, akkor a

$$\nabla_i' X^s = X_{|i}^s \tag{7.5}$$

jól ismert formulát nyerjük.

Számítsuk ki a másodfajú (kohorizontális) derivált komponenseit.

(7. 6) $$[F_i, X^{ch}] = [F_i, \tilde{X}^s F_s] = \tilde{X}^s [F_i, F_s] + F_i(\tilde{X}^s) F_s.$$

Azonban egyrészt

(7. 7) $$F_i(X^s) = R_i^k \overset{-1}{R}{}^s_j \left( \frac{\partial X^j}{\partial y^k} + X^m C^j_{mk} \right) = R_i^k \overset{-1}{R}{}^s_j X^i_{;k} = \tilde{X}^s_{;i},$$

másrészt (6. 4) alapján $[F_i, F_s]$ kohorizontális része: $\tilde{S}^k_{is} F_k$. Ezeket (7. 6)-ba helyettesítve a

(7. 8) $$\nabla''_i X^s = X^s_{;i} + S^s_{im} X^m$$

formulához jutunk, amely (reguláris összefüggés esetén) a $C$-k szimmetrikus voltát feltételezve a

(7. 9) $$\nabla''_i X^s = X^s_{;i}$$

képletre redukálódik.

7. 3. DEFINÍCIÓ. A
$$h'([F_i, X^{ph}]) = \dot{\nabla}_i X \in \mathcal{H}'_q \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
módon értelmezett vektort az $X$ mező ($i$-edik) *harmadfajú kovariáns deriváltjának* nevezzük.

Határozzuk meg $\dot{\nabla}_i X$ lokális komponenseit.

$$[F_i, X^{ph}] = \tilde{X}^s [F_i, E_s] + F_i(\tilde{X}^s) E_s.$$

Azonban (7. 7) szerint $F_i(\tilde{X}^s) = \tilde{X}^s_{;i}$ és (6. 3) alapján $[F_i, E_s] = -[E_s, F_i]$ főhorizontális része $-\tilde{C}^k_{si} E_k$. Ezek felhasználásával $\dot{\nabla}_i X$ a lokális természetes bázisban a

(7. 10) $$\dot{\nabla}_i X^s = X^s_{;i} - C^s_{mi} X^m = \frac{\partial X^s}{\partial y^i} = \dot{\partial}_i X^s$$

komponensekkel rendelkezik.

Az értelmezés módjából közvetlenül adódik a (7. 4), (7. 8) és (7. 10) operációk tenzori karaktere. A kovariáns deriválás művelete minden nehézség nélkül kiterjeszthető tetszőleges típusú tenzorra is.

Befejezésül értelmezzük még egy $X$ vektor vonalelem-irányú kovariáns deriváltjait.

7. 4. DEFINÍCIÓ. Az $X$ vektor *vonalelem-irányú* kovariáns deriváltjain a
$$h'([Y^{ph}, X^{ph}]) = \nabla'_0 X, \quad h''([Y^{ch}, X^{ch}]) = \nabla''_0 X, \quad h'([Y^{ch}, X^{ph}]) = \dot{\nabla}_0 X$$
vektorokat értjük, ahol $Y = y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ a fundamentális mező.

Azonnal látni, hogy Cartan—Varga-összefüggés esetén

(7. 11) $$\nabla'_0 X^i = X^i_{|s} y^s = X^i_{|0}, \quad \nabla''_0 X^i = \dot{\nabla}_0 X^i = 0.$$

Nem térünk ki részletesen a kovariáns deriváció műveleti szabályainak bizonyítására. Segítségükkel azonban könnyen bizonyíthatjuk a *Finsler*-féle fibrált terek esetén is a *Ricci*-formulákat, a *Bianchi*-identitást stb.

## III. A FINSLER-FÉLE FIBRÁLT TÉR AUTOMORFIZMUS-CSOPORTJÁNAK GEOMETRIÁJA

### 1. Automorfizmusok. Automorfizmus-csoport

A lineárisan összefüggő *Finsler*-féle fibrált tér önmagára való diffeomorf leképezései közül különös figyelmet érdemelnek azok, amelyek a nyaláb lineáris összefüggését megőrzik. Kimutatjuk, hogy ezek a leképezések, a lineárisan összefüggő struktúra ún. automorfizmusai, csoportot alkotnak, a struktúra $A(h)$ automorfizmus-csoportját. Általánosabb tétel specializálásával adódik, hogy az $A(h)$ csoport *Lie*-csoport.

Tekintsük a $h$ összefüggéssel ellátott $Q$ tér

$$\psi : \quad Q \to Q, \qquad q \to \psi(q) \tag{1. 1}$$

diffeomorfizmusát s ennek

$$\psi' : \quad T(Q) \to T(Q)$$

lineáris bővítését.

1. 1. DEFINÍCIÓ. A $\psi : Q \to Q$ diffeomorfizmust a $Q$ tér *automorfizmusának* nevezzük, ha

$$h \circ \psi' = \psi' \circ h \tag{1. 2}$$

teljesül. Jelöljük az (1. 2) relációnak eleget tevő $\psi$-k halmazát $A_Q(h)$-val, vagy röviden $A(h)$-val.

Ha $\psi$ diffeomorfizmus, nyilván $\psi^{-1}$ is az. A $\psi_1$ és $\psi_2$ diffeomorfizmusok $\psi_2 \circ \psi_1$ szorzata ismét $Q$ diffeomorfizmusa.

1. 1 TÉTEL. *Az* (1. 2) *feltételnek eleget tevő $\psi$-k $A(h)$ halmaza csoportot alkot.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $\psi_1, \psi_2 \in A(h)$. Igazoljuk, hogy $\psi_2 \circ \psi_1 \in A(h)$. Valóban, I. (5. 5) alapján $(\psi_2 \circ \psi_1)' = \psi_2' \circ \psi_1'$, következésképpen

$$h \circ (\psi_2 \circ \psi_1)' = h \circ (\psi_2' \circ \psi_1') = (h \circ \psi_2') \circ \psi_1' = (\psi_2' \circ h) \circ \psi_1' =$$

$$\psi = {}_2' \circ (k \circ \psi_1') = \psi_2' \circ (\psi_1' \circ h) = (\psi_2 \circ \psi_1)' \circ h,$$

azaz teljesül (1. 2). Igazolni kell továbbá, hogy $\psi^{-1} \in A(h)$, ha $\psi \in A(h)$. A $\psi \circ \psi^{-1} = I$ ($= Q$ identikus leképezése) relációból $\psi' \circ \psi' = I$ ($= T(Q)$ identikus leképezése) következik s így egyrészt

$$h \circ (\psi' \circ \overset{-1}{\psi'}) = (k \circ \psi') \circ \overset{-1}{\psi'} = \psi' \circ (h \circ \overset{-1}{\psi'}) = h \circ I' = h,$$

másrészt

$$(\psi' \circ \overset{-1}{\psi'}) \circ h = \psi' \circ (\overset{-1}{\psi'} \circ h) = I' \circ h = h$$

áll fenn. A két reláció egyenlítéséből $h\circ\overset{-1}{\psi'}=\overset{-1}{\psi'}\circ h$ adódik, tehát $\overset{-1}{\psi}\in A(h)$. Az $I$ identikus leképezés nyilván $\in A(h)$. Ezzel az 1. 1. Tételt bebizonyítottuk.

Bonyolult és hosszadalmas annak bizonyítása, hogy $A(h)$ Lie-csoport. Azonban Kobayashi ismert tétele [6] esetünkben is érvényes, tehát ezt a bizonyítást itt nem reprodukáljuk. A gondolatmenet a következő: legyen $q_0\in Q$ rögzített s tekintsük a

$$\varrho:\quad A(h)\to Q,\qquad \psi\in A(h)\to\psi(q_0)\in Q$$

leképezést. E leképezés alapján $A(h)$ elemei parametrizálhatók s az így nyert koordinátarendszer bevezetésével $A(h)$ Lie-csoporttá tehető.

1. 2. TÉTEL. *Az $A(h)$ csoport elemei a horizontális (vertikális) vektorokat ismét horizontális (vertikális) vektorokba transzformálják, röviden: $A(h)$ megőrzi a $T_q$ érintőterek direkt felbontását.*

*Bizonyítás.* Legyen $\psi\in A(h)$ és $X_q\in\mathcal{H}_q$, azaz $h(X_q)=X_q$. Számítsuk ki $(\psi'\circ h)$ $(X_q)$-t.

$$(\psi'\circ h)(X_q)=\psi'\big(h(X_q)\big)=\psi'(X_q). \tag{1.3}$$

Másrészt

$$(h\circ\psi')(X_q)=h\big(\psi'(X_q)\big). \tag{1.4}$$

E két egyenlet egybevetéséből $h\big(\psi'(X_q)\big)=\psi'(X_q)\in T_{\psi(q)}$ adódik, azaz $\psi'(X_q)$ is horizontális. Legyen $W_q\in T_q$ tetszőleges érintővektor: $W_q=h(W_q)+v(W_q)$. Ennek alapján

$$\psi'(W_q)=(\psi'\circ h)(W_q)+(\psi'\circ v)(W_q)=(h\circ\psi')(W_q)+(\psi'\circ v)(W_q)$$

áll fenn, ami így is írható

$$\psi'(W_q)-h\big(\psi'(W_q)\big)=\psi'\big(v(W_q)\big).$$

A bal oldalon éppen $v\big(\psi'(W_q)\big)$ áll, tehát

$$\psi'\circ v=v\circ\psi'. \tag{1.5}$$

1. 1. *Megjegyzés.* Az (1. 2. Tételből közvetlenül adódik, hogy ha $q(t)$ horizontális görbe és $\psi\in A(h)$, akkor a $\psi\big(q(t)\big)$ görbe is horizontális, azaz *a párhuzamosság invariáns* az $A(h)$ csoporttal szemben.

1. 2. *Megjegyzés.* Az $A(h)$ csoport megőrzi a $\mathcal{H}_q=\mathcal{H}'_q\oplus\mathcal{H}''_q$ direkt felbontást. Ugyanis, ha $X_q=h'(X_q)+h''(X_q)$, akkor

$$\psi'\big(h(X_q)\big)=(\psi'\circ h')(X_q)+\psi'\circ h''(X_q).$$

Másrészt

$$(\psi'\circ h)(X_q)=h\big(\psi'(X_q)\big)=h'\big(\psi'(X_q)\big)+h''\big(\psi'(X_q)\big).$$

A fenti két relációból, mivel $X$ tetszőleges és a felbontás egyértelmű, állításunk következik.

1. 3. TÉTEL. *A $Q$ tér struktúrája (struktúravektora) invariáns az $A(h)$ csoporttal szemben.*

*Bizonyítás.* A $Q$ tér bármely differenciálható leképezésének lineáris folytatására, így tehát $\psi'$-re is teljesül a

(1.6) $$\psi'([W, Z]_q) = [\psi'(W), \psi'(Z)]_{\psi(q)}.$$

Ha tehát $W$ és $Z$ horizontális vektormezők, akkor így is írható

$$\psi'(S\{W,Z\}_q) = S\{\psi'(W), \psi'(Z)\}_q.$$

Az (1.5), valamint az 1.2. Megjegyzés alapján az is adódik, hogy a $Q$ tér torzió- és görbületi tenzorai invariánsak az $A(h)$ csoporttal szemben.

Vizsgáljuk meg, hogyan függnek össze az $A(h)$ transzformációi a $\varphi_\alpha$ jobb oldali transzlációkkal, $\alpha \in GL(n, R)$.

Erre a problémára ad választ az

1.4. TÉTEL. *Legyen $\psi \in A(h)$ és $\alpha \in GL(n, R)$. Tekintsük a*

(1.7) $$\psi_* : \quad q \to (\psi(q\alpha))\alpha^{-1} \qquad q \in Q$$

*leképezést. Állítás: $\psi_* \in A(h)$.*

Az (1.7) leképezés a szokott jelölésekkel

$$\psi_*(q) = (\varphi_{\alpha^{-1}} \circ \psi \circ \varphi_\alpha)(q)$$

alakban írható, tehát

$$\psi'_* = \varphi'_{\alpha^{-1}} \circ \psi' \circ \varphi'_\alpha.$$

Innen, mivel $h \circ \varphi'_\alpha = \varphi'_\alpha \circ h$,

$$\psi'_* \circ h = \varphi'_{\alpha^{-1}} \circ \psi' \circ (\varphi'_\alpha \circ h) = \varphi'_{\alpha^{-1}} \circ (\psi' \circ h) \circ \varphi'_\alpha =$$
$$= (\varphi'_{\alpha^{-1}} \circ h) \circ \psi' \circ \varphi'_\alpha = h \circ (\varphi'_{\alpha^{-1}} \circ \psi' \circ \varphi'_\alpha) = h \circ \psi'_*,$$

s ezzel a tétel bizonyítást nyert. Azonnal látható, hogy $\psi_* = \psi$ akkor és csak akkor, ha $\psi$ bármely jobb oldali transzlációval felcserélhető. Jelöljük ezek összességét $A^*(h)$-val.

Legyen $q_0 \in Q, p(q_0) = (x_0, y_0) = v_0$. $A(h)$ azon elemei, amelyek az $(x_0, y_0)$ feletti fibrumot önmagába transzformálják, nyilván $A(h)$ részcsoportját alkotják. Jelöljük ezt a részcsoportot $A(h; v_0)$-lal.

1.2. DEFINÍCIÓ. Az $A(h; v_0)$ csoportot $A(h)$ *izotropia-részcsoportjának* nevezzük a $v_0$ pontban.

Ha $\psi \in A(h; v_0)$ és $p(q) = v_0$, akkor nyilván

$$\psi(q) = q\sigma, \qquad \sigma \in GL(n, R).$$

Az izotropia-részcsoport nyilván zárt részcsoportja $A(h)$-nak.

Tekintsük a $\mu : M \to M$ diffeormorfizmust. Ennek lineáris folytatása az $y$-t $\mu'(y)$-ba, az $\{e_i\}$ $n$-élt a $\{\mu'(e_i)\}$-élbe viszi át. Értelmezhető tehát a $\tilde{\mu} : Q \to Q$ leképezés az alábbi hozzárendeléssel:

(1.8) $$\tilde{\mu} : \quad q = (x, y; \{e_i\}) \to [\mu(x), \mu'(y); \{\mu'(e_i)\}].$$

1.3. DEFINÍCIÓ. Az (1.8) szerint értelmezett $\tilde{\mu}$: $Q \to Q$ leképezést a $\mu$: $M \to M$ által *indukált leképezésnek*, vagy *bővített transzformációnak* nevezzük.

Legyen $X_x$ vektormező $M$ fölött. Az I. 5. pontjában láttuk, hogy ez a mező $M$ differenciálható leképezéseinek egyparaméteres $\varphi_t$ lokális csoportját generálja. Az 1. 3 Definíció alapján képezhetjük a $\tilde{\varphi}_t$ bővített transzformációkat. Ezek nyilván $Q$ egyparaméteres lokális transzformáció-csoportját szolgáltatják. Nevezzük ezt röviden bővített csoportnak. A következő pontban egyparaméteres lokális automorfizmus-csoportokkal foglalkozunk.

## 2. Lokális automorfizmusok. (Affinitások)

A *Lie*-csoportok elméletéből ismert az egyparaméteres részcsoportok fontos szerepe. Mielőtt részletesebben foglalkoznánk egyparaméteres lokális automorfizmus-csoportokkal, előkészítésül rámutatunk arra, miként lépnek fel ilyen természetű vizsgálatokban geometriai objektumoknak (az adott csoportra vonatkozó) *Lie*-féle deriváltjai. Látni fogjuk, hogy bizonyos objektumok invarianciája *Lie*-deriváltjuk eltűnésével ekvivalens.

Az $M$ differenciálható sokaságon tekintsük az $X$ vektormező által generált

$$x(t) = \exp(tX)x \quad x(0)=x \tag{2. 1}$$

lokális transzformáció-csoportot. A (2. 1) transzformáció $\exp(tX)'$, illetve $\exp(tX)^*$ lineáris bővítései a $T_x$, illetve $T_x^*$ vektortereken (illetve ezek tenzori szorzatain) operálnak. Legyen $\Phi$ (az egyszerűség kedvéért) differenciálforma.

2. 1. DEFINÍCIÓ. A $\Phi$ formának a (2. 1) csoportra vonatkozó, $L(X)\Phi$-vel jelölt *Lie-deriváltján* az

$$\{L(X)\Phi\}_x = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\exp(tX)^*\Phi_{x(t)} - \Phi_x] \tag{2. 2}$$

módon értelmezett formát értjük.

Jelöljük $\Phi(t)$-vel a

$$\Phi(t) = \exp(tX)^*\Phi \quad \Phi(0)=\Phi$$

formát. $\Phi(t)$ *invariáns* a (2. 1) csoporttal szemben, ha $\Phi(t)=\Phi$, azaz a (2. 1) trajektóriái mentén $\Phi(t)$ nem változik. Állapítsuk meg az invariancia szükséges és elégséges feltételét. Számítsuk ki evégből $\Phi(t)$ $t$ szerinti deriváltját.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{t'\to 0}\frac{1}{t'}[\Phi(t+t') - \Phi(t)] =$$

$$= \lim_{t'\to 0}\frac{1}{t'}\{\exp[(t+t')]^*\Phi - \exp(tX)^*\Phi\} =$$

$$= \exp(tX)^* \lim_{t'\to 0}\frac{1}{t'}[\exp(t'X)^*\Phi - \Phi] = \exp(tX)^* L(X)\Phi.$$

Innen következik, hogy $\dfrac{d\Phi}{dt} = 0 \Leftrightarrow L(X)\Phi = 0.$

Ahhoz tehát, hogy a $\Phi$ forma (vagy általában bármely geometriai objektum) invariáns legyen, az $L(X)\Phi$ derivált eltűnése szükséges és elegendő.

Az 1. pont végén láttuk, hogy az $M$-nek bármilyen önmagára való $\psi$ leképezése a $Q$ tér $\tilde{\psi}$ leképezésévé bővíthető. Speciálisan tehát bármely $\psi_t$ lokális csoporthoz $Q$-nak egy $\tilde{\psi}_t$ egyparaméteres lokális transzformáció-csoportja tartozik. Ha $\psi_t$-t az $X$ mező generálja, valamely $\tilde{X}$ fogja generálni a $\tilde{\psi}_t$ csoportot. Számítsuk ki $\tilde{X}$ komponenseit. Általában, ha $x'^i = \psi^i(x)$ a $\psi\colon M \to M$ leképezés egyenletrendszere, akkor a $\tilde{\psi}$: $Q \to Q$ leképezést az

$$x'^i = \psi^i(x), \quad y'^i = \frac{\partial \psi^i}{\partial x^m} y^m, \quad R'^i_k = \frac{\partial \psi^i}{\partial x^m} R^m_k$$

rendszer határozza meg.

Speciálisan, ha a leképezést az

$$x \to x(t) = \exp(tX)x, \quad X = X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

csoport eleme adja meg, akkor a

$$q \to \tilde{q}(t) = \exp(t\tilde{X})q$$

bővítés $\tilde{X}$ generáló vektora a $Q$ tér kanonikus koordinátarendszerében így írható:

$$\tilde{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^m} y^m\right)\frac{\partial}{\partial y^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^s} R^s_k \frac{\partial}{\partial R^i_k}.$$

Áttérve főhorizontális és kohorizontális bázisvektorokra,

$$\tilde{X} = \tilde{X}^s E_s + (\hat{\nabla}_0 \tilde{X}^s) F_s - \hat{\nabla}_i \tilde{X}^s) G^i_s, \tag{2.3}$$

ahol a $\hat{\nabla}_j$ operáció, a $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ bázisban számítva

$$\hat{\nabla}_j X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} - \Gamma^{*i}_{kj} X^k + C^i_{jm}\left(\frac{\partial X^m}{\partial x^s} + \Gamma^{*m}_{ks} X^k\right) y^s. \tag{2.4}$$

Tekintetbe véve, hogy az $X^i$ komponensek nem függnek $y$-tól, a (2. 4) jobb oldala így is írható:

$$\hat{\nabla}_j X^i = \nabla'_j X^i + C^i_{jm} \nabla'_0 X^m. \tag{2.5}$$

Ha a $\Gamma^*$-k, illetve a $C$-k szimmetrikusak (s ezt a továbbiakban feltételezzük), akkor

$$\hat{\nabla}_j X^i = X^i_{|j} + C^i_{js} X^s_{|0}. \tag{2.6}$$

2. 2. DEFINÍCIÓ. A (2. 6) segítségével értelmezett $\hat{\nabla}_i$ műveletet az $X$ mező *negyedfajú kovariáns deriváltjának* nevezzük.

(A 3. pontban majd megadjuk e deriváció geometriai jelentését.)

Mindeddig nem foglalkoztunk a $T_q$ érintőtér $\{E_i, F_i, G^i_k\}$ bázisának duális bázisával.

2. 3. DEFINÍCIÓ. A

$$\tilde{\theta}^i(E_k) = \delta^i_k, \quad \tilde{\omega}^i(F_k) = \delta^i_k, \quad \tilde{\omega}^i_k(G^m_s) = \delta^i_s \delta^k_m \tag{2.7}$$

relációkkal értelmezett formákat rendre a $\mathcal{H}_q'^*$, $\mathcal{H}_q''^*$, $\mathcal{V}_q^*$ duális terek *duális bázisainak* nevezzük. Egyszerű számítással adódik, hogy reguláris összefüggés esetén

$$\tilde{\theta}^i = \overset{(-1)}{R_s^i} dx^s; \quad \tilde{\omega}^i = \overset{(-1)}{R_s^i}(dy^s + y^m \Gamma^{*s}_{mk} dx^k) = \overset{(-1)}{R_s^i} \omega^s$$
$$\tilde{\omega}_k^i = \overset{(-1)}{R_s^i}\{dR_k^s + R_k^j(\Gamma^{*s}_{jm} dx^m + C^s_{jm}\omega^m)\}. \tag{2.8}$$

2. 4. DEFINÍCIÓ. A

$$\tilde{\Theta}^i = d\tilde{\theta}^i + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^k \wedge \tilde{\omega}_k^i) \tag{2.9}$$

$$\tilde{\Omega}_k^i = d\tilde{\omega}_k^i + \frac{1}{2}(\tilde{\omega}_k^s \wedge \tilde{\omega}_s^i) \tag{2.10}$$

módon értelmezett formákat a $Q$ nyaláb *torzió-*, illetve *görbületi formáinak* nevezzük.

A $\tilde{q}(t) = \exp(t\tilde{X})q$ egyparaméteres lokális transzformáció-csoport elemeit lokális automorfizmusoknak, affinitásoknak, nevezzük, ha megőrzik a $Q$ tér lineáris összefüggését. Pontosabban fogalmazza ezt meg a

2. 5. DEFINÍCIÓ. Az $\tilde{X}$ mező által generált lokális transzformációk lokális automorfizmusai $Q$-nak, ha

$$L(\tilde{X})\tilde{\omega}_j^i = 0 \quad (\Leftrightarrow L(\tilde{X})\Gamma^{*i}_{jk} = L(\tilde{X})C^i_{jk} = 0) \tag{2.11}$$

teljesül, azaz, ha az $\tilde{\omega}_j^i$ forma invariáns.

2. 1. *Megjegyzés.* A 2. 3. Definícióból világos, hogy ha $Z = Z_k^i G_k^i$ vertikális vektor, $\tilde{\omega}_k^i(Z) = Z_k^i$, tehát $\tilde{\omega}_j^i$ zérus értéket vesz fel bármely $X_q \in \mathcal{H}_q$ horizontális vektoron:

$$\tilde{\omega}_j^i(X) = 0, \quad \text{ha} \quad X \in \mathcal{H}_g. \tag{2.12}$$

2. 1. TÉTEL. *Az $\tilde{X}$ vektormező lokális automorfizmus-csoportot generál akkor és csak akkor, ha bármely $W_q \in \mathcal{H}_q$ horizontális vektormező esetén*

$$[\tilde{X}, W] = 0.$$

*Bizonyítás.* Az I. fejezet (4. 3) képlete, valamint a fenti 2. 1. Megjegyzés alapján, ($\tilde{\omega}_j^i$ helyett rövidség kedvéért $\tilde{\omega}$-t írva):

$$i([\tilde{X}, W])\tilde{\omega} = L(\tilde{X})\{i(W)\tilde{\omega}\} - i(W)\cdot L(\tilde{X})\tilde{\omega} = -i(W)L(\tilde{X})\tilde{\omega},$$

tehát
$$[\tilde{X}, W] = 0 \rightarrow L(\tilde{X})\tilde{\omega} = 0.$$

A fordított állítás szintén könnyen belátható.

2. 2. TÉTEL. *Bármely lokális automorfizmus megőrzi a tér torzió-, illetve görbületi formáit.*

*Bizonyítás.* (2. 9), ill. (2. 10) alapján a $dL(\tilde{X})=L(\tilde{X})d$ felcserélési formula, valamint a triviális $L(\tilde{X})\tilde{\theta}=0$ reláció miatt

$$L(\tilde{X})\tilde{\Theta}^i=d(L(\tilde{X})\theta^i)+\frac{1}{2}\{(L(\tilde{X})\tilde{\theta}^k)\wedge\tilde{\omega}^i_k+\tilde{\theta}^k\wedge L(\tilde{X})\tilde{\omega}^i_k\}=0,$$

$$L(\tilde{X})\tilde{\Omega}^i_j=d(L(\tilde{X})\tilde{\omega}^i_k)+\frac{1}{2}\{(L(\tilde{X})\tilde{\omega}^s_k)\wedge\tilde{\omega}^i_s+\tilde{\omega}^s_k\wedge L(\tilde{X})\tilde{\omega}^i_s\}=0.$$

Az $L(\tilde{X})\tilde{\omega}^i_j=0$ relációból $L(\tilde{X})\tilde{y}^i=0$ miatt $L(\tilde{X})\tilde{\omega}^i=0$ adódik. Ezeket felhasználva az alábbi következmény azonnal belátható.

*Következmény.* A klasszikus elméletből* ismert

$$\tilde{\Theta}^i=\frac{1}{2}\tilde{T}^i_{kl}\tilde{\theta}^k\wedge\tilde{\theta}^l+\tilde{C}^i_{kl}\tilde{\theta}^k\wedge\tilde{\omega}^l,$$

$$\tilde{\Omega}^i_j=\frac{1}{2}\tilde{S}^i_{jkl}\tilde{\omega}^k\wedge\tilde{\omega}^l+\tilde{P}^i_{jkl}\tilde{\omega}^k\wedge\tilde{\theta}^l+\frac{1}{2}\tilde{R}^i_{jkl}\tilde{\theta}^k\wedge\tilde{\theta}^l$$

felbontásból kiindulva a (fenti tételt felhasználva) rendre a $L(\tilde{X})\tilde{S}^i_{jkl}=L(\tilde{X})\tilde{P}^i_{jkl}=$ $=L(\tilde{X})\tilde{R}^i_{jkl}=0$ relációk adódnak.**

### 3. Endomorfizmus-csoport az érintőtérben

A (2. 6) pontban értelmezett, negyedfajú kovariáns deriváltnak nevezett $\hat{\nabla}_i X^j$ tenzornak érdekes geometriai interpretációja adható meg. Látni fogjuk, hogy bármely $X$ vektormező (2. 6) közvetítésével a $\mathcal{H}'_q$, $\mathcal{H}''_q$, ill. a $T^\mu_v$ vektorterek egy-egy $E'(X)$, $E''(X)$, $E(X)$ endomorf leképezését indukálja.

3. 1. DEFINÍCIÓ. Legyen $W\in T^\mu$, $X$ pedig $M$ valamely vektormezője. Jelölje $\tilde{X}$ a (2. 3) vektort, $\hat{\nabla}_n\tilde{X}^s$ ennek vertikális komponensét. A $\mathcal{H}'_q$, $\mathcal{H}''_q$, illetve a $T^\mu_{(x,y)}$ vektorterek $X$ által generált $E'(X)$, $E''(X)$, $E(X)$ *endomorf leképezésein* rendre az alábbi megfeleltetéseket értjük:

$$E'(X):\quad W^{ph}\to-(W^k\hat{\nabla}_k\tilde{X}^s)E_s\in\mathcal{H}'_q$$

$$E''(X):\quad W^{ch}\to-(W^k\hat{\nabla}_k\tilde{X}^s)F_s\in\mathcal{H}''_q$$

$$E(X):\quad W\to-(W^k\hat{\nabla}_kX^s)\left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)_{(x,y)}\in T^\mu_{(x,y)}.$$

Az $E'(X)$, $E''(X)$, ill. $E(X)$ leképezéseket rendre *főhorizontális, kohoiizontális*, illetve *Minkowski-endomorfizmusnak* nevezzük.

* [1].
** [13].

Az alábbiakban megadjuk az $E(X)_i^j = E_i^j = -\hat{\nabla}_i X^j$ operátornak, amely tehát az

$$(3.1) \qquad E(X): \quad W \to E(X)W, \qquad W^i \to E_j^i W^j = -W^s \hat{\nabla}_s X^i$$

módon hat, geometriai származtatását. Emlékeztetőül:

$$(3.2) \qquad \hat{\nabla}_i X^j = X^j_{|i} + C^j_{is} X^s_{|0}.$$

Vegyük az $M$ sokaságon az

$$(3.3) \qquad x(t) = \exp(tX)x_0, \qquad |t| < \varepsilon_1$$

csoportnak az $x_0$ pontból kiinduló trajektóriáját. Jelöljük a trajektóriának azt az ívét, amelyet a mozgó pont a $0 \leqq t < \varepsilon < \varepsilon_1$ intervallumban leír, $l_\varepsilon$-nal. Az $l_\varepsilon$ mentén való párhuzamos eltolás operátorát jelöljük $\tau(l_\varepsilon)$-nal. Az $x_0$ pontban tekintsük az $(x_0, Y_0):(x_0^i, y_0^i)$ vonalelemet. Az

$$(3.4) \qquad Y'_{(\varepsilon)} = \tau(l_\varepsilon) Y_0$$

mennyiség nyilván vonalelem az $x(\varepsilon) = \exp(\varepsilon X)x_0$ pontban. Hajtsuk végre a (3. 3) leképezés inverzét. Ennek eredményeként az $x_0$ pontban az

$$(3.5) \qquad Y_0(\varepsilon) = \exp(-\varepsilon X)' \cdot \tau(l_\varepsilon) Y_0$$

vonalelemhez jutunk. Az

$$(3.6) \qquad \varepsilon \to Y_0(\varepsilon)$$

hozzárendelés a

$$(3.7) \qquad \Lambda_\varepsilon = \big(x_0, Y_0(\varepsilon)\big) \subset V$$

görbét értelmezi. Speciális természete alapján a $\Lambda_\varepsilon$ görbe nyilván szubvertikális. A $\Lambda_\varepsilon$ fontos szerepet fog játszani a következő konstrukcióban.

Tekintsük az $(x_0, Y_0)$ vonalelemhez tartozó $T^\mu_{(x_0, Y_0)}$ *Minkowski*-tér $W_0(x_0, Y_0)$ vektorát. A $W_0$ vektoron egymás után három operációt hajtunk végre.

1. Eltoljuk $W_0$-t az $l_\varepsilon$ trajektória mentén párhuzamosan úgy, hogy közben $Y_0$ vonaleleme is párhuzamosan eltolódik. Jelöljük e művelet operátorát $\tau^*(l_\varepsilon)$-nal. Az eredményül kapott

$$(3.8) \qquad W'(\varepsilon) = \tau^*(l_\varepsilon) W_0$$

vektor támasztó eleme nyilván $[x(\varepsilon), Y'(\varepsilon)]$, azaz, $W'(\varepsilon) \in T^\mu_{(x(\varepsilon), Y'(\varepsilon))}$.

2. A (3. 8) vektorra alkalmazzuk a (3. 3) transzformáció inverzének $\exp(-\varepsilon x)'$ lineáris bővítését. A

$$(3.9) \qquad W_0(\varepsilon) = \exp(-\varepsilon X)' \tau^*(l_\varepsilon) W_0$$

vektor támasztó eleme $\big(x_0, Y_0(\varepsilon)\big)$ lesz (3. 5) alapján, tehát $W_0'(\varepsilon) \in T^\mu_{(x_0, Y_0(\varepsilon))}$.

3. Avégből, hogy a kiindulási $(x_0, Y_0)$ vonalelemben értelmezett vektorhoz jussunk, toljuk el párhuzamosan a (3. 9) vektort (rögzített $x_0$ centrum mellett) a (3. 7) alatt értelmezett $\Lambda_\varepsilon$ szubvertikális görbe $\Lambda_\varepsilon^{-1}$ inverz görbéje mentén. Mivel

$\Lambda_\varepsilon^{-1}$ végpontja $Y_0$, azért a

$$W_0(\varepsilon)=\tau(\Lambda_\varepsilon^{-1})\exp(-\varepsilon X)'\tau^*(l_\varepsilon)W_0 \tag{3.10}$$

vektor támasztó eleme az $(x_0, Y_0)$ vonalelem, azaz, $W_0(\varepsilon)\in T^{\mu}_{(x_0,Y_0)}$. Ezekután lehetőség nyílik $W_0$ és $W_0(\varepsilon)$ összehasonlítására, hiszen mindkét vektor a $T^{\mu}_{(x_0,Y_0)}$ vektortér eleme.

Jelöljük $\Sigma_\varepsilon$-nal a

$$\sum\nolimits_\varepsilon :\quad W_0\to\sum\nolimits_\varepsilon(W_0)=W_0(\varepsilon)=\tau(\Lambda_\varepsilon^{-1})\exp(-\varepsilon X)'\tau^*(l_\varepsilon)W_0$$

hozzárendelést, ahol

$$\Sigma_0(W_0) = W_0 \quad \text{(identikus leképezés).}$$

Képezzük a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[(\textstyle\sum_\varepsilon-\sum_0)(W_0)]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{W_0(\varepsilon)-W_0\}=\overline{W}_0$$

határértéket. Nyilván $\overline{W}_0\in T^{\mu}_{(x_0,Y_0)}$.

3. 1. TÉTEL. *A $W_0$ vektor nem más, mint*

$$\overline{W}_0=E(X)W_0=E^i_jW^j_0\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(x_0,Y_0)}=-(\hat{\nabla}_jX^i)W^j_0\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_0,$$

*tehát az a vektor, amelyet az $E(X)$ Minkowski-endomorfizmus rendel a $W_0$ vektorhoz.*

*Bizonyítás:* A tétel lokális jellege miatt legyen szabad ezúttal az igazolást is klasszikus eszközökkel végrehajtani. Ismeretes, hogy a párhuzamos eltolás differenciálegyenlete az $(x(t), y(t))$ görbe mentén

$$\frac{DW^i}{dt}=\frac{dW^i}{dt}+W^s\left(\Gamma^{*i}_{sk}\frac{dx^k}{dt}+C^i_{sk}\frac{\omega^k}{dt}\right)=0. \tag{3.11}$$

Másrészt a (3. 3) leképezés lokális koordinátarendszerben

$$\exp(tX)x_0 :\quad x^i(t)=x^i_0+tX^i+t0(t), \tag{3.12}$$

tehát az inverz transzformáció:

$$x^i_0=x^i(t)-tX^i+t0(t). \tag{3.13}$$

Az 1. lépés (analitikusan) abban áll, hogy megoldjuk a (3. 11) egyenletet az $\omega^i=0$ feltétel mellett. (Ez utóbbi annyit jelent, hogy a vonalelem párhuzamosan eltolódik $x(t)$ mentén.) A $W'(\varepsilon)$ lokális komponensei

$$[W'(\varepsilon)]^i=W^i_0-\varepsilon W^s_0\Gamma^{*i}_{sk}X^k+\varepsilon 0(\varepsilon).$$

A (3. 13) inverzének lineáris bővítését alkalmazva:

$$[W'_0(\varepsilon)]^i=\left(\delta^i_m-\frac{\partial X^i}{\partial x^m}\varepsilon+\varepsilon 0(\varepsilon)\right)(W^m_0-\varepsilon W^s_0\Gamma^{*m}_{sk}X^k+\varepsilon 0(\varepsilon))=$$

$$=W^i_0-\varepsilon\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^m}+\Gamma^{*i}_{mk}X^k\right)W^m_0+\varepsilon 0(\varepsilon)=$$

$$=W^i_0-\varepsilon X^i_{|m}W^m_0+\varepsilon 0(\varepsilon).$$

A harmadik lépésben a centrum rögzített, $\frac{dx^i}{dt} = 0$, a növekmény kiszámítása a $-\varepsilon C^i_{sk} W^s_0 X^k_{|0} \ldots$ mennyiséget eredményezi. Így tehát

$$[W_0(\varepsilon)]^i = [\tau(\Lambda_\varepsilon^{-1}) W_0'(\varepsilon)]^i = (W_0^i - \varepsilon X^i_{|m} W_0^m + \varepsilon 0(\varepsilon)) -$$

$$- \varepsilon C^i_{mk} W_0^m X^k_{|0} + \varepsilon 0(\varepsilon) = W_0^i - \varepsilon\{X^i_{|m} + C^i_{mk} X^k_{|0}\} W_0^m + \varepsilon 0(\varepsilon).$$

Következésképpen

$$[W_0(\varepsilon) - W_0]^i = -\varepsilon\{X^i_{|m} + C^i_{mk} X^k_{|0}\} W_0^m + \varepsilon 0(\varepsilon).$$

Végül is

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} [W_0(\varepsilon) - W_0]^i = -(X^i_{|m} + C^i_{mk} X^k_{|0}) W_0^m = [E(X) W_0]^i,$$

s ezzel tételünk bizonyítást nyert.

Vizsgáljuk a $\Sigma_\varepsilon :\ W_0 \to W_0(\varepsilon)$ endomorfizmus-sereget az esetben, ha az $X$ vektormező egyparaméteres lokális automorfizmus-csoportot generál. Ebben az esetben látni fogjuk, hogy a $\Sigma_\varepsilon$ maga is egyparaméteres lokális endomorfizmus-csoport a $T^\mu_{(x_0, Y_0)}$ térben.

A bizonyítás az alábbi lemmára támaszkodik.

3. 1. LEMMA. *Ha $Y_0$ a kezdő-vonalelem, akkor*

$$Y_0(\varepsilon + \varepsilon') = \exp(-\varepsilon' X)' \tau(l_{\varepsilon'}) \cdot Y_0(\varepsilon). \tag{3. 14}$$

Valóban,

$$Y_0(\varepsilon + \varepsilon') = \exp[-(\varepsilon + \varepsilon')X]' \tau(l_{\varepsilon+\varepsilon'}) Y_0.$$

A párhuzamos eltolás tulajdonsága miatt

$$Y_0(\varepsilon + \varepsilon') = \exp(-\varepsilon' X)' \cdot \exp(-\varepsilon X)' \tau[\exp(\varepsilon X) l_{\varepsilon'}] \tau(l_\varepsilon) Y_0. \tag{3. 15}$$

Mivel $X$ lokális automorfizmus, az $\exp(-\varepsilon X)'$ és a $\tau$ operációk felcserélhetők, tehát

$$\exp(-\varepsilon X)' \tau[\exp(\varepsilon X) l_{\varepsilon'}] = \tau(l_{\varepsilon'}) \exp(-\varepsilon X)'.$$

Ezt (3. 15)-be helyettesítve, éppen (3. 14)-et kapjuk eredményül. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk. Más megfogalmazásban

$$\Lambda_{\varepsilon+\varepsilon'} = \Lambda_\varepsilon \circ \Lambda_{\varepsilon'}, \tag{3. 16}$$

azaz az $\varepsilon + \varepsilon' \to \Lambda_{\varepsilon+\varepsilon'}$ szubvertikális görbét úgy kapjuk, hogy először $\Lambda_\varepsilon$-t írjuk le s ennek végpontjából kiindítjuk $\Lambda_{\varepsilon'}$-t.

A lemmára támaszkodva most már könnyen bizonyítható a

$$\sum\nolimits_\varepsilon = \tau(\Lambda_\varepsilon^{-1}) \exp(-\varepsilon X)' \tau(l_\varepsilon) \tag{3. 17}$$

egyparaméteres endomorfizmus-sereg csoport-tulajdonsága. Az (egyébként formális) bizonyítást mellőzzük.

Eddigi eredményeinket foglalja össze a

3. 2. TÉTEL. *Ha az X vektormező lokális automorfizmusok egyparaméteres csoportját generálja, akkor a* (3. 17) *alatti* $\Sigma_\varepsilon$ *leképezések, (bármely Minkowski-érintőtérben) egyparaméteres lokális csoportot alkotnak.*

Ezt a csoportot az $X$ mezőhöz tartozó egyparaméteres endomorfizmus-csoportnak nevezzük. A 3. 2. Tétel alapján e csoportot az $E(X)$ operátor segítségével a

$$W_0(\varepsilon) = \Sigma_\varepsilon(W_0) = \exp[\varepsilon E(X)]\, W_0$$

alakba írhatjuk.

Legyenek $\exp(tX_1)x$, illetve $\exp(tX_2)x$ lokális automorfizmus-csoportok. Akkor, természetes módon, az $x(t) = \exp(t[X_1, X_2])x$ csoport is lokális automorfizmusokból áll. (A Lie-féle csoportok általános elméletéből ismeretes, hogy ezek az egyparaméteres automorfizmus-csoportok az $A(h)$ automorfizmus-csoportot *generálják*, ha $A(h)$ összefüggő, egyébként $A(h)$ egységelemének komponensét.) Jelöljük a lokális automorfizmusokat generáló $X$ vektormezők *Lie*-algebráját $\underline{A}$-sal, s tekintsük az $\mathscr{E}_{\underline{A}} = \{E(X), X \in \underline{A}\}$ halmazt. Értelmezzük ebben a halmazban az $E(X_1)$, $E(X_2)$ elemek kommutátorát az

$$[E(X_1), E(X_2)]\, W = \{E(X_2) \circ E(X_1) - E(X_1) \circ E(X_2)\}\, W \tag{3. 18}$$

módon, ahol az $E(X_2) \circ E(X_1)$ kapcsolás úgy értendő, hogy először a $W$ vektor $E(X_1)\, W$ képét, majd ennek $E(X_2)$-képét vesszük. Az $\mathscr{E}_{\underline{A}}$ halmaz tehát *Lie-algebrát* alkot. A Lie-csoportok alaptételei szerint e Lie-algebrához egy, $\mathscr{E}_{\underline{A}}$-val jelzett, Lie-csoport tartozik, amelynek egyparameteres részcsoportjai nyilván a 3. 2. Tételben szereplő $\exp(tE(X))$ szimbólumú leképezések.

3. 2. DEFINÍCIÓ. Az $\mathscr{E}_{\underline{A}}$ Lie-csoportot az $\underline{A}$-algebrához tartozó *endomorfizmus-csoportnak* nevezzük.

Az $\mathscr{E}_{\underline{A}}$ csoport viselkedése szorosan összefügg a Finsler-nyaláb görbületi viszonyaival. Csupán technikai problémát jelent a következő tétel bizonyítása.

3. 3. TÉTEL. *Legyen* $X, Y \in \underline{A}$. *Akkor*

$$\Omega(X, Y) = E(X) \circ E(Y) - E(Y) \circ E(X) - E([X, Y]), \tag{3. 19}$$

*ahol* $E(X), E(Y), E([X, Y]) \in \mathscr{E}_{\underline{A}}$ *és*

$$\{\Omega(X, Y)\}^i_j = R^i_{jkl} X^k Y^l + S^i_{jkl} X^k_{|0} Y^k_{|0} + P^i_{jkl}(X^k Y^l_{|0} - Y^k X^l_{|0}).$$

*A* (3. 18) *jelöléssel* (3. 19) *így is írható:*

$$\Omega(X, Y) - [E(X), E(Y)] + E([X, Y]) = 0. \tag{3. 20}$$

A részletes bizonyítást, annak viszonylag egyszerű volta miatt mellőzzük.

## 4. Automorfizmusok Finsler-féle metrikus terekben

4. 1. DEFINÍCIÓ. A $Q$ Finsler-féle fibrált teret *Finsler-féle metrikus térnek** nevezzük, ha a $Q$ tér $V$ bázisterén adott az $\mathfrak{L}(x, y) > 0$, az $\mathfrak{L}(x, yz) = z\mathfrak{L}(x, y)$, $z \in R^+$, feltételt kielégítő függvény, az ún. *alapfüggvény*, amely eleget tesz az ismert

* [1].

Cartan-féle követelménynek: az $F=\frac{1}{2}\mathfrak{L}^2$ függvényből származtatott

$$g_{ij}(x, y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} \tag{4. 1}$$

koefficiensekkel képzett kvadratikus forma *pozitív definit.*

A (4. 1) által értelmezett metrikához *kanonikus módon* tartozik a $Q$ nyalábnak egy lineáris összefüggése. Az összefüggés $\Gamma^*$, ill. $C$ összefüggési objektumainak a $g_{ij}$ mennyiségekből való származtatása Cartan alapvető munkája alapján jól ismert.

4. 2. DEFINÍCIÓ. Az $M$ sokaság $\varphi: M \to M$ diffeomorfizmusát *mozgásnak* nevezzük, ha a $V$-n indukált $\varphi'$ leképezésre

$$F(\varphi(x), \varphi(y)) = F(x, y) \tag{4. 2}$$

teljesül. A mozgások a Finsler-tér automorfizmusai.

Könnyű kimutatni, hogy ha a *Finsler*-féle teret a kanonikus lineáris összefüggéssel látjuk el, akkor bármely mozgás egyúttal az $A(h)$ csoport eleme is, tehát affinitás.

Ismeretes, hogy a $\varphi_t$ lokális csoport *lokális mozgásokból* áll, ha

$$L(X)g_{ij} = 0 \tag{4. 3}$$

teljesül, ahol $X$ a $\varphi_t$-t generáló vektormező. Lokális koordinátákban a (4. 3) feltételek, (az ún. *Killing-egyenletek**) a

$$X_{i|j}+X_{j|i}+2C_{ijm}X^m_{|0}=0 \tag{4. 4}$$

alakban írhatók. Az előző pontban bevezetett $\hat{\nabla}_i$ negyedfajú kovariáns derivációsegítségével ezek az egyenletek az alábbi, igen egyszerű formára hozhatók:

$$\hat{\nabla}_i X_j+\hat{\nabla}_j X_i=0. \tag{4. 5}$$

Ugyanúgy, ahogyan ezt a 3. pontban tettük, értelmezhetjük, lokális mozgások esetén is az érintőtér endomorfizmusait a

$$W \to E(X)W: W_i \to -(\hat{\nabla}_m X_i)W^m$$

segítségével. Az $E(X)_{ij}$ komponensek bevezetésével átírhatjuk a Killing-egyenleteket az

$$E(X)_{ij}+E(X)_{ji} = 0 \tag{4. 6}$$

alakba. Igaz tehát az alábbi

4. 1. TÉTEL. *A Minkowski-féle érintőtér Killing-vektorokhoz tartozó endomorfizmusainak $E(X)_{ij}$ operátorai ferdén szimmetrikusak.*

Bizonyítjuk az alábbi állítást.

4. 2. TÉTEL. *Legyen $\psi_t$ lokális affinitás és tegyük fel, hogy az $(x_0, y_0)$ fix vonalelemben teljesül a* (4. 6) *reláció. (Azt mondjuk, hogy a $\psi_t$ leképezés izometrikus az $(x_0, y_0)$ pontban.) Akkor* (4. 6) *mindenütt teljesül, következésképpen $\psi_t$ a tér lokális mozgása.*

* [13].

*Bizonyítás:* Jelölje $E^i_j$ a lokális affinitáshoz tartozó $E(X)$ endomorfizmus komponenseit. Kiszámítva $E(X)^i_j = E^i_j$ invariáns differenciálját, az $(x(t), y(t))$ görbe mentén a

$$\frac{DE^i_j}{dt} = R^i_{jhs} X^s \frac{dx^h}{dt} + P^i_{jhs} X^s_{|0} \frac{dx^h}{dt} - \tag{4.7}$$
$$- P^i_{jsk} X^s \frac{Dy^h}{dt} + S^i_{jsh} X^s_{|0} \frac{Dy^h}{dt}$$

összefüggést kapjuk. Ez a reláció egyszerű következménye az $L(\tilde{X})\tilde{\omega}^i_j = 0$ definiáló egyenletnek. Mivel $\frac{Dg_{ij}}{dt} = 0$, azért (4. 7) bal oldala $\frac{DE_{ij}}{dt}$ alakban is írható. Ezt feltételezve adjuk (4. 7) bal oldalához a $\frac{DE_{ji}}{dt}$ kifejezést. A $R_{ijsh}$, stb. tenzorok ferde szimmetriája miatt a jobb oldalon zérust kapunk, tehát

$$\frac{DE_{ij}}{dt} + \frac{DE_{ij}}{dt} = \frac{D}{dt}(E_{ij} + E_{ji}) = \frac{DH_{ij}}{dt} = 0, \tag{4.8}$$

Felhasználva azt, hogy $E_{ij} + E_{ji} = 0$ az $(x_0, y_0)$ vonalelemben, továbbá azt, hogy a (4. 8) egyenlet részletesen kiírva a $Hi_j$ ismeretlen függvényekben lineáris, ezért $H_{ij} \equiv 0$. Ezzel a tétel bizonyítást nyert.

## 5. Záró megjegyzések

Tárgyalásainkat két probléma felvetésével zárjuk. Az egyik a lineáris összefüggés egzisztenciájával, a másik a holonomia-csoport fogalmával kapcsolatos.

5. 1 TÉTEL. *Bármely $Q$ Finsler-féle fibrált tér ellátható lineáris összefüggéssel, ha $Q$ a II. megszámlálhatósági axiómának eleget tesz.*

Ezt a tételt teljes részletességgel, több ok miatt, nem bizonyítjuk. A döntő ok az, hogy a bizonyítás során szükség van a fibrált terek általános elméletének mondhatni teljes apparátusára, beleértve a fibrált terek homotopia-elméletét is. A II. fejezet elején a fibrált tereknek csupán az értelmezésére tértünk ki, mellőznünk kellett a részletesebb bevezetést. Éppen ezért az alábbiakban vázolt *heurisztikus* gondolatmenet, ha nem is tekinthető 5. 1. szigorú bizonyításának, a követendő eljárás lényegére többé-kevésbé rámutat.

A $Q$ sokaság lineáris összefüggéseinek $H = \{h\}$ halmazáról kimutattuk, hogy konvex halmaz. Jelölje $H_q$ a $h_q = h|T_q$ leszűkítések halmazát: $H_q = \{h_q\}$. E halmazt kívánjuk elöljáróban kissé részletesebben tanulmányozni. Legyen $h_q$, $\bar{h}_q \in H_q$. Akkor, ha $q$ fix,

$$\bar{h}_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - h_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = [(\bar{\Gamma}^s_{ji} - \Gamma^s_{ji}) R^j_k] \frac{\partial}{\partial R^s_k},$$

$$\bar{h}_q\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) - h_q\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = [(\bar{C}^s_{ji} - C^s_{ji}) R^j_k] \frac{\partial}{\partial R^s_k}.$$

A zárójelben álló mennyiségek nyilván tenzorok, jelöljük ezeket rendre $G^s_{ji}$-vel, illetve $H^s_{ji}$-vel. Akkor nyilván

$$\bar{\Gamma}=\Gamma+G, \quad \bar{C}=C+H. \tag{5.1}$$

Ebből a relációból tehát azt kapjuk, hogy a $h_q$ lokális $\Gamma$, ill. $C$ komponenseinek ismeretében bármely más $\bar{h}_q \in H_q$ úgy áll elő, hogy $h_q$ megfelelő komponenseihez a $G$, illetve $H$ tenzorok komponenseit adjuk. A

$$\Lambda_q : \quad H_q \to R^{2n^3} \qquad (q \text{ fix}) \tag{5.2}$$

leképezést így értelmezzük:

$$h_q \to \{\Gamma^i_{sj} R^s_k, \ C^i_{sj} R^s_k\},$$

azaz $h_q$-nak az $R^{2n^3}$ térnek azt a pontját feleltetjük meg, amelynek derékszögű koordinátái éppen a zárójelben álló $2n^3$ számú (valamilyen sorrendet egyszer s mindenkorra rögzítve) mennyiségek. Az (5. 2) leképezés tehát $H_q$-nak $R^{2n^3}$ valamely részhalmazát felelteti meg, tehát a leképezés alapján $H_q$ topologikus térré tehető. Ha $\Lambda_q(h_q) \in R^{2n^3}$ ismert, akkor (5. 1) alapján bármely más $\bar{h}_q$ képét úgy kapjuk, hogy a $\Lambda_q(h_q)$ vektorhoz hozzáadjuk a $\{G, H\}$ koordinátájú vektorokat. Ez annyit jelent, hogy a $\Lambda_q(H_q)$ halmazon egy additív transzformáció-csoport (jelöljük $A^N$-nel) operál. Ha $h_q \in H_q$, jelentse $p$ a $p: h_q \to q$ projekciót. Összefoglalva: a $Q$ tér lineáris összefüggéseinek $H$ halmaza $\{H, Q, p, H_q, A^N\}$ szimbólumú fibrált térré tehető. Nevezzük ezt *összefüggés-nyalábnak*. Ebben a terminológiában akkor $Q$ valamely $h$ összefüggése nem más, mint egy

$$h : \quad Q \to H, \qquad q \to h_q \in H_q \tag{5.3}$$

ún. *keresztmetszet* [14]. Az egzisztencia-probléma tehát az (5. 3) alakú keresztmetszetek létezésével ekvivalens. Ezek (hangsúlyozzuk, *nagybani*) létezése a fibrált terek elméletének egyik központi problémája. Ismeretes azonban egy elég általános tétel [14], amely homotopiailag egyszerűen viselkedő fibrum esetén az egzisztenciát biztosítja. Szerencsére amiatt, hogy a $H_q$ halmaz az (5. 2) alapján valamely euklideszi tér konvex halmazával áll kapcsolatban, az említett általános egzisztencia-tétel követelései teljesülnek, hacsak a $Q$ bázistér a II. megszámlálhatósági axiómának eleget tesz. Ez viszont bekövetkezik, ha $M$ rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

A másik fontos probléma a holonomia-csoporttal kapcsolatos. Legyen $Q$ lineárisan összefüggő Finsler-nyaláb.

5. 1. DEFINÍCIÓ. A $Q$ tér $\Phi_q$ (homogén) *holonomia-csoportja* a $q$ pontban mindazon $\alpha \in GL(n, R)$ elemek halmaza, amelyekre a $q$ és $q\alpha$ pontok *horizontális úttal* összeköthetők.

Könnyű igazolni, hogy a $\Phi_q$ halmaz valóban csoport.

A definíció egyszerűsége ellenére e fogalommal kapcsolatosan problémáknak egész sora vetődik fel. Ezek egy része interpretációs jellegű, s akkor lépnek fel, ha a $Q$ teret $V$-re, s ennek megfelelően $T(Q)$-t a Minkowski-érintőtérre szűkítjük le. E leszűkített változatban bonyolultnak látszik a $\Phi_q$ holonomia-csoport *Lie*-algebrájának előállítása, ennek összefüggése az $\mathscr{E}_A$ endomorfizmus-csoport Lie-algebrájával stb. Ezekre vonatkozóan csak néhány speciális természetű részeredményt említhetnénk meg.

## IRODALOM


[1] CARTAN, É., *Les espaces de Finsler*, Hermann, Paris, 1934.
[2] CHEVALLEY, C., *Theory of Lie Groups I.*, Princeton, 1946.
[3] EHRESMANN, C., Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable., *Coll. de Topologie (Espaces fibrés)*, Bruxelles, 1951., 29–55.
[4] EHRESMANN, C., Introduction a la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, *Coll. Internat. de Géom. Différentielle*, Strasbourg, 1953.
[5] HU, SZE-TSEN, *Homotopy Theory*, Academic Press, New York, London, 1959.
[6] KOBAYASHI, S., Groups de transformations qui laissent invariante une connexion infinitésimale, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **238** (1954), 644–645.
[7] LICHNEROWICZ, A., *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Roma et Dunod, Paris, 1955.
[8] LICHNEROWICZ, A., *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958.
[9] MONTGOMERY, D.–ZIPPIN, *Topological Transformation Groups*, Interscience Publ., New York, 1955.
[10] NOMIZU, K., *Lie Groups and Differential Geometry*, Math. Soc. of Japan, 1956.
[11] OTSUKI, T., Theory of affine connections of the space of tangent directions of a differentiable manifold I–II., *Math. J. Okayama Univ.* 7 (1957), 1–74.
[12] RUND, H., *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer, Berlin, 1959.
[13] SOÓS, GY., Über Gruppen von Affinitäten und Bewegungen in Finslerschen Räumen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (1954), 73–84.
[14] STEENROD, N. E., *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton, 1951.
[15] VARGA, O., Affinzusammenhängende Räume von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math.* **1** (1949), 1–17.
[16] YANO, K., *The Theory of Lie Derivatives and its Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1957.

## A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

# KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEKRŐL (II)*

Írta: A. SZ. KRONROD

### 3. §. Monoton függvények

A monoton függvény fogalmának intuitív tartalma abban áll, hogy az argumentumot „bizonyos irányban" megváltoztatva a függvény növekszik (illetve fogy). Egyenes vonalon értelmezett függvények esetén létezik ilyen „természetes irány". Már a körvonalon, vagy mondjuk, egy olyan kontinuumon értelmezett függvények esetében azonban, amely egy közös végponttal rendelkező három szakaszból áll, be kell vezetnünk a *pontra vonatkozó* monotonitás fogalmát. Ugyanez a helyzet a négyzeten vagy kétdimenziós gömbfelületen megadott függvényeknél (és akkor is, ha az értelmezési tartomány dimenziója még nagyobb).

Ebben az esetben természetes dolog azt mondani, hogy az $F(\eta)$ függvény a $\xi$ pontra nézve monoton növekedő, ha az $\eta$ pont $\xi$-től való „távolodásakor" az $F(\eta)$ mennyiség növekszik. Minden azon múlik, hogyan vezetjük be az $\eta$ pont $\xi$-től való távolodásának fogalmát.

12. definíció. Az $F(\eta)$ folytonos függvényt (a $\xi$ pontra nézve) *monoton növekedőnek* nevezzük, ha mindegyik nívóhalmazának mindegyik reguláris komponense növekedési komponens, kivéve esetleg a $\xi$ pontot tartalmazót.

Az $F(\eta)$ folytonos függvényt (a $\xi$ pontra nézve) *monoton fogyónak* nevezzük, ha mindegyik nívóhalmazának mindegyik reguláris komponense fogyási komponens, kivéve esetleg a $\xi$ pontot tartalmazót.

A megadott definíció magának az $F(\eta)$ függvénynek az értelmezési tartományában bevezethető következő „földrajznak" felel meg: az $\eta$ pont „közelebb" van $\xi$-hez, mint $\zeta$-hoz, ha az $\eta$ pontot tartalmazó nívóhalmaz-komponens a $\xi$, $\zeta$ pontokat elválasztja. Magától értetődően előfordulhat, hogy az $\eta$, $\zeta$ pontok „összehasonlíthatatlanok". A következő segédtétel igazolja az elmondottakat:

16. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos, a $\xi$ pontra nézve monoton növekedő (illetve fogyó) függvény. Akkor $F(\eta)$ bármely reguláris komponensének belső karakterisztikája az $F^*(\eta)$ függvény abszolút minimumot (illetve maximumot) szolgáltató komponense.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel az állítás ellenkezőjét. Az $F(\eta)$ függvény meghatározottság kedvéért legyen növekedő. Legyen $K$ a $t$ nívó olyan reguláris komponense, amelyre a $K^*$ belső karakterisztika az $F^*(\eta)$ függvénynek nem abszolút minimumot

* Успехи математических Наук, Том V, Выпуск 1 (35), 24—134. A fordítás első része a *MTA III. Osztály Közleményei* 13 (1962) 361—386. oldalán jelent meg, és tartalmazza a Függelék című fejezetet és a teljes irodalomjegyzéket, valamint az eredeti cikk I. fejezete 1—2. §-át.
A most közölt rész az I. fejezet 3—5. §-át és teljes II. fejezetét öleli fel.

szolgáltató komponense. Legyen $J_1$ és $J_2$ az a két tartomány, amelyre $K$ szétválasztja $J$-t, és legyen $\xi \in J_1$. Akkor található olyan $\zeta$ pont $J_2$-ben, hogy $F(\zeta) < t$. Olyan komponensek, amelyek a $J$ tartományt kettőnél több részre osztják, legfeljebb megszámlálhatóan sok nívóhalmazban fordulnak elő, tehát választhatunk olyan $t'$ számot $\left(F(\zeta) < t' < t\right)$, hogy az $E_{t'}$ nívóhalmaz ne tartalmazzon ilyen komponenst. A $\zeta$ pontot a $t'$ nívó elválasztja $K$-tól és így $E_{t'}$ bizonyos komponensei elválasztják a $\zeta$ pontot $K$-tól. Legyen $L$ az $E_{t'}$ halmaz említett komponensei közül a $K$-hoz legközelebbi (ennek létezését a 9. segédtétel biztosítja). A $t'$ érték megválasztása folytán az $L$ komponens reguláris. Tekintsük az $L$ komponens $L^{**}$ külső karakterisztikáját. Az 1. tétel szerint $L^{**}$ vagy félmaximumot szolgáltató komponens vagy félminimumot szolgáltató komponens, vagy pedig koncentrikus szingularitású komponens. A második és harmadik esetet kizárja az a feltevés, hogy az $F(\eta)$ függvény monoton növekedő.

Tehát $L^{**}$ félmaximumot szolgáltató komponens. De a $K$-hoz megszerkesztett $F^*(\eta)$ függvény $t'$ nívójának a $\xi, \zeta$ pontokat elválasztó komponensei közül $L$ a $\xi$-hez *legközelebbi*, és a 10. segédtétel szerint az $L^{**}$ külső karakterisztikának félminimumot szolgáltató komponensnek kell lennie, mert $t' < t = F(\xi)$.

A nyert ellentmondással a segédtételt bebizonyítottuk.

A bizonyítást arra az esetre, amikor $F(\eta)$ monoton fogyó függvény, a $-F(\eta)$ függvény vizsgálatával kapjuk.

A 16. segédtételből következik, hogy ha $F(\eta)$ a $\xi$ pontra nézve monoton növekedő függvény és a $\zeta$ pont a fent bevezetett értelemben messzebb van $\xi$-től, mint az $\eta$ pont, akkor $F(\zeta) \geqq F(\eta)$. Sőt, a segédtételt élesíteni is lehet annak megmutatásával, hogy ebben az esetben $F(\zeta) > F(\eta)$. Valóban, legyen $K$ az $\eta$ pontot tartalmazó komponens, és tegyük fel, hogy a $\zeta \notin K$ pontot $K$ elválasztja $\xi$-től.

Ha $F(\xi) = t = F(\eta)$, akkor a 11. segédtétel szerint található valamely $t' \neq t$ nívóhoz tartozó $K'$ komponens, amely a $\zeta$ pontot elválasztja $\eta$-tól és ugyanakkor $\xi$-től is. De a 16. segédtétel folytán $t' < t$ lehetetlen. Továbbá, ha $t' > t$, akkor a 16. segédtételben a $K'$ komponenst választva $K$ gyanánt, ismét ellentmondásra jutunk, ugyanis $F(\zeta) = t < t'$. Ennélfogva $F(\zeta) \neq t$, és így bebizonyítottuk a következőt:

16'. SEGÉDTÉTEL. *A* 16. *segédtétel feltételei mellett az* $F^*(\eta)$ *függvény bármely belső karakterisztikán kívül határozottan nagyobb (illetve kisebb), mint magán a karakterisztikán.*

Az egydimenziós fa segítségével egyszerűen le lehet írni az adott $\xi$ pontra nézve monoton függvény fogalmát. Nyilvánvaló, hogy *az* $F(\eta)$ *függvény a* $\xi$ *pontra nézve monoton növekszik (fogy), ha bármely* $T_F$*-beli és* $l_\xi$ *végpontú egyszerű íven az* $F^*(l)$ *függvény* $l_\xi$ *felől tekintve monoton növekszik (illetve fogy).*

A 7. tételből következik, hogy ez a megfelelés kölcsönös.

Bebizonyítunk egy tételt, amely egyszerű szükséges és elégséges feltételt ad az $F(\eta)$ függvény monotonitására.

E tétel kimondásáért köszönettel tartozunk A. Filippovnak.

8. TÉTEL. *Az* $F(\eta)$ *függvény monoton voltának szükséges és elégséges feltétele:*

A) *Monoton növekedő* $F(\eta)$ *esetén az* $\underline{M}_{t_0} = \sum\limits_{t \leqq t_0} E_t$ *Lebesgue-halmaz összefüggő volta minden* $t_0$ *érték mellett.*

B) *Monoton fogyó* $F(\eta)$ *esetén az* $\overline{M}_{t_0} = \sum_{t \geq t_0} E_t$ *Lebesque-halmaz összefüggő volta bármely* $t_0$ *értékre.*

BIZONYÍTÁS. Először bebizonyítjuk az A) feltétel szükségességét. Tegyük fel, hogy az $F(\eta)$ függvény monoton növekszik a $\xi$ pontra nézve. Akkor a $T_F$ fán az $F^*(l)$ függvény minden $l_\xi$ végpontú $\sigma$ egyszerű íven monoton növekszik $l_\xi$-re nézve. Minden ilyen $\sigma$ íven a $\tau_F(\underline{M}_{t_0})$ halmaz egy $l_\xi$ végpontú $\sigma'$ egyszerű ívet alkot. Az összes $\sigma'$ ívek összege egy $R_{t_0}$ kontinuum. Akkor $\tau^{-1}(R_{t_0})$ kontinuum a $J$ térben és az $\underline{M}_{t_0} = \tau^{-1}(R_{t_0})$ halmaz tetszés szerinti $t_0$ mellett összefüggő.

Most bebizonyítjuk, hogy az A) feltétel elégséges. Tegyük fel, hogy a $\xi$ pontban az $F(\eta)$ függvény minimumot ér el. Legyen $K \neq K_\xi$ olyan reguláris komponens, amely nem növekedési komponens $\xi$-re nézve. Akkor van olyan $l_\xi$, $l_\zeta$ végpontokkal rendelkező $\sigma$ egyszerű ív, amelynek az $l_0 = \tau_F(K)$ pont belső pontja és amelyen $l_0$ az $F^*(l)$ függvénynek nem növekedési pontja. Ezek szerint vagy az $l_\xi l_0$ íven található olyan $l_1$ pont, amelyre $F^*(l_1) > F^*(l_0)$, vagy az $l_0 l_\zeta$ íven található olyan $l_2$ pont, amelyre $F^*(l_2) < F^*(l_0)$. Az első esetben a $K_1 = \tau^{-1}(l_1)$ komponens elválasztja a $\xi$ és a $\varkappa \in K$ pontot és az $\underline{M}_{F(\varkappa)}$ halmaz nem összefüggő (ugyanis $\xi, \varkappa \in \underline{M}_{F(\varkappa)}$), a második esetben a $K$ komponens elválasztja a $\xi$ és a $\lambda \in \tau^{-1}(l_2)$ pontot és az $\underline{M}_{F(\lambda)}$ halmaz nem összefüggő. Ily módon az A) feltétel szükséges és elégséges voltát bebizonyítottuk. Az $F(\eta)$ függvényről áttérve a $-F(\eta)$ függvényre nyerjük a B) feltétel szükségességét és elégségességét. A 8. tételt bebizonyítottuk.

A 8. tételből speciálisan következik azon nívóhalmazok összefüggő volta, ahol a monoton növekedő (fogyó) függvény minimumot (illetve maximumot) ér el. A 8. tételből következik továbbá, hogy ha az $F(\eta)$ függvény monoton növekszik a $\xi$ pontra nézve és ugyanakkor monoton fogy a $\zeta$ pontra nézve, akkor e függvény mindegyik nívóhalmaza összefüggő. Valóban, ha a $t$ nívó tartalmaz két különböző $K_1$, $K_2$ komponenst, akkor a 11. segédtétel szerint ezeket vagy a $t+\delta$, vagy a $t-\delta$ $(\delta > 0)$ nívónak valamelyik komponense elválasztja. Az első esetben $\underline{M}_t$, a másodikban pedig $\overline{M}_t$ nem összefüggő.

## 4. §. A Hausdorff-féle lineáris mérték. Nívóhalmazok hosszúsága

Ha a síkbeli $P$ kontinuum egyszerű ív, akkor $P$ hosszúságának a fogalmát nehézség nélkül bevezethetjük: felveszünk a $P$ íven tetszés szerinti olyan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ véges pontsorozatot, hogy $a_s$ a $P$ íven tekintve elválasztja az $a_{s-1}$, $a_{s+1}$ pontokat. Továbbá képezzük azt a poligont, amelynek egymás után következő szögpontjai $a_0, a_1, \ldots, a_n$, és az összes ilyen poligonok hosszúságának felső határát választjuk $P$ hosszúságának. Továbbá, ha $P$ véges számú egyszerű ívből álló kontinuum, akkor könnyen előállítható véges számú közös ponttal rendelkező $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ egyszerű ívek összegeként. Ebben az esetben természetes dolog a $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ívek hosszúságának összegét tekinteni $P$ hosszúságának. Ha a $P$ kontinuum lokálisan összefüggő, akkor $P$ hosszúságának vehetjük $P$ mindazon $P'$ részkontinuumai hosszúságának felső határát, amelyek véges számú egyszerű ívből állnak. Ha a kontinuum nem lokálisan összefüggő, akkor meg kell változtatnunk a hosszúság definícióját.

A jelen nehézségek azonban csak akkor merülnek fel, amikor áttérünk a nem összefüggő halmazok hosszúságának bevezetésére. A mi feladatunkhoz nem tartozik hozzá a hosszúság fogalmának általános vizsgálata. Az e kérdés iránt érdeklődő olvasónak figyelmébe ajánljuk például A. N. KOLMOGOROV [5] munkáját. Számunkra a halmazok hosszúsága kisegítő, de szükséges fogalom a kétváltozós függvények és nívóhalmazaik tanulmányozásánál. Ezért ebben a részben kissé lerövidítjük a tárgyalást és nem ismételjük el néhány fontos, de jól ismert, és könynyen hozzáférhető tankönyvekben kifejtett tétel bizonyítását.

Az $R_n$ euklideszi térben *Carathéodory*-féle külső mértéknek nevezünk minden olyan $\nu(E)$ $(E \subset R_n)$ halmazfüggvényt, amelyre teljesül az alábbi három feltétel:

1. $\nu(E) \geqq 0$ (esetleg $\nu(E) = +\infty$).

2. Ha az $E_1, E_2$ halmazok egymástól $d > 0$ távolságra vannak, akkor $\nu(E_1 + E_2) = \nu(E_1) + \nu(E_2)$.

3. Tetszés szerinti $E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ halmazokra

$$\nu(\sum_n E_n) \leqq \sum_n \nu(E_n).$$

Megjegyezzük, hogy sokkal általánosabb terek halmazaira is lehet *Carathéodory*-féle külső mértéket értelmezni, de számunkra teljesen elegendők a síkbeli halmazokon értelmezett külső mértékek.

13. definíció. Az $E$ halmazt *ν-mérhetőnek* nevezzük, ha tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ és $N$ értékhez $\nu(E) < +\infty$ esetén található olyan $F \subset E$ zárt halmaz, hogy $\nu(E) - \nu(F) < \varepsilon$, $\nu(E) = +\infty$ esetén pedig olyan $F \subset E$ zárt halmaz, amelyre $\nu(F) > N$.

A *Borel*-halmazok bármely *Carathéodory*-féle külső mértékre nézve mérhetők a 13. definíció szerinti értelemben. A *Borel*-halmazok összességén bármely *Carathéodory*-féle külső mérték teljesen additív. Ezen tételek bizonyítását az olvasó megtalálhatja SAKS „*Theory of the integral*" című [6] könyvében.

Mi egy konkrét *Carathéodory*-mértéket fogunk használni, a *Hausdorff*-féle lineáris mértéket.

14. definíció. Legyen $E$ valamely síkbeli ponthalmaz és legyen $\sigma_\varepsilon$ $\varepsilon$-nál nem nagyobb sugarú körökből álló és az $E$ halmazt lefedő rendszer. Jelentse $\nu(\sigma_\varepsilon)$ a $\sigma_\varepsilon$-hoz tartozó körök átmérőinek összegét. Legyen $\nu_\varepsilon(E) = \inf \nu(\sigma_\varepsilon)$, ahol az alsó határ az összes lehetséges $\sigma_\varepsilon$ rendszerekre képezendő. A $\nu(E) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \nu_\varepsilon(E)$ számot az $E$ halmaz Hausdorff-féle külső lineáris mértékének nevezzük (előfordulhat, hogy $\nu(E) = +\infty$).

A $\nu_\varepsilon(E)$ számot a $\nu(E)$ *Hausdorff*-féle külső lineáris mérték $\varepsilon$-közelítésének nevezzük. Ha az $E$ halmaz mérhető ezen külső mérték szerint, akkor a $\nu(E)$ számot egyszerűen $E$ (*Hausdorff*-féle) lineáris mértékének nevezzük. A lineáris mértéket néha a halmaz hosszúságának fogjuk nevezni.

A *Hausdorff*-féle külső lineáris mértékre majdnem triviálisan teljesül a *Carathéodory*-féle mérték mindhárom definiáló tulajdonsága.

Tehát *minden Borel-halmaz lineárisan mérhető Hausdorff szerint, és ha* $E_1, E_2, \ldots$ *egymást páronkint nem metsző Borel-halmazok, akkor*

$$\nu(\sum_n E_n) = \sum_n \nu(E_n).$$

Mostantól kezdve $\nu(E)$-vel a síkbeli $E$ halmaz *Hausdorff*-féle lineáris mértékét fogjuk jelölni.

Tegyünk néhány egyszerű megjegyzést az általunk bevezetett lineáris mértékre vonatkozóan.

17. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $K$ valamely $d$ átmérőjű kontinuum. Akkor $\nu(K) \geqq d$, sőt, $\nu_\varepsilon(K) \geqq d$ tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ értékre.*

A bizonyítás abból következik, hogy a $K$ kontinuumnak körökkel való bármely $\sigma$ lefedésénél az átmérők összege $\geqq d$, mert ha $a$ és $b$ a $K$ kontinuum pontjai és $|a, b| = d$, akkor a $\sigma$-hoz tartozó köröknek az $[a, b]$ szakaszra való vetülete ezt az egész szakaszt lefedi.

9. TÉTEL. *Egyszerű ív vagy topológikus kör Hausdorff-féle lineáris mértéke egyenlő közönséges értelemben vett hosszúságával. Lokálisan nem összefüggő kontinuum Hausdorff-féle lineáris mértéke végtelen.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ az $L$ egyszerű ív pontjainak olyan sorozata, hogy $a_s$ elválasztja az $a_{s-1}$, $a_{s+1}$ pontokat. Akkor az $L$ egyszerű ív $a_s$-től $a_{s+1}$-ig terjedő szakaszának átmérője legalább $|a_s, a_{s+1}|$, tehát $\nu(L) \geqq \sum_{s=1}^{n} |a_s, a_{s-1}|$, amiből következik, hogy a Hausdorff-féle lineáris mérték nem kisebb, mint az $L$ ív szokásos értelemben vett $|L|$ hosszúsága.

Másrészt legyen $L$ hosszúsága $\mu < +\infty$, továbbá legyen $\varepsilon > 0$ tetszés szerinti szám, az $n$ természetes szám pedig olyan nagy, hogy $\frac{\mu}{2n} < \varepsilon$. Válasszunk az $L$ íven olyan $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ pontokat, hogy $L$ hosszúsága $a_s$ és $a_{s+2}$ között $\frac{\mu}{2n}$ legyen. Az $a_1, a_3, a_5, \ldots$ pontok mint középpont körül rajzoljunk $\frac{\mu}{2n}$ sugarú köröket. E körök összege lefedi az $L$ ívet, mindegyikük sugara $< \varepsilon$, és átmérőik összege $\mu$. Ebből következik, hogy $\nu_\varepsilon(L) \leqq |L|$ tetszés szerinti $\varepsilon$-ra, és így $\nu(L) = |L|$.

Most megmutatjuk, hogy ha $K$ lokálisan össze nem függő kontinuum, akkor $\nu(K) = +\infty$. Valóban, tegyük fel, hogy az $a \in K$ pontban $K$ nem lokálisan összefüggő. Akkor található olyan $a$ középpontú $S$ kör, hogy $a$ bármely környezetének legalább egy pontja az $S \cap K$ halmaznak más komponensében fekszik, mint $a$. Innen következik, hogy található az $S \cap K$ halmaz páronkint különböző komponenseiből álló $K_1, K_2, \ldots$ sorozat, amelynek elemeiből alkalmasan kiválasztva egy-egy pontot, a kapott pontsorozat $a$-hoz tart. JANISZEWSKI tétele szerint mindegyik $K_s$ komponensnek van torlódási pontja $S$ határán, és így elég nagy $s_0$ indextől kezdve minden $K_s$ komponens átmérője meghaladja az $S$ kör átmérőjének egyharmadát.

A 17. segédtételből és a lineáris mérték additív voltából következik, hogy $\nu(K) = +\infty$.

Most áttérünk a folytonos függvények nívóhalmazai hosszúságának a vizsgálatára. $\nu(E_t)$ helyett gyakran a $\nu(t)$ jelölést fogjuk használni. Alapvető feladatunk annak a megmutatása, hogy majdnem minden $t$ nívóra a $\nu(t)$ nívóhalmaz-hosszúság egyenlő e nívó reguláris komponensei hosszúságának összegével.

18. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $M \subset J$ zárt halmaz. Legyen $M'$ azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek az $M$ halmaznak valamelyik, a $J$ tartományt szét nem választó komponenséhez tartoznak. Az $M'$ halmaz $G_\delta$ típusú.*

BIZONYÍTÁS. Jelöljük $M_\varepsilon$-nal mindazon $K \subset M$ komponensek pontjainak halmazelméleti összegét, amelyek mindegyikéhez található két $\varepsilon$ sugarú, a $K$ komponens által egymástól elválasztott és az $M$ halmazt nem metsző nyílt kör, $Q_1$ és $Q_2$. Az $M_\varepsilon$ halmaz zárt. Továbbá minden a $J$ tartományt szétválasztó $K$ komponens elég kis $\varepsilon$ érték mellett hozzátartozik $M_\varepsilon$-hoz. Következésképpen $M' = M - \sum_n M_{\frac{1}{n}}$, ebből viszont következik, hogy az $M'$ halmaz $G_\delta$ típusú.

19. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény, $E_t$ e függvény valamely nívóhalmaza és $\overset{\circ}{M}$, $\overset{+}{M}$, $\overset{-}{M}$ az $E_t$ halmaz összes koncentrikus szingularitású komponenseihez, összes félmaximumot szolgáltató komponenseihez, illetve összes félminimumot szolgáltató komponenseihez tartozó pontok összessége. Akkor $\overset{\circ}{M}$, $\overset{+}{M}$ és $\overset{-}{M}$ Borel-mérhető halmazok.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\overset{\circ}{M}(\delta, \varrho)$ azon $K \subset E_t$ komponensek egyesítése, amelyek mindegyikéhez található egy $K' \subset E_t$ komponens úgy, hogy $K'$ elválasztja a vizsgált $K$ komponenst a $K$ komponens $\delta$-környezetének kiegészítő halmazától, és a $K$, $K'$ komponenseket az $E_{t+\varrho}$ halmaz elválasztja egymástól; legyen továbbá $M$ a $J$ tartományt szét nem választó $E_t$-beli komponensek egyesítése.

Megmutatjuk, hogy $\overset{\circ}{M}(\delta, \varrho)$ tetszés szerinti $\delta > 0$ és $\varrho > 0$ érték mellett zárt halmaz. Valóban, legyen $K_n \subset \overset{\circ}{M}(\delta, \varrho)$, $n = 1, 2, \ldots$. Legyen az $a$ pont a $\{K_n\}$ sorozatra nézve torlódási pont. Legyen $K \ni a$ az $E_t$ nívóhalmaz komponense. Minden $K_n$-hez található egy $K_n'$ komponens. Válasszuk ki a természetes számok olyan $\{n_s\}$ részsorozatát, hogy $\underline{\mathrm{lt}}_s\, K_{n_s}' \neq 0$. Akkor a $\tilde{K} = \overline{\mathrm{lt}}_s\, K_{n_s}'$ halmaz kontinuum. Megmutatjuk, hogy a $K' \supset \tilde{K}$ komponens elválasztja a $K$ halmazt $K$ $\delta$-környezetének kiegészítő halmazától. Legyen $U$ a $K$ halmaz $\delta$-környezete és $b \in C\overline{U}$. Legyen $L \ni b$ a $K$ halmazt metsző kontinuum. Fennáll $\varrho(b, K) = \theta > \delta$. Vezessük be a $\delta_1 = \frac{\theta - \delta}{2}$ jelölést. Elég nagy $s$-re minden $K_{n_s}$ benne van a $K$ komponens $\delta_1$-környezetében. Ennélfogva bizonyos $s$-től kezdve $\varrho(K_n, b) > \delta$ és így $K_{n_s}' \cap L \neq 0$. De akkor $\overline{\mathrm{lt}}_s\, K_{n_s} \cap L \neq 0$ is fennáll, vagyis bármely $L$ kontinuum metszi a $K \subset K'$ halmazt, azaz $K'$ elválasztja egymástól a $K$ és a $C\overline{U}$ halmazt, ebből pedig könnyen következik, hogy $K'$ elválasztja $K$-t és $CU$-t is.

Tegyük fel, hogy a $t_n + \varrho$ nívó $K_n''$ komponense elválasztja a $K_n$, $K_n'$ komponenseket. Legyen a természetes számok $\{n_s\}$ részsorozata már olyan ritka, hogy $\mathrm{lt}_s\, K_{n_s}'' \neq 0$. Legyen $K''$ az $E_{t+\varrho}$ halmaznak az $\overline{\mathrm{lt}}_s\, K_{n_s}''$ halmazt tartalmazó komponense. Akkor teljesen hasonlóan ahhoz, ahogy az imént eljártunk, be lehet bozonyítani, hogy $K''$ elválasztja a $K$ és a $K'$ komponenst. Tehát $\overset{\circ}{M}(\delta, \varrho)$ zárt halmaz. Nyilvánvaló azonban, hogy

$$\overset{\circ}{M} = \prod_k \sum_l \overset{\circ}{M}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{l}\right) \cap M' + \prod_k \sum_l \overset{\circ}{M}\left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{l}\right) \cap M',$$

vagyis $\overset{\circ}{M}$ legfeljebb a második Borel-osztályba tartozik.

Most bebizonyítjuk, hogy $\overset{+}{M}$ is *Borel*-halmaz. Jelölje $\overset{+}{E}(r, \theta, \varepsilon)$ azon $K \subset E_t$ komponensek egyesítését, amelyek mindegyikéhez található az alábbi tulajdonságokkal rendelkező $L$ kontinuum:

a) $F(\eta) \leqq t - \varepsilon$ ha $\eta \in L$;

b) $L$ metszi az $\bar{U}_r$ halmazt, ahol $U_r$ a $K$ komponens $r$-környezete;

c) $L$ tartalmaz olyan $b$ pontot, hogy $F(b) \leqq t - \theta$.

Az $\overset{+}{E}(r, \theta, \varepsilon)$ halmazok bármely $r > 0$, $\theta > 0$, $\varepsilon > 0$ mellett zártak. Valóban, legyen $a$ az $\overset{+}{E}(r, \theta, \varepsilon)$ halmazból vett $\{a_n\}$ pontsorozat torlódási pontja. Legyen $K_n$ az $E_{t_n}$ halmaznak az $a_n$ pontot tartalmazó komponense. Legyen $L_n$ a $K_n$-nek megfelelő kontinuum. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\underset{n}{\underline{\mathrm{lt}}}\, L_n \neq 0$. Legyen $L = \underset{n}{\overline{\mathrm{lt}}}\, L_n$. Az $L$ kontinuumra nyilvánvalóan teljesülnek az a), b), c) tulajdonságok (a $K \ni a$ komponensre vonatkozóan). Vezessük be az

$$\overset{+}{E}{}^* = \sum_l \prod_k \sum_m \overset{+}{E}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{l}, \frac{1}{m}\right) \cap M'$$

jelölést.

Megmutatjuk, hogy $\overset{+}{E}{}^* = \overset{+}{E}$. Az $\overset{+}{E} \subset \overset{+}{E}{}^*$ tartalmazás nyilvánvaló.

Bebizonyítjuk, hogy $\overset{+}{E}{}^* \subset \overset{+}{E}$. Legyen $\zeta \in \overset{+}{E}{}^*$ és $K$ az a komponens, amelyben $\zeta$ fekszik. Található olyan $l$, hogy a $\theta_0 = \frac{1}{l}$ jelöléssel

$$\zeta \in \prod_k \sum_m \overset{+}{E}\left(\frac{1}{k}, \theta_0, \frac{1}{m}\right).$$

Továbbá található a kontinuumoknak olyan $\{L_k\}$ sorozata, hogy $L_k$-nak van olyan $b_k$ pontja, amelyre $F(b_k) \leqq t - \theta_0$, ezenfelül $L_k$ metszi a $K$ komponens $\frac{1}{k}$-környezetét, és az $L_k$ kontinuumon mindenütt fennáll $F(\eta) < t$. Legyen $\{\zeta_k\}$ az $L_k$ halmazok pontjaiból álló sorozat, amely tart egy $\zeta_0 \in K$ ponthoz. A $\zeta_k$ pontok között vagy található olyan, amelyet az $E_t - K$ halmazt nem metsző $L$ kontinuum összeköt $K$-val, vagy mindegyik $\zeta_k$ pontot egy $C_k \subset E_t - K$ komponens elválasztja $K$-tól. Az első esetben $K$ definíció szerint félmaximumot szolgáltató komponens. A második eset nem lehetséges. Valóban, a $\{C_k\}$ sorozatra $\zeta_0 \in \underset{k}{\underline{\mathrm{lt}}}\, C_k$. A $C = \underset{k}{\overline{\mathrm{lt}}}\, C_k$ topológiai limes superior összefüggő, ezért $C \subset K$. De ha így áll a dolog, akkor tetszés szerinti $\delta > 0$ számhoz található olyan nagy $N$ szám, hogy $C_N \subset U_\delta$, ahol $U_\delta$ a $K$ komponens $\delta$-környezete. Legyen a $\delta > 0$ szám olyan kicsiny, hogy az $U_\delta$ halmazon $F(\eta) \geqq t - \frac{\theta_0}{2}$ és $U_\delta$ nem választja szét az $E_{t-\theta_0}$ halmaz pontjait ($K$ nem választja szét a $J$ tartományt, mert $K \subset M'$). Akkor $C_N$, amely elválasztja a $\zeta_N$ pontot és a $K$ halmazt, a $K$ halmazt $b_N$-től is elválasztja. De $U_\delta$ és a fortiori a $C_N \subset U_\delta$ halmaz nem választja szét a $b_N$, $b_s$ pontokat egyetlen $s$-re sem. Ennélfogva a $C_N$ komponens mindegyik $L_s$ kontinuumot elválasztja $K$-tól. Ez azonban elég nagy $s$ értékekre ellentmond annak a feltételnek, hogy $L_s$ metszi a $K$ komponens $\frac{1}{s}$-környezetét. Ezzel az $\overset{+}{E}=\overset{+}{E}{}^*$ egyenlőséget és egyben $\overset{+}{M}$ Borel-mérhetőségét bebizonyítottuk.

Végül $\overset{-}{M} = M' - \overset{\circ}{M} - \overset{+}{M}$, és így $\overset{-}{M}$ szintén Borel-halmaz.

A továbbiakban az $E_t$ nívóhalmaz azon részhalmazaira, amelyek a félmaximumot szolgáltató, félminimumot szolgáltató, illetve koncentrikus szingularitású komponensekhez tartozó pontokból állnak, rendre az $\overset{+}{E}_t$, $\overset{-}{E}_t$, ill. $\overset{\circ}{E}_t$ jelölést fogjuk használni.

Most bebizonyítjuk, hogy ha az adott $E_t$ nívónak megfelelő $\overset{\circ}{E}_t$ ponthalmaz lineáris mértéke különbözik nullától, akkor ezen $E_t$ nívó szétválasztó komponenseinek összhosszúsága $+\infty$. Ehhez fel fogjuk használni adott halmaz *pszeudo-átmérőjének* kisegítő fogalmát.

15. definíció. Legyen $E$ a sík vagy a gömbfelület tetszés szerinti halmaza, $\sigma(E)$ pedig köröknek olyan rendszere, amely lefedi az $E$ halmazt. Jelöljük a $\sigma(E)$ rendszerhez tartozó körök átmérőinek összegét $v[\sigma(E)]$-vel. Legyen $\underline{v}(E) = \inf v[\sigma(E)]$, ahol az alsó határ az *összes lehetséges* $\sigma(E)$ rendszerekre képezendő. A $\underline{v}(E)$ számot az $E$ halmaz *pszeudo-átmérőjének* nevezzük.

*Megjegyzés.* Ha $v(E) > 0$, akkor $v(E) \geqq \underline{v}(E) > 0$. Itt $v(E)$ a Hausdorff-féle *külső* lineáris mértéket jelenti. E megjegyzés bizonyítása nyilvánvaló.

20. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $M$ és $N$ két $J$-beli ponthalmaz és $P$ valamely őket elválasztó zárt halmaz. Legyen $L(P)$ a $P$ halmaz $J$-t szétválasztó komponensei hosszúságának összege. Akkor $L(P) \geqq \frac{1}{4} \min[\underline{v}(M), \underline{v}(N)]$.*

BIZONYÍTÁS. Minthogy a $P$ halmaz $M$ mindegyik pontját elválasztja $N$ mindegyik pontjától, ezeket a pontokat valamely $K \subset P$ komponens is elválasztja, és így $K$ szétválasztja a $J$ tartományt. Feleltessünk meg minden a $J$ tartományt szétválasztó $K \subset P$ komponensnek egy olyan $O(K)$ nyílt kört, amelynek középpontja $K$-ban fekszik és sugara $K$ átmérőjének kétszerese. Azt állítom, hogy az összes ilyen körök $\sum$ összege az $M, N$ halmazok közül legalább az egyiket tartalmazza. Valóban, legyen az állítással ellentétben $\xi \in M - \sum$, $\eta \in N - \sum$. A $\xi$ és az $\eta$ pontot a $P$ halmaz $K$ komponense elválasztja. Akkor az $O(K)$ kör biztosan tartalmazza a $\xi, \eta$ pontok közül legalább az egyiket. Abban az esetben, amikor $J$ a gömbfelület, ez nyilvánvaló, ugyanis valamely körön kívül fekvő két pontot a kör nem választ el, még kevésbé egy a körön belül fekvő halmaz. Tekintsük azt az esetet, amikor $J$ négyzet. Az $O(K)$ kör a $\xi, \eta$ pontok egyikét sem választja el a négyzet határától, továbbá egyiküket sem választja el legalább két szomszédos oldaltól és az ezek közt fekvő csúcstól. Következésképpen a $K$ komponensnek volnának pontjai a $J$ négyzet határán, méghozzá legalább két olyan oldalán, hogy ezek az oldalak vagy átellenesek, vagy $O(K)$ a $\xi, \eta$ pontok közül legalább az egyiket nem választja el a szóban forgó oldalak közt fekvő $\alpha$ csúcstól. Meghatározottság kedvéért tegyük fel, hogy $O(K)$ nem választja el a $\xi, \alpha$ pontokat. Az első esetben az $O(K)$ kör befedi az egész négyzetet, a másodikban pedig a közös $\alpha$ csúcsot és a $\xi$ pontot. Tehát az $O(K)$ körök összege befedi vagy $M$-et, vagy $N$-et. De akkor átmérőik összege definíció szerint legalább $\min[\underline{v}(M),$

$\underline{\nu}(N)]$. Mindegyik $K$ komponens hosszúsága nagyobb vagy egyenlő, mint $K$ átmérője, amely $O(K)$ átmérőjének $\frac{1}{4}$-szerese. Ebből következik a segédtétel állítása.

21. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a szokásos $J$ tartományon megadott folytonos függvény, $E_t$ e függvény valamely nívóhalmaza, $\overset{\circ}{E}_t \subset E_t$ pedig a koncentrikus szingularitású komponensek pontjainak halmaza. Ha $\nu(\overset{\circ}{E}_t) > 0$, akkor az $E_t$ halmaz $J$ tartományt szétválasztó komponensei hosszúságának $L(E_t)$ összege végtelen.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $M_0$ az $E_t$ halmazt nem metsző zárt kör. Válasszuk $N$ gyanánt $\overset{\circ}{E}_t$ olyan zárt részhalmazát, amelyre $\nu(N) > \frac{1}{2}\nu(\overset{\circ}{E}_t)$. Feleltessük meg minden $K \subset \overset{\circ}{E}_t$ komponensnek az $E_t$ halmaz valamely, $K$-tól különböző és a $K$, $M_0$ halmazokat egymástól elválasztó $K'(K)$ komponensét. $K'(K)$ nem tartalmazza a $K$ komponenst, és így annak egy $U_1(K)$ környezetét is elválasztja $M_0$-tól. A Heine—Borel-tétel szerint véges számú $K$-hoz tartozó $U_1(K)$ környezetek befedik $N$-et. Tekintsük az ezen $K$ komponenseknek megfelelő $K'(K)$ halmazokat. Az utóbbiak hosszúságainak összegét $L_1$-gyel jelölve az előző segédtétel alapján kapjuk: $L_1 \geqq \min[\underline{\nu}(N), \underline{\nu}(M_0)] = d > 0$.

Most legyen $\tau_1 = \frac{1}{2}\varrho(S_1, N)$, ahol $S_1$ a választott $K'(K)$ komponensek összege. Képezzünk egy $S_2$ halmazt a következőképpen: minden $K \subset \overset{\circ}{E}_t$ komponensnek feleltessünk meg egy $K''(K)$ komponenst, amely a $K$ komponenst elválasztja $K$ $\tau_1$-környezetének kiegészítő halmazától (és speciálisan $M_0$-tól). $K$-val együtt a $K''(K)$ komponens valamely $U_2(K) \supset K$ környezetet is elválaszt $M_0$-tól. A Heine—Borel-tétel alapján válasszunk ki véges számú $K''(K)$ komponenst úgy, hogy a megfelelő $U_2(K)$ környezetek befedjék $N$-et. E komponensek összegét nevezzük $S_2$-nek. Legyen $L_2$ az $S_2$-höz tartozó komponensek hosszúságainak összege. Az előbbiek szerint $L_2 \geqq d > 0$. Folytatva ugyanezt az eljárást, egymást nem metsző és az $E_t$ nívó komponenseit szétválasztó $S_1, S_2, \ldots$ halmazokat kapunk, ahol bármelyik $S_n$-hez tartozó komponensek hosszúságainak összege nagyobb vagy egyenlő, mint egy közös $d > 0$ szám. Ebből következik a segédtétel állítása.

A 21. segédtételből következik, hogy *a $\nu(t)$ függvény nem függ attól, hogy az egész $E_t$ nívóhalmaz Hausdorff-féle lineáris mértékét tekintjük $\nu(t)$-nek, vagy elhagyjuk belőle azokat a pontokat, amelyek koncentrikus szingularitású komponenshez tartoznak.*

További célunk annak a megmutatása, hogy *a félmaximumot vagy félminimumot szolgáltató komponensek szintén nem befolyásolják lényegesen a nívóhalmazok hosszúságát, kivéve esetleg megszámlálhatóan sok nívót.*

16. definíció. Az $F(\eta)$ függvény $E_t$ nívóhalmazának a $J$ tartományt szét nem választó $K$ komponensét *h-félmaximumot (h-félminimumot)* szolgáltató komponensnek nevezzük, ha van olyan $L$ kontinuum, hogy $L \cap K \neq 0$, $L \cap (E_t - K) = 0$ és található olyan $\eta \in L$ pont, amelyre $F(\eta) \leqq t - h$ (illetve $F(\eta) \geqq t + h$).

22. SEGÉDTÉTEL. *Az $F(\eta)$ folytonos függvény $E_t$ nívóhalmazának h-félmaximumot szolgáltató komponenseihez tartozó pontok $\overset{+}{M}_t(h)$ halmaza és a h-félminimumot szolgáltató komponensekhez tartozó pontok $\overset{-}{M}_t(h)$ halmaza Borel-halmaz.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\overset{+}{E}(r, \theta, \varepsilon)$ jelentése ugyanaz, mint a 19. segédtételben. Legyen

$$\overset{+}{E}(h) = \prod_k \sum_m \overset{+}{E}\left(\frac{1}{k}, h, \frac{1}{m}\right) \cap M'.$$

Megmutatjuk, hogy $\overset{+}{E}(h)$ éppen a $t$ nívó $h$-félmaximumot szolgáltató komponenseihez tartozó pontok $\overset{+}{M}_t(h)$ halmaza. Az $\overset{+}{M}_t(h) \subset \overset{+}{E}(h)$ összefüggés nyilvánvaló. Fordítva, legyen $\xi \in \overset{+}{E}(h)$ és $K_\xi$ a $\xi$ pontot tartalmazó komponens. Akkor minden természetes $k$-hoz található egy $L_k$ kontinuum, amely metszi a $K_\xi$ komponens $\frac{1}{k}$-sugarú környezetét, az $U_{\frac{1}{k}}(K_\xi)$ halmazt, továbbá tartalmaz olyan $b_k$ pontot, amelyre $F(b_k) \leqq t-h$, végül pedig minden $\eta \in L_k$ pontra fennáll az $F(\eta) \leqq t - \frac{1}{m(k)}$ egyenlőtlenség. Legyen $\{\zeta_k\}$ olyan pontsorozat, amelynek elemei rendre az $U_{\frac{1}{k}}(K_\xi) \cap L_k$ halmazhoz tartoznak. Ha legalább egy $\zeta_k$ pontot az $E_t - K_\xi$ halmaz nem választ el $K_\xi$-től, akkor a $\xi \in \overset{+}{M}_t(h)$ összefüggés a B' tételből következik. Ha viszont az $E_t - K_\xi$ halmaz bármelyik $\zeta_k$ pontot elválasztja $K_\xi$-től, akkor tetszés szerinti $k$-hoz található a $\zeta_k$ pontot és a $K_\xi$ halmazt elválasztó $C_k \subset E_t - K_\xi$ komponens. Hogy ez az eset lehetetlen, annak bizonyítása szóról szóra megegyezik a 19. segédtétel bizonyításának végével. Megmutattuk, hogy $\overset{+}{M}_t(h)$ *Borel*-halmaz (ugyanis az $M'$ halmaz $G_\delta$ típusú, az $\overset{+}{E}\left(\frac{1}{k}, h, \frac{1}{m}\right)$ halmazok pedig zártak). Az $F(\eta)$ függvény $h$-félminimumot szolgáltató pontjainak $\overline{M}_t(h)$ halmaza azonos a $-F(\eta)$ függvényhez tartozó $\overset{+}{M}_{-t}(h)$ halmazzal és így szintén Borel-halmaz.

A továbbiakban a $t$ nívó $h$-félmaximumot és $h$-félminimumot szolgáltató komponensekhez tartozó pontjainak halmazát $\overset{+}{M}_t(h)$ és $\overset{-}{M}_t(h)$ helyett rendre $\overset{+}{E}_t(h)$-val és $\overline{E}_t(h)$-val fogjuk jelölni.

17. definíció. Két korlátos ponthalmaz, $M$ és $N$ *Hausdorff-féle távolságán* a

$$\delta(M, N) = \max\{\sup_{m \in M}[\inf_{n \in N}|m, n|]; \sup_{n \in N}[\inf_{m \in M}|m, n|]\}$$

számot fogjuk érteni, ahol mint mindig, $|m, n|$ az $m$, $n$ pontok közönséges távolsága.

18. definíció. Legyen $\{M^{(\xi)}\}$ $J$-beli halmazoknak valamely nem megszámlálható rendszere (a $\xi$-k valós számok). Azt fogjuk mondani, hogy $M^{(\xi_0)}$ *kétoldali kondenzációs halmaz,* ha tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ esetén megszámlálhatónál több olyan $\xi < \xi_0$ és megszámlálhatónál több olyan $\xi > \xi_0$ index van, amelyre $\delta(M^{(\xi_0)}, M^{(\xi)}) < \varepsilon$.

23. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $\{M^{(\xi)}\}$ síkbeli korlátos halmazokból álló rendszer. Legfeljebb megszámlálhatóan sok kivételtől eltekintve mindegyik $M^{(\xi)}$ kétoldali kondenzációs halmaz.*

BIZONYITÁS. Nevezzük az $M^{(\xi)}$ halmaz $\varepsilon$-hálójának az $M^{(\xi)}$-beli pontok valamely véges $A_\varepsilon^{(\xi)}$ halmazát, ha $\eta \in M^{(\xi)}$ esetén $\varrho(\eta, A_\varepsilon^{(\xi)}) < \varepsilon$. Ha a segédtétel nem igaz, akkor található olyan $\varepsilon > 0$ szám és az $M^{(\xi)}$ halmazoknak olyan nem megszámlálható $P$ rendszere, hogy $M^{(\xi_0)} \in P$ esetén vagy legfeljebb megszámlálhatóan sok olyan $\xi > \xi_0$ van, vagy legfeljebb megszámlálhatóan sok olyan $\xi < \xi_0$ van, amelyre $\delta(M^{(\xi)}, M^{(\xi_0)}) < \varepsilon$.

Vegyük fel mindegyik $M^{(\xi)}$-ben egy $\frac{\varepsilon}{8}$-hálót; feltehetjük, hogy mindegyik háló ugyanannyi pontból áll (valamilyen $n$-re azoknak a $P$ rendszerhez tartozó $M^{(\xi)}$ halmazoknak a $P'$ összessége, amelyeknek van $n$ pontból álló hálójuk, nem megszámlálható, és szorítkozhatunk $P'$-re). Számozzuk meg mindegyik háló pontjait 1-től $n$-ig. Nevezzük $\alpha_1$-nek a vizsgált hálók első pontjainak valamely kondenzációs pontját. Legyen $P_1$ a $P'$ rendszer azon $M^{(\xi)}$ halmazainak összessége, amelyekhez tartozó hálók első pontja az $\alpha_1$ pont $\frac{\varepsilon}{8}$-sugarú környezetében fekszik. Ha a $P_i$ rendszert már megszerkesztettük, akkor válasszuk $\alpha_{i+1}$ gyanánt a $P_i$-beli $M^{(\xi)}$ halmazok hálói $(i+1)$-edik pontjainak valamely kondenzációs pontját, és $P_{i+1}$ gyanánt a $P_i$ rendszer azon $M^{(\xi)}$ halmazainak összességét, amelyekhez tartozó hálók $(i+1)$-edik pontja az $\alpha_{i+1}$ pont $\frac{\varepsilon}{8}$-sugarú környezetében fekszik. Tekintsük most a $P_n$ rendszert. $P_n$ nem megszámlálható, így találhatók olyan $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ számok, hogy $M^{(\xi_1)}$, $M^{(\xi_2)}$ és $M^{(\xi_3)}$ benne van $P_n$-ben és hogy $P_n$ megszámlálhatónál több olyan $M^{(\xi)}$ halmazt tartalmaz, amelyre $\xi_1 < \xi < \xi_2$, és megszámlálhatónál több olyan $M^{(\xi')}$ halmazt, amelyre $\xi_2 < \xi' < \xi_3$. Könnyen látható azonban, hogy ha $M^{(\xi)} \subset P_n$ és $M^{(\eta)} \subset P_n$, akkor $\delta(M^{(\xi)}, M^{(\eta)}) < \varepsilon$. Ebből következik, hogy az $M^{(\xi_2)}$ halmazhoz megszámlálhatónál több olyan $\xi < \xi_2$, és megszámlálhatónál több olyan $\xi > \xi_2$ index van, amelyre $M^{(\xi)}$ távolsága $M^{(\xi_2)}$-től kisebb $\varepsilon$-nál. Ez ellentmond feltevésünknek és így bizonyítja a segédtétel helyességét.

24. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $K_1$ és $K_2$ az $F(\eta)$ függvény $E_t$ nívójának két különböző, h-félmaximumot szolgáltató komponense. Legyen $K$ ugyanennek a nívónak egy, a $K_1$, $K_2$ halmazokat elválasztó komponense. Legyen a $d > 0$ szám olyan kicsiny, hogy a $|\xi, \eta| \leqq d$ egyenlőtlenség biztosítsa $|F(\eta) - F(\xi)| < h$ fennállását. Akkor a $K$ komponens átmérője legalább $\frac{1}{8}\, d$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen a $J$ értelmezési tartomány a gömbfelület. Legyen $K_0$ olyan kör, amelynek középpontja a $K$ halmaz tetszés szerinti pontja és amelynek sugara egyenlő $K$ átmérőjével. A $K_0$ kör biztosan tartalmazza belsejében vagy $K_1$-et és egy olyan $L_1$ kontinuumot, amely metszi $K_1$-et, nem metszi az $E_t - K_1$ halmazt, és legalább egy pontjában $F(\eta) \leqq t - h$, vagy a $K_2$ komponenst és valamely neki megfelelő $L_2$ kontinuumot. Ebből következik állításunk. A négyzet esetében a bizonyítás ugyanígy történik, csak a $K_0$ kört kétszerakkora sugarúnak kell választani.

Felhasználva a bevezetett fogalmakat és a bebizonyított 22—24. segédtételeket, megkapjuk a $h$-félmaximumot ($h$-félminimumot) szolgáltató pontokra vonatkozó, fentebb megfogalmazott eredményt.

25. SEGÉDTÉTEL. *Legyen a $J$ tartományon megadott $F(\eta)$ folytonos függvénynek megszámlálhatónál több olyan nívója, amelyre az $\overset{+}{E}_t$ (illetve $\overset{-}{E}_t$) halmaz lineáris mértéke nullától különböző. Mindegyik ilyen nívóra, kivéve legfeljebb megszámlálhatóan sokat,*

*az illető nívónak a $J$ tartományt szétválasztó komponensei hosszúságainak összege végtelen.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsük azt az esetet, amikor a nívók valamely nem megszámlálható $\mathfrak{A}$ rendszerére $\nu(\overset{+}{E}_t)>0$. Nyilvánvaló, hogy $\overset{+}{E}_t = \sum_n \overset{+}{E}_t\left(\frac{1}{n}\right)$. Továbbá minden $t\in\mathfrak{A}$ értékhez található olyan $n$, hogy $\nu\left[\overset{+}{E}_t\left(\frac{1}{n}\right)\right]>0$. Válasszuk a $\theta>0$ és a $h>0$ számot olyan kicsinynek, hogy megszámlálhatónál több $t$ értékre fennálljon a $\underline{\underline{\nu}}[\overset{+}{E}_t(h)]>2\theta>0$ egyenlőtlenség. Minden ilyen $\overset{+}{E}_t(h)$ halmazhoz válasszunk egy $P_t\subset\overset{+}{E}_t(h)$ zárt halmazt, amelyre $\underline{\underline{\nu}}(P_t)>\theta$. Ilyen választás a 22. segédtétel és a *Borel*-halmazok $\nu$-mérhetősége miatt lehetséges. A 23. segédtétel értelmében legfeljebb megszámlálhatóan sok kivételtől eltekintve mindegyik $P_t$ kétoldali kondenzációs halmaz (a $t$ indexre vonatkozóan). Megmutatjuk, hogy ha $P_{t_0}$ a $P_t$ halmazokra nézve kétoldali kondenzációs halmaz, akkor az $E_{t_0}$ nívó *Hausdorff*-féle lineáris mértéke már a $J$ tartományt szétválasztó komponensek révén végtelen.

Tegyük fel, hogy ez nincs így. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy akkor $E_{t_0}$-nak legfeljebb véges számú olyan komponense van, amely szétválasztja a $P_{t_0}$ halmaznak a szóban forgó komponenshez nem tartozó pontjait. Ez a 24. segédtételből következik. Legyenek ezek a komponensek $K_1,\dots,K_n$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy mindegyik $K_s$ komponens pontosan két részre osztja $J$-t, ugyanis „nyolcas" típusú komponensek legfeljebb megszámlálhatóan sok nívón fordulnak elő. Így a $K_1,\dots,K_n$ komponensek a $J$ tartományt $n+1$ számú $J_1,\dots,J_{n+1}$ tartományra osztják fel, és két, a $J_s\cap P_{t_0}$ halmazhoz tartozó $K',K''$ komponenst $E_{t_0}$ egyetlen tőlük különböző komponense sem választ el, tehát nem választja el őket $E_{t_0}-K'-K''$ sem.

Megmutatjuk, hogy tetszés szerinti $\delta>0$ számhoz található $E_{t_0}$-nak véges számú, a $J$ tartományt szétválasztó és a $P_{t_0}$ halmaz $\delta$-környezetét metsző komponense, amelyeknek összhosszúsága legalább $\theta$. Legyen $\lambda$ a $K_1,\dots,K_n$ komponensek hosszúságai közül a legkisebb. A $P_{t_0}$ és $\sum_{s=1}^{n} K_s$ közötti távolságot jelöljük $\varrho$-val. Legyen $\delta\leqq\frac{1}{2}\varrho$. A kétoldali kondenzációs halmaz definíciója értelmében van olyan $t_1>t_0$, hogy $P_{t_1}\subset U_\delta(P_{t_0})$ (ahol $U_\delta(M)$ az $M$ halmaz $\delta$-környezete), sőt, a $\delta(P_{t_0},P_{t_1})$ *Hausdorff*-féle távolság nem nagyobb, mint $\frac{1}{2}\delta$.

Minden $\eta\in P_{t_1}$ és $\xi\in P_{t_0}$ ponthoz található az $E_{t_0}$ halmaznak őket elválasztó és a $P_{t_0}$ halmazt nem metsző $K$ komponense. Valóban, ellenkező esetben volna olyan $L$ kontinuum, amely tartalmazza a $\xi\in P_{t_0}$ és $\eta\in P_{t_1}$ pontot, továbbá nem metszi az $E_t-K_\xi$ halmazt, ahol $K_\xi$ a $\xi$-t tartalmazó komponens. De akkor az $L-K_\xi$ halmazon mindenütt $F(\eta)>t$, ami nem lehetséges, mivel $K_\xi$ *félmaximumot szolgáltató* komponens. Tehát létezik említett tulajdonságú $K$ komponens. Minden $\eta\in P_{t_1}\cap J_s$ ponthoz rendeljünk hozzá egy, az $\eta$ pontot és a $J_s\cap P_{t_0}$ halmaz valamely pontját elválasztó $K(\eta)\subset E_{t_0}$ komponenst. Akkor $K$ elválasztja az $\eta$ pontot $P_{t_0}$ *bármely* pontjától, mert ellenkező esetben $K$ szétválasztaná a $P_{t_0}$ halmazt. A $K$ komponens

$\eta$-val együtt $\eta$-nak egy egész környezetét is elválasztja $P_{t_0}$-tól. Ennélfogva találhatunk véges számú ilyen típusú $K^{(1)}, \dots, K^{(m)}$ komponenst, amelyek összege elválasztja egymástól a $P_{t_0}$, $P_{t_1}$ halmazokat. Mindezek a komponensek metszik a $P_{t_0}$ halmaz $\delta$-környezetét, és hosszúságuk összege a 20. segédtétel szerint legalább $\theta$. Minthogy a $\delta > 0$ szám tetszés szerinti, innen könnyen levezethető, hogy a $t_0$ nívó $J$-t szétválasztó komponensei hosszúságának összege végtelen.

Félminimumot szolgáltató komponensek esetére a bizonyítás az $F(\eta)$ függvényről a $-F(\eta)$ függvényre való áttéréssel adódik.

A 21. segédtételből következik, hogy *mihelyt a koncentrikus szingularitású komponensekhez tartozó pontok halmazának lineáris mértéke nullától különböző, az adott nívón már a szétválasztó komponensek* (közönséges értelemben vett) *összhosszúsága végtelen*. A 25. segédtétel *ugyanezt az eredményt* adja *arra az esetre, amikor a félextrémumot szolgáltató pontok halmazának lineáris mértéke pozitív, de már nem minden nívóra, hanem esetleg megszámlálhatóan sok kivétellel minden nívóra*. A megfelelő halmazoknak a 21. segédtételben kimutatott *Borel*-mérhetősége, és a *Borel*-halmazoknak a (*Hausdorff*-féle lineáris mértékre vonatkozó) mérhetősége alapján innen a következők adódnak:

10. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a $J$ négyzeten vagy gömbfelületen értelmezett folytonos függvény. Akkor legfeljebb megszámlálhatóan sok $t$ érték kivételével minden $E_t$ nívóhalmaz Hausdorff-féle lineáris $v(t)$ mértéke egyenlő e nívó teljesen reguláris komponensei hosszúságának összegével. Speciálisan (esetleg megszámlálhatóan sok kivételtől eltekintve) minden véges hosszúságú nívó csak egy pontból álló komponenseket tartalmaz nem szétválasztó komponensként.*

BIZONYÍTÁS. A 3. tétel értelmében nem reguláris komponensek, amelyek $J$-t kettőnél több részre osztják, továbbá reguláris, de nem teljesen reguláris komponensek legfeljebb megszámlálhatóan sok nívón fordulnak elő. Ezeket a nívókat figyelmen kívül fogjuk hagyni. A 21. és 25. segédtételből következik, hogy minden nívóra, esetleg megszámlálhatóan soktól eltekintve, amelyeket elhanyagolunk, fennáll:

$$v(t) = v(E_t - \overset{0}{E_t} - \overset{+}{E_t} - \overset{-}{E_t}).$$

Következésképpen legfeljebb megszámlálhatóan sok kivétellel minden $t$ nívóra teljesül a $v(t) = v(E_t^*)$ egyenlőség, ahol $E_t^*$ a $t$ nívó teljesen reguláris komponenseinek egyesítése. Ha $E_t^*$ *megszámlálhatónál több* komponensből áll, akkor nyilván $v(E_t^*) = +\infty$ és e komponensek hosszúságának összege szintén végtelen. Ha viszont $E_t^* = \sum_n K_n$, ahol $K_n$ az $E_t$ halmaz reguláris komponense, akkor $v(E_t^*) = \sum_n v(K_n)$.

## 5. §. Sima függvények nívóhalmazai

Ebben a paragrafusban *egyszer* és *kétszer differenciálható* kétváltozós függvények nívóhalmazainak tipikus szerkezetéről fogunk bizonyos ismereteket szerezni.

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy éppen úgy, mint az egyszerűen csak folytonos függvények esetében, valamely többször differenciálható függvény önállóan tekintett $E_t$ nívóhalmazára vonatkozó egyetlen megszorítás az, hogy $E_t$ zárt halmaz legyen. Sőt, Whitney [7] megfelelő tételéből következik, hogy lehet szerkeszteni olyan végtelen sokszor differenciálható függvényt, amelynek az adott zárt halmaz nívóhalmaza.

Minthogy azonban a későbbiekben sehol sem használjuk fel ezt a fontos tételt, bizonyítása pedig elég terjedelmes, a megfelelő példát itt nem fogjuk ismertetni.

Most tegyük fel, hogy az $F(\eta)$ függvénynek a $J$ négyzet minden pontjában létezik teljes differenciálja és a parciális deriváltak folytonosak. (Ennek a paragrafusnak a folyamán az előadás egyszerűsége érdekében fel fogjuk tenni, hogy a $J$ értelmezési tartomány négyzet. A bizonyítások gömbfelület esetén szükségessé váló módosítását az olvasó nehézség nélkül elvégezheti.) Akkor YOUNGnak az implicit függvényekről szóló nevezetes tétele [13] értelmében, ha az $F(\eta)$ függvénynek a $\xi$ pontban vett grad $F(\xi)$ gradiense különbözik nullától, akkor a $\xi$ pont környezetében az $F(\eta)$ függvény nívógörbéje egyértelmű és folytonosan differenciálható ív. Azokban a pontokban, ahol grad $F(\eta)=0$, YOUNG tétele nem ad semilyen megszorítást. Ily módon YOUNG tétele *lokális* jellegű.

Megmutatjuk, hogy egyszer *differenciálható* kétváltozós függvénynek *majdnem mindegyik nívóhalmaza lokálisan összefüggő*, és hogy majdnem minden nívóra azok a pontok, amelyekre grad $F(\eta)=0$, az illető nívón nulla lineáris mértékű halmazt alkotnak.

Továbbá kétszer differenciálható függvényekre be fogjuk bizonyítani, hogy a grad $F(\eta)=0$ tulajdonságú pontok a nívók valamely nulla mértékű halmazán helyezkednek el, és bármely más nívó *véges számú folytonosan differenciálható egyszerű ívből és topológikus körből* áll.

11. TÉTEL. (G. M. ADELSZON—VELSZKIJ és A. SZ. KRONROD). *Legyen $F(\eta)$ a $J$ egységnégyzeten értelmezett folytonos függvény, amelynek minden pontban van teljes differenciálja. Legyen $\Omega$ azon pontok halmaza, amelyekben* grad $F(\eta)=0$. *Legyen $T$ azon $t$ értékek halmaza, amelyekre $v(E_t\cap\Omega)>0$, ahol $v(E)$ a Hausdorff-féle lineáris mérték. Akkor* mes $T=0$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $\overline{\text{mes}}\, T=d>0$, ahol $\overline{\text{mes}}$ a Lebesgue-féle külső mérték jele. Akkor található olyan $\alpha>0$, hogy $T'$-vel jelölve azon $t$ értékek halmazát, amelyekre $v(E_t\cap\Omega)>\alpha$, fennáll a $\overline{\text{mes}}\, T'>\frac{d}{2}$ egyenlőtlenség. Minden $t\in T'$ nívóval kapcsolatban járjunk el a következőképpen. Minden $\eta\in E_t\cap\Omega$ ponthoz található olyan $\delta_\eta>0$ szám, hogy $|\zeta,\eta|<\delta_\eta$ esetén $|F(\zeta)-F(\eta)|<\frac{|\eta,\zeta|}{A}$, ahol $A$ tetszés szerinti rögzített szám. Legyen $U_{t,\delta}$ az $E_t\cap\Omega$ halmaz azon pontjainak összessége, amelyekre $\delta_\eta\geqq\delta$. Legyen $\delta_0$ oly kicsiny, hogy $v(U_{t,\delta_0})>\frac{3}{4}\alpha$. Legyen a $\varrho>0$ szám olyan kicsiny, hogy $v_{4\varrho}(U_{t,\delta_0})>\frac{\alpha}{2}$ és $\varrho<\min(1,\delta_0)$. Rajzoljunk $U_{t,\delta_0}$ minden pontja mint középpont körül egy-egy $\varrho$ sugarú kört. Egymást nem metsző körökből álló maximális $\mathfrak{A}_t$ részrendszerben a sugarak összege $\geqq\frac{\alpha}{12}$. Valóban, ha az $\mathfrak{A}_t$ rendszer mindegyik körének sugarát megháromszorozzuk, akkor a kapott rendszer befedi az egész $U_{t,\delta_0}$ halmazt és a körök sugara $\leqq 3\varrho<4\varrho$, ezért az átmérők összege nagyobb, mint $\frac{\alpha}{2}$, következésképpen az eredeti körök átmérőinek összege nagyobb, mint $\frac{\alpha}{6}$. Meg fogjuk becsülni az $\mathfrak{A}_t$ rendszerhez tartozó körök összegének területét. Ennek nagysága $S_t=n\pi\varrho^2$, ahol $n$ a körök száma, és nyilván $n\geqq\frac{\alpha}{12\varrho}$.

Ezek szerint $S_t \geqq \frac{\pi\varrho^2\cdot\alpha}{12\varrho} > \frac{\alpha\varrho}{4}$. Továbbá a függvény ingadozása egyik körben sem haladja meg a $\frac{2\varrho}{A}$ értéket. Ennélfogva $\mathfrak{A}_t$ minden pontja a $j_t = \left[t - \frac{\varrho}{A}, t + \frac{\varrho}{A}\right]$ intervallumbeli nívókhoz tartozik. Elvégezve ezt a szerkesztést minden $t \in T'$ értékre, válasszuk ki a $j_t$ számközöknek egy véges rendszerét, amely a $t$ tengelynek legalább $\frac{d}{4}$ -nyi részét fedi be. Vegyük ezeknek az intervallumoknak valamely részrendszerét, amelynek elemei nem metszik egymást és összhosszúságuk legalább $\frac{d}{8}$. Legyenek ezek $j_{t_1}, \ldots, j_{t_k}$. Megbecsüljük az összes $\mathfrak{A}_{t_s}$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ rendszerekhez tartozó körök területének $S$ összegét. Kapjuk:

$$S > \sum_{s=1}^{k} \frac{\alpha\varrho_s}{4} = \frac{\alpha}{4} \sum_{s=1}^{k} \varrho_s,$$

de a $j_{t_s}$ intervallum hosszúsága nem nagyobb, mint $\frac{2\varrho_s}{A}$, és így

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{2\varrho_s}{A} = \frac{2}{A} \sum_{s=1}^{k} \varrho_s \geqq \frac{d}{4} \quad \text{vagy} \quad \sum_{s=1}^{k} \varrho_s \geqq \frac{Ad}{8}.$$

Ebből következik, hogy $S \geqq \frac{\alpha\cdot d}{32} A$ bármilyen nagy $A$-ra. Ez azonban lehetetlen, mert ugyanazon $\mathfrak{A}_{t_s}$-hez tartozó körök szerkesztés szerint nem metszik egymást, különböző $\mathfrak{A}_{t_s}$ rendszerekhez tartozó körök pedig azért nem metszik egymást, mert az $F(\eta)$ függvény különböző értékeket vesz fel rajtuk (ugyanis $F(\eta) \in j_{t_s}$, ha $\eta$ az $\mathfrak{A}_{t_s}$ rendszerhez tartozó körben fekszik). Ennélfogva (tekintetbe véve még, hogy $\varrho < 1$) fennáll $S < 9$, és elég nagy $A$ esetén ellentmondásra jutunk, ami bizonyítja tételünket.

Differenciálható $F(\eta)$ függvények esetében néhány kijelentést tehetünk nívóhalmazok komponenseinek tipikus topológiai szerkezetéről. Ehhez egy segédtételre lesz szükségünk.

26. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $u(x, y)$ tetszés szerinti függvény. Akkor bármely $y_0$-ra (illetve $x_0$-ra) azon $t$ értékek $T_{y_0}$ (illetve $T_{x_0}$) halmaza, amelyekhez található olyan $(x, y_0) \in E_t$ (illetve $(x_0, y) \in E_t$) pont, hogy $u_x(x, y_0) = 0$ (illetve $u_y(x_0, y) = 0$), nulla mértékű.*

BIZONYÍTÁS. Valóban, ha $\overline{\text{mes}}\, T_{y_0} = \mu > 0$, akkor az $\varepsilon > 0$ számot tetszés szerint rögzítve, feleltessünk meg minden olyan $(x, y_0)$ pontnak, ahol $u_x = 0$, egy intervallumot, amelyben $|u(x, y_0) - u(x', y_0)| < \varepsilon|x - x'|$. Ezen intervallumok közül kiválaszthatunk véges számú egymást nem metszőt úgy, hogy a $t$ tengelyen vett képeik összegének a mértéke $\geqq \frac{\mu}{3}$ legyen. Akkor az intervallumok hosszúságának összege nagyobb lesz, mint $\frac{\mu}{3\varepsilon}$, ami elég kicsiny $\varepsilon$ értékekre lehetetlen.

12. TÉTEL. (G. M. ADELSZON—VELSZKIJ és A. SZ. KRONROD). *Legyen $u(x, y)$ a $J$ tartományon értelmezett folytonos függvény, és legyen $m$ és $M$ e függvény minimuma és maximuma. Akkor a $t$ tengely $[mM]$ szakasza tartalmaz olyan teljes mértékű $T^*$ halmazt, hogy mindegyik $t \in T^*$ értékhez tartozó $E_t$ nívóhalmazra*

1 *azon pontok $W_1$ halmazának az $x$ tengelyen vett vetülete, amelyekben $u_y = 0$, nulla mértékű, és*

2 *azon pontok $W_2$ halmazának az $y$ tengelyen vett vetülete, amelyekben $u_x = 0$, nulla mértékű.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsük az $l_c$ $(x = c)$ egyenesek rendszerét. Jelentse $T_c$ azon $t$ nívók halmazát, amelyekre az $E_t \cap l_c$ metszetnek legalább egy pontjában $u_y = 0$. A 26. segédtétel szerint a $T_c$ halmaz tetszés szerinti $c$ esetén nulla mértékű. Legyen $P$ az $xt$ sík azon $(x_0, t_0)$ pontjainak a halmaza, amelyekre $E_{t_0} \cap l_{x_0}$ tartalmaz $u_y = 0$ tulajdonságú pontot. FUBINI tétele [6] értelmében az $[mM]$ szakasz tartalmaz olyan teljes mértékű $T_1$ halmazt, hogy minden $t_0 \in T_1$ értékhez tartozó $t = t_0$ egyenesnek a $P$ halmazzal képezett metszete nulla mértékű. Felcserélve megfontolásunkban az $x$ és $y$ mennyiséget, egy $T_2$ halmazt kapunk. A $T^* = T_1 \cap T_2$ halmaz megfelel a tétel követelményeinek.

13. TÉTEL (G. M. ADELSZON—VELSZKIJ és A. SZ. KRONROD). *Legyen $u(x, y)$ a $J$ tartományon értelmezett folytonos függvény, és $T^*$ a nívóknak az a halmaza, amelynek létezését a 12. tételben bizonyítottuk. Akkor bármely $t \in T^*$ értékre az $E_t$ halmaz mindegyik komponense lokálisan összefüggő.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $K$ az $E_t$ halmaz valamely komponense, és $a$ a $K$ komponens lokális össze nem függési pontja. Akkor található olyan $a$ középpontú és $C_a$ határú $R_a$ kör, hogy az $R_a$ körben a $K$ kontinuumnak van egy $\{K_i\}$ komponens-sorozata, amelynek minden tagja tartalmazza a $C_a$ határ valamely $b_i$ pontját, és az $a$ pont benne van a $\{K_i\}$ sorozat topológiai limes inferiorában. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a $b_i$ pontok tartanak egy $b \in C_a$ ponthoz. Meghatározottság kedvéért az $a, b$ pontok $x$ koordinátái, $x_1$ és $x_2$ legyenek rendre különbözők $(x_1 < x_2)$, majd egyenlők. Akkor mindegyik $l_{x_0}$ egyenest $(x = x_0;\ x_1 < x_0 < x_2)$ megszámlálhatóan sok $K_i$ metszi. De $K_i \cap K_j = 0$, tehát mindegyik $l_{x_0}$ egyenesen található olyan $(x_0, y_{x_0})$ pont, amely a $K_i \cap l_{x_0}$ halmazokhoz tartozó pontok torlódási pontja és amelyre ennélfogva $u_y(x_0, y_{x_0}) = 0$.

A 12. tétel 1. pontjával kapott ellentmondás bizonyítja a 13. tételt.

27. SEGÉDTÉTEL. *Bármely síkbeli, korlátos, lokálisan összefüggő $K$ kontinuum, amely nem egyszerű ív vagy topológikus kör, tartalmaz elágazási pontot.*

BIZONYÍTÁS. 1°. Tegyük fel, hogy $K$ tartalmaz egy $L \neq K$ topológikus kört. Az $a \in K - L$ pont tetszés szerinti $b \in L$ ponttal összeköthető valamely $l$ egyszerű ív segítségével. Tekintsük az $l \cap L$ metszet ($a$-tól $b$ felé számított) első pontját. Ez elágazási pont.

2°. Tegyük fel, hogy $K$ nem tartalmaz topológikus kört. Legyen $a \in K$, $b \in K$, $c \in K$. Találhatók olyan $l_a \subset K$, $l_b \subset K$, $l_c \subset K$ egyszerű ívek, amelyek végpontjai rendre $b$ és $c$, $c$ és $a$, $a$ és $b$. Ha az $l_a$, $l_b$, $l_c$ ívek közül egyik sem tartalmazza a másik kettő összegét, akkor $l_a + l_b + l_c$ tartalmaz vagy topológikus kört, vagy elágazási pontot. Ha viszont ez a körülmény egyetlen $K$-beli ponthármasra sem áll fenn, akkor $K$ pontjainak a halmaza rendezett, és $K$ egyszerű ív.

14. TÉTEL (G. M. ADELSZON—VELSZKIJ és A. SZ. KRONROD). *Legyen $u(x, y)$ a $J$ tartományon értelmezett folytonos függvény, amelynek $J$ minden pontjában vannak parciális deriváltjai. Legyen $m$ és $M$ az $u(x, y)$ függvény minimuma és maximuma. Akkor az $[mM]$ szakaszon található olyan teljes mértékű $T^*$ halmaz, hogy $t \in T^*$ esetén az $E_t$ nívóhalmazok csak a következő komponenseket tartalmazzák:*

a) *topológikus körök,*
b) *egyszerű ívek, amelyek végpontjai $J$ határán fekszenek,*
c) *pontok.*

*Minden $t \in T^*$ értékre az egyetlen pontból álló komponensek összességének az $x$ tengelyen és az $y$ tengelyen vett vetülete is nulla mértékű.*

BIZONYÍTÁS. A 13. tételnek megfelelően válasszuk ki a nívóknak egy $\tilde{T}$ rendszerét, amelyre $t \in \tilde{T}$ esetén minden $K \subset E_t$ komponens lokálisan összefüggő. KOMAREVSZKIJ tétele (lásd a 8. segédtételt) szerint a sík egymást nem metsző, elágazási pontot tartalmazó kontinuumainak bármely rendszere legfeljebb megszámlálható. Így a 27. segédtétel értelmében e komponensek közt legfeljebb megszámlálhatóan sok olyan van, amelyik nem pont, egyszerű ív vagy topológikus kör.

Hagyjuk el a $\tilde{T}$ rendszerből mindazon $t$ nívókat, amelyekre $E_t$ tartalmaz ilyen kivételes komponenst. Legyen a megmaradó rendszer $T^*$. Legyen $a(x_0, y_0) \in E_{t_0}$ $(t_0 \in T^*)$ és $u_x(a) \neq 0$ vagy $u_y(a) \neq 0$. Meghatározottság kedvéért tegyük fel, hogy $u_y(a) > 0$. Vegyük fel a $\varrho(x_0, y_0 - \varepsilon)$, $\gamma(x_0, y_0 + \varepsilon)$ végpontokkal rendelkező $L$ szakaszt úgy, hogy $0 < \delta \leqq \varepsilon$ esetén teljesüljön az $u(x_0, y_0 + \delta) > u(a) = t_0$ és az $u(x_0, y_0 - \delta) < u(a) = t_0$ egyenlőtlenség.

A $\gamma$ és a $\varrho$ pontot az $E_{t_0}$ halmaz, és így annak egy $K$ komponense is elválasztja. Következésképpen $K$ nem állhat egyetlen pontból. A $K \subset E_{t_0}$ komponens metszi az $L$ szakaszt, tehát tartalmazza az $a$ pontot. Ha $K$ nem topológikus kör, akkor $K$ egyszerű ív, és minthogy $K$ szétválasztja a $J$ tartományt, $K$ végpontjai $J$ határán fekszenek. Minthogy minden, nem egyetlen pontból álló $K \subset E_t$ komponensnek $t \in T^*$ esetén a 12. tétel értelmében van olyan pontja, amelyben $u_x \neq 0$ vagy $u_y \neq 0$, az $E_t$ $(t \in T^*)$ nívóhalmazok komponenseinek összessége csak pontokat, topológikus köröket és olyan egyszerű íveket tartalmaz, amelyek végpontjai $J$ határán fekszenek. Az egymagukban komponenst szolgáltató pontokban mindkét parciális derivált értéke nulla, ezért minden $t \in T^*$ nívóra e pontok halmazának vetületei a 12. tétel értelmében nulla mértékűek.

A 14. tétel megadja a parciális deriváltakkal rendelkező, tehát az egyszer differenciálhatóknál (teljes differenciállal rendelkezőknél) tágabb osztályba tartozó, függvények nívóhalmazai komponenseinek tipikus topológiai szerkezetét.

A 11. tételt szintén általánosítani lehetne erre az esetre. Ezt nem fogjuk elvégezni; csak arra mutatunk rá, hogy a tétel bizonyításának megváltoztatása során az ott szereplő köröket két-két egymásra merőleges szakaszból álló „keresztekkel" kell helyettesíteni.

A kétváltozós függvények nívóhalmazainak a szerkezetét még pontosabban a kétszer differenciálható függvények esetében lehet leírni. Megjegyezzük, hogy eltérően az előző paragrafusoktól, e paragrafus tételeinek bizonyítása során lényegesen kihasználjuk az értelmezési tartomány kétdimenziós voltát. Az $n$-változós függvények esete iránt érdeklődő olvasónak figyelmébe ajánljuk E. M. LANGYISZ és a szerző közös cikkét [8].

19. definíció. Legyen $M$ síkbeli halmaz. Az $\eta \in M$ pontot *szabad körcikkel rendelkezőnek* nevezzük, ha található olyan $\eta$ csúcsú és $r$ sugarú teljes $A$ körcikk, amelyben $\eta$ az egyetlen $M$-beli pont.

28. SEGÉDTÉTEL. (I. JA. VERCSENKO és A. N. KOLMOGOROV [9]). *Legyen $M$ olyan síkbeli halmaz, amelynek minden pontja szabad körcikkel rendelkező pont. Akkor $M$ megszámlálhatóan sok rektifikálható görbén helyezkedik el.*

BIZONYÍTÁS. Osszuk fel az $M$ halmazt megszámlálhatóan sok $M(r, \varphi, \varepsilon)$ osztályra, ahol $r$, $\varphi$ és $\varepsilon$ racionális számok és az $M$-beli $\eta$ pont akkor tartozik az $M(r, \varphi, \varepsilon)$ osztályba, ha abban az $r$ sugarú, $\eta$ csúcsponttal rendelkező teljes körcikkben, amelynek tengelye az $x$ tengellyel $\varphi$ szöget alkot és amelynek a csúcsnál fekvő szöge $2\varepsilon$, az $M$ halmaznak nincs más pontja az $\eta$ ponton kívül. Megmutatjuk, hogy a $J$ egységnégyzetben bármelyik $M(r, \varphi, \varepsilon)$ halmaz pontjai véges számú rektifikálható görbén helyezkednek el. Ebből azonnal következik a segédtétel állítása. Legyen $x'y'$ az a derékszögű koordinátarendszer, amelynek $y'$ tengelye az $x$ tengellyel $\varphi$ szöget alkot. Rajzoljuk meg az $x' = nh$ egyeneseket, ahol $h < r \cos \varepsilon$ ($n = \pm 1, 2, \ldots, N$). Mindegyik az $y' = (n-1)h$ és $y' = nh$ egyenesek közötti $P_n$ sávban az $M(r, \varphi, \varepsilon)$ halmazhoz tartozó pontok olyan $f(x')$ függvény grafikonját adják, amely $\overline{K} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ állandójú *Lipschitz*-feltételnek tesz eleget. Az $f(x')$ függvény értelmezését a $J \cap M(r, \varphi, \varepsilon) \cap P_n$ metszet $x'$ tengelyen vett vetületének lezárására folytonosság útján, a kapott zárt halmazzal határos intervallumokra pedig lineárisan kiterjesztve, megkapjuk a keresett rektifikálható görbét.

29. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $S$ rektifikálható görbe a $J$ négyzetben, és legyen $F(\eta)$ a $J$ négyzeten értelmezett folytonos függvény. Legyen $\Omega$ azon pontok halmaza, amelyekben $F(\eta)$-nak van teljes differenciálja és azonkívül* grad $F(\eta) = 0$. *Akkor az $F(\eta)$ függvény $\Omega$ halmazon felvett értékeinek halmaza nulla mértékű (a $t$ tengelyen).*

BIZONYÍTÁS. Az $S$ görbén vezessük be változóként a $\tau$ ívhosszúságot. Akkor az $S$ görbén $F(\eta)$-ból egyváltozós $f(\tau)$ függvény lesz, és $\Omega$ pontjaiban $f'(\tau) = 0$. A 26. segédtétel szerint ebből következik a jelen segédtétel állítása.

15. TÉTEL (A. SZ. KRONROD és E. M. LANGYISZ). *Legyen $F(\eta)$ a $J$ négyzeten értelmezett és $J$ minden pontjában kétszer differenciálható függvény. Akkor azok a pontok, ahol* grad $F(\eta) = 0$, *a nívóknak egy (a $t$ tengelyen mérve) nulla mértékű halmazán helyezkednek el.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\Omega_1$ azon pontok halmaza, amelyekben grad $F(\eta) = 0$, vagyis $F_x(\eta) = F_y(\eta) = 0$, $\Omega_2$ pedig azon $\Omega_1$-beli pontok halmaza, amelyekben még $F_{xx}(\eta) = F_{xy}(\eta) = F_{yx}(\eta) = F_{yy}(\eta) = 0$ is teljesül.

$\Omega_1 - \Omega_2$ minden pontjához tartozik szabad körcikk, így a 28. segédtétel értelmében $\Omega_1 - \Omega_2$ megszámlálhatóan sok rektifikálható görbén helyezkedik el. A 29. segédtétel szerint ebből következik, hogy $\Omega_1 - \Omega_2$ pontjai a nívók valamely nulla mértékű rendszerén helyezkednek el. Vizsgálni kell még az $\Omega_2$ halmazt. Legyen $T$ azon nívók összessége, amelyek tartalmaznak $\Omega_2$-beli pontot. Legyen a feltevéssel ellentétben $\overline{\text{mes}}\, T = \mu > 0$. Minthogy az $F(\eta)$ függvény minden $\eta \in \Omega_2$ pontban Taylor-sorba fejthető, tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\eta$-tól függő $\delta > 0$ szám, hogy $|\eta - \xi| \leqq \delta < 1$ esetén $|F(\eta) - F(\xi)| \leqq \varepsilon |\eta - \xi|^2$.

Rajzoljuk meg mindegyik $\eta \in \Omega_2$ ponthoz a fenti $\delta$-környezetet. Minden $t_0$ értékre, amelyhez van olyan $\eta \in \Omega$, hogy $F(\eta)=t_0$, rögzítsünk *egy* ilyen $\eta$ pontot említett $\delta$-környezetével együtt. A $t$ tengelyen a $t_0$ pont körül jelöljünk ki egy $\varepsilon\delta^2$ sugarú intervallumot. Ezen intervallumok rendszeréből, amely az egész $T$ halmazt befedi, válasszunk ki véges számú egymást nem metsző intervallumot, amelyek összhosszúsága legalább $\frac{\mu}{3}$. Az értelmezési síkon a megfelelő körök nyilván nem metszik egymást, mert különböző körökhöz tartozó pontokban az $F(\eta)$ függvény különböző értékeket vesz fel.

A $t$ tengelyen fekvő $\varepsilon\delta^2$ sugarú intervallumnak a síkban valamely $\delta$ sugarú, azaz $\pi\delta^2$ területű kör felel meg. Minthogy a kiválasztott intervallumok hosszúságának összege nagyobb vagy egyenlő mint $\frac{\mu}{3}$, fennáll a $\sum_s \varepsilon\delta_s^2 \geqq \frac{\mu}{3}$, vagyis $\sum_s \pi\delta_s^2 \geqq \frac{\pi\mu}{3\varepsilon}$ egyenlőtlenség. Az $\varepsilon>0$ mennyiség megválasztása önkényes volt. Ily módon $\varepsilon<\frac{\pi\cdot\mu}{30 \text{ mes } J}$ esetén $\sum_s \pi\delta_s^2>10 \text{ mes } J$, ez pedig lehetetlen, mert köreink nem metszik egymást. Tehát valóban mes $T=0$, ami a bizonyítani kívánt tétel helyességét mutatja.

15. tételünkből és YOUNGnak a nívógörbékről szóló tételéből [13] gyorsan adódik a következő.

16. TÉTEL (A. SZ. KRONROD és E. M. LANGYISZ). *Legyen $F(\eta)$ a $J$ négyzeten értelmezett, kétszer differenciálható függvény. Akkor majdnem minden t-re az $E_t$ nívóhalmaz véges számú, minden pontjában kétszer differenciálható topológikus körből és olyan egyszerű ívből áll, amelynek végpontjai J határán vannak.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $E_t$ olyan nívóhalmaz, amelynek minden pontjában grad $F(\eta)=0$. Mindenekelőtt YOUNG tétele szerint az $E_t$ nívóhalmaz bármely $\eta \in E_t$ pont környezetében kétszer differenciálható egyszerű ív. Ebből következik, hogy a $t$ nívó komponenseinek száma véges. Mindegyik komponens lokálisan egyszerű ív, és így a 27. segédtétel értelmében minden komponens topológikus kör vagy olyan egyszerű ív, amelynek végpontjai $J$ határán vannak.

*Megjegyzés.* A 11—16. tételek nehézség nélkül átvihetők a $J$ kétdimenziós gömbfelületen értelmezett függvények esetére.

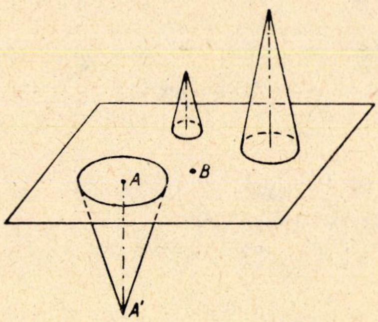
## II. fejezet

## LINEÁRIS VARIÁCIÓ

### 1. §. A lineáris variáció értelmezése. Ponttól pontig vett variáció. Pozitív és negatív, belső és határ-variáció

A variáció az egyváltozós függvények esetében jól ismert tulajdonságokkal rendelkező funkcionál. Kétváltozós függvényeknél a variációnak nincs általánosan elfogadott definíciója. Sőt, azoknak a definícióknak a többsége, amelyek kétváltozós függvények variációjára az irodalomban előfordulnak (lásd [10]), intuitive, kisebb-nagyobb mértékben, a függvény-grafikon területe fogalmának, helyesebben e grafikonnak valamilyen módon megválasztott függőleges síkokon vett vetületei területének felel meg. Minket azonban most az érdekel, lehetséges-e olyan variációt szerkeszteni, amely egy másik intuitív elképzelésnek — a függvény egyik ponttól a másikig való változásának — felel meg, amely megadja azon emelkedők és ereszkedők minimális összegét, amelyeket az utazónak be kell járni, ha függvényünk grafikonja mentén egy megadott pontból egy másikig el akar jutni. Ennek során természetesen igyekezni fogunk elkülöníteni a pozitív variációt — az emelkedők összegét — és a negatív variációt — az ereszkedők összegét. Ezek a ponttól pontig vett pozitív, negatív és teljes variációra vonatkozó intuitív követeléseink.

Szeretnénk továbbá egy olyan variációt is, amely a függvénynek nemcsak valamely ponttól pontig vezető út mentén, hanem, hogy úgy mondjuk, az egész tartományban való változását fejezi ki. Ha a függvény grafikonja véges számú különálló „kúpból" áll (4. ábra), akkor azt akarjuk, hogy az egész tartományon vett variáció az összes ilyen kúpok magasságának összege legyen, alaktól függetlenül. Ha most külön akarjuk választani, hogy úgy mondjuk, a tartományon vett pozitív és negatív variációt, akkor nyilvánvaló, hogy az ábránkon szereplő $A$ pontra vonatkozóan azt a kúpot, amelynek csúcsa az $A'$ pontban van, felfelé emelkedőnek kell tekinteni, a $B$ pontra vonatkozóan viszont lefelé süllyedőnek. Ilyenformán már jó előre látjuk, hogy a tartományon vett variáció szétesése pozitív és negatív részre bizonyos fokig függ a kiindulási ponttól.



4. ábra

Végül az összes esetekben lehetségesnek látszik a (teljes, pozitív vagy negatív, ponttól pontig vagy az egész tartományon vett) variáció azon részének megkülönböztetése, amely „kúpszerű" kiemelkedésekből és bemélyedésekből származik, és annak a résznek, amely a határig terjedő „ráncokból" adódik. Így már most látjuk, hogy a kétváltozós függvények esetében az említett típusú összes lehetséges variációk gyűjteményének valamivel terjedelmesebbnek kell lennie, mint egyetlen változó esetében.

Egyváltozós függvények esetén folytonos függvények variációját megadhatjuk a „multiplicitás függvény" segítségével a következőképpen.

Legyen $f(x)$ folytonos függvény. Jelentse $\Phi_f(t)$ azon pontok számát, amelyekben $f(x)=t$.

Nevezzük az $a$ pontot az $f(x)$ függvény *növekedési pontjának*, ha elég kicsiny $\delta>0$ számra $x<x'<x+\delta$ esetén $f(x)<f(x')$, és $x-\delta<x'<x$ esetén $f(x')<f(x)$. Az $a$ pontot *fogyási pontnak* nevezzük, ha a $-f(x)$ függvénynek növekedési pontja.

Legyen $\Phi_f^+(t)$ egyenlő azon pontok számával, amelyekben $f(x)=t$ és amelyek nem fogyási pontok, $\Phi_f^-(t)$ pedig azon pontok számával, amelyekben $f(x)=t$ és amelyek nem növekedési pontok.

Ekkor meg lehet mutatni, hogy

$$V(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_f(t)\,dt \quad \text{és} \quad V^{\pm}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_f^{\pm}(t)\,dt,$$

ahol $V(f)$, $V^+(f)$ és $V^-(f)$ rendre az $f(x)$ függvény teljes, pozitív ill. negatív variációját jelenti. Ennek a tételnek a bizonyítását a következő paragrafusban fogjuk megadni.

Kétváltozós függvény esetében is a variáció definiálásához felhasználjuk a multiplicitás függvény fogalmát.

Legyen $F(\eta)$ a $J$ tartományon értelmezett folytonos függvény és $\xi \in J$ valamely rögzített pont. Jelöljük $\Phi_F(t)$-vel a $t$ nívóhalmaz $J$-t szétválasztó komponenseinek a számát. Ily módon $\Phi_F(t)$ nemnegatív függvény, amely egész értékeket vagy a $+\infty$ értéket veheti fel. Ezt a függvényt (az $F(\eta)$ függvényre vonatkozó, szétválasztó komponensek szerinti) *multiplicitás függvénynek* fogjuk nevezni.

Továbbá, ha előre kitüntetjük az $F(\eta)$ függvény nívóhalmazai komponenseinek valamely $S$ osztályát, akkor $\Phi_F^{(S)}(t)$-*vel fogjuk jelölni a $t$ nívóhalmaz $S$-hez tartozó komponenseinek számát.* Speciálisan $S$-sel fogjuk jelölni 1) abban az esetben, amikor $J$ négyzet: a $\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)$ függvény értelmezésénél *a síkot (és nemcsak a $J$ tartományt) szétválasztó azon reguláris komponensek osztályát, amelyek a $\xi$ pontra nézve nem fogyási (illetve nem növekedési) komponensek*; a $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)$ függvény értelmezésénél *a síkot szét nem választó azon reguláris komponensek osztályát, amelyek $\xi$-re vonatkozóan nem fogyási (illetve nem növekedési) komponensek*; 2) abban az esetben, amikor $J$ gömbfelület: a $\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)$ függvény értelmezésénél *a $J$-t szétválasztó azon reguláris komponensek osztályát, amelyek a $\xi$ pontra nézve nem fogyási (illetve nem növekedési) komponensek*. A $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)$ függvények gömbefelület esetén legyenek azonosan nullával egyenlők.

A 2. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy bármely folytonos $F(\eta)$ függvényre *a $\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)$ és $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)$ multiplicitás függvények mind a négyen mérhetők mint $t$ függvényei.* A jelen paragrafus hátra levő részében az említett multiplicitás függvények *mérhetőségét fel fogjuk tételezni* anélkül, hogy ezt külön kikötnénk.

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$V(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_F(t)\,dt,\quad V_\xi^{b\pm}(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)\,dt \quad \text{és} \quad V_\xi^{h\pm}(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)\,dt.$$

Ezeket a funkcionálokat rendre az $F(\eta)$ függvény *lineáris variációjának*, az $F(\eta)$ függvény $\xi$ pontra vonatkozó *pozitív (negatív) belső variációjának*, illetve *pozitív (negatív) határ-variációjának* fogjuk nevezni.

Legyen

$$V_\xi^{\pm}(F)=V_\xi^{b\pm}(F)+V_\xi^{h\pm}(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\{\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)+\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)\}\,dt.$$

A $V_\xi^+(F)$, $V_\xi^-(F)$ funkcionálokat *teljes pozitív, ill. negatív variációnak* nevezzük ($\xi$-re vonatkozóan). Továbbá a $V^b(F)=V_\xi^{b+}(F)+V_\xi^{b-}(F)$ funkcionált az $F(\eta)$ függvény teljes *belső variációjának*, a $V^h(F)=V_\xi^{h+}(F)+V_\xi^{h-}(F)$ funkcionált pedig $F(\eta)$ teljes *határ-variációjának* nevezzük.

30. SEGÉDTÉTEL.

$$V^b(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\{\Phi_{F,\xi}^{b+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{b-}(t)\}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_F^b(t)\,dt,$$

*ahol $\Phi_F^b(t)$ a $t$ nívó síkot szétválasztó összes reguláris komponenseinek a száma abban az esetben, amikor $J$ négyzet, és egyszerűen a $t$ nívó összes reguláris komponenseinek száma, ha $J$ gömbfelület. Ily módon $V^b(F)$ nem függ $\xi$-től.*

BIZONYÍTÁS. Valóban, ha a $t$ nívó nem tartalmaz kvázi-extrémális komponenst és „nyolcasokat", akkor a növekedési és fogyási komponensek vagy kimerítik e nívó összes a síkot szétválasztó reguláris komponenseit, úgyhogy $\Phi_{F,\xi}^{b+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{b-}(t)=$ $=\Phi_F^b(t)$, vagy az utóbbiak közül legalább egy $K$ komponensnek a külső vagy belső karakterisztikája koncentrikus szingularitású komponens. Ha még azt is tekintetbe vesszük, hogy $K$-nak egyetlen pontja sem fekszik $J$ határán (ami a 7. segédtétel értelmében igaz minden $t$-re, kivéve esetleg megszámlálható sok értéket), akkor ebben az esetben a $t$ nívó az 5. segédtétel szerint végtelen sok, a síkot szétválasztó reguláris komponenst tartalmaz, ennélfogva $\Phi_F^b(t)=\infty$ és így $\Phi_F^b(t)=\Phi_{F,\xi}^{b+}(t)+$ $+\Phi_{F,\xi}^{b-}(t)$, mert

$$\Phi_{F,\xi}^{b+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{b-}(t)\geqq\Phi_F^b(t).$$

Tehát az integrálandó függvények majdnem minden $t$-re egyenlők, amivel segédtételünket bebizonyítottuk.

31. SEGÉDTÉTEL.

$$V^h(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\{\Phi_{F,\xi}^{h+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{h-}(t)\}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_F^h(t)\,dt,$$

*ahol $\Phi_F^h(t)$ az $E_t$ nívó síkot szét nem választó reguláris komponenseinek a száma. Ily módon $V^h(F)$ nem függ $\xi$-től.*

BIZONYÍTÁS. Először is nyilvánvaló, hogy $\Phi_{F,\xi}^{h+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{h-}(t)\geqq\Phi_F^h(t)$, ugyanis mindegyik a síkot szét nem választó reguláris komponens vagy nem növekedési komponens, vagy nem fogyási komponens.

Továbbá, ha a $t$ nívó tipikus, vagyis nem tartalmaz kvázi-extrémális komponenst, „nyolcast" és a síkot szétválasztó, a $J$ tartomány $C$ határát metsző komponenst (ami a 3. tétel értelmében igaz minden $t$ értékre, kivéve esetleg megszámlálható sokat), akkor a $t$ nívó vagy csupa növekedési és fogyási komponenst tartalmaz és ekkor $\Phi_{F,\xi}^{h+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{h-}(t)=\Phi_F^h(t)$, vagy a $t$ nívó valamely $K$ komponensének külső vagy belső karakterisztikája koncentrikus szingularitású komponens. Ekkor a $t$ nívó végtelen sok reguláris, a síkot szét nem választó komponenst tartalmaz, mert ha $K^*$ olyan koncentrikus szingularitású komponens, amelynek $J$ határával van közös pontja, akkor minden olyan $K'$ komponensnek is, amely $K^*$-ot egy elég kis $U\supset K^*$ környezet külsejétől elválasztja, kell hogy legyen pontja $J$ határán. Minthogy $K'\cap C\neq 0$, a $K'$ komponens nem választja szét a síkot. Tehát ebben az esetben $\Phi_F^h(t)=\infty$ és még inkább $\Phi_{F,\xi}^{h+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{h-}(t)=\infty$. Abban az esetben, amikor $K^*$ helyett $K^{**}$ szerepel, a bizonyítás szóról szóra megismételhető.

Most még definiáljuk a „$\xi$ ponttól az $\eta$ pontig vett" ${}_\xi^\eta V^{b\pm}(F)$, ${}_\xi^\eta V^{h\pm}(F)$ variációkat oly módon, hogy a megfelelő multiplicitás függvények értelmezésénél csak a $\xi$, $\eta$ pontokat elválasztó komponensekre szorítkozunk.

Ezek szerint például

$${}_\xi^\eta V^{b+}(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}{}_\xi^\eta\Phi_F^{b+}(t)\,dt,$$

ahol ${}_\xi^\eta\Phi_F^{b+}(t)$ egyenlő $E_t$ összes olyan reguláris és *a síkot szétválasztó* komponenseinek számával, ha $J$ négyzet, és egyszerűen $E_t$ összes olyan reguláris komponenseinek a számával, ha $J$ gömbfelület, amelyek nem fogyási komponensek $\xi$-re vonatkozóan és elválasztják egymástól a $\xi$ és az $\eta$ pontot.

Analóg módon értelmezhetők a ${}_\xi^\eta V^b(F)$; ${}_\xi^\eta V^h(F)$; ${}_\xi^\eta V^+(F)$; ${}_\xi^\eta V^-(F)$; ${}_\xi^\eta V(F)$ variációk.

32. SEGÉDTÉTEL.

$$
\begin{aligned}
{}_\xi^\eta V(F) &= {}_\xi^\eta V^{b+}(F) + {}_\xi^\eta V^{b-}(F) + {}_\xi^\eta V^{h+}(F) + {}_\xi^\eta V^{h-}(F) = \\
&= {}_\xi^\eta V^+(F) + {}_\xi^\eta V^-(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} {}_\xi^\eta\Phi_F^+(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} {}_\xi^\eta\Phi_F^-(t)\,dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} {}_\xi^\eta\Phi_F^r(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} {}_\xi^\eta\Phi_F(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

*ahol ${}_\xi^\eta\Phi_F^+(t)$, ${}_\xi^\eta\Phi_F^-(t)$, ${}_\xi^\eta\Phi_F^r(t)$ és ${}_\xi^\eta\Phi_F(t)$ az $E_t$ nívóhalmaz $\xi$, $\eta$ pontokat elválasztó nemfogyási, nem-növekedési (valamennyi a $\xi$ pontra vonatkozóan), reguláris, illetve tetszés szerinti komponenseinek számát jelenti.*

BIZONYÍTÁS. Először is megemlítjük, hogy ${}_\xi^\eta V^{b\pm}(F) + {}_\xi^\eta V^{h\pm}(F) = {}_\xi^\eta V^\pm(F)$, mert minden $t$-re ${}_\xi^\eta\Phi^{b\pm}(t) + {}_\xi^\eta\Phi^{h\pm}(t) = {}_\xi^\eta\Phi^\pm(t)$. Továbbá nyilvánvaló, hogy minden $t$-re ${}_\xi^\eta\Phi_F^+(t) + {}_\xi^\eta\Phi_F^-(t) \geqq {}_\xi^\eta\Phi^r(t)$, ugyanis a $t$ nívónak minden reguláris és a $\xi$, $\eta$ pontokat elválasztó komponense vagy nem növekedési, vagy nem fogyási komponens a $\xi$ pontra nézve. Ha most hasonlóan ahhoz, ahogyan a 30. és a 31. segédtételben tettük, kizárunk legfeljebb megszámlálhatóan sok nem tipikus nívót, köztük az $F(\xi)$ és az $F(\eta)$ nívót, akkor bármelyik megmaradt $t$ nívóra a $\xi$, $\eta$ pontokat elválasztó reguláris komponensek vagy mindannyian növekedési és fogyási komponensek, és akkor a ${}_\xi^\eta\Phi_F^+(t) + {}_\xi^\eta\Phi_F^-(t) = {}_\xi^\eta\Phi^r(t)$ egyenlőséget bebizonyítottuk, vagy a $t$ nívó legalább egy, a $\xi$, $\eta$ pontokat elválasztó $K$ komponensére a $K^*$, $K^{**}$ karakterisztikák egyike koncentrikus szingularitású komponens. Akkor mindegyik, $K^*$-hoz (ill. $K^{**}$-hoz) elég közeli $K'$ komponens, amely elválasztja $K^*$-ot és egy elég kicsiny $U \supset K^*$ környezet külsejét, az $\eta$ pontot is elválasztja $K^*$-tól (illetve $\xi$-t $K^{**}$-tól) és egyúttal elválasztja $\xi$-t és $\eta$-t. Minden ilyen $K'$ komponens reguláris, ezért ebben az esetben ${}_\xi^\eta\Phi_F^r(t) = \infty$, következésképpen ismét fennáll a bizonyítandó egyenlőség. Minthogy ez az egyenlőség legfeljebb megszámlálhatóan sok kivétellel minden $t$-re fennáll, kapjuk:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} {}_\xi^\eta\Phi_F^+(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} {}_\xi^\eta\Phi_F^-(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} {}_\xi^\eta\Phi_F^r(t)\,dt.$$

Hátra van még az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} {}_\xi^\eta\Phi_F^r(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} {}_\xi^\eta\Phi_F(t)\,dt$$

egyenlőség bebizonyítása. De a $\xi$, $\eta$ pontokat elválasztó és nem reguláris komponensek legfeljebb megszámlálhatóan sok nívón fordulnak elő (ugyanis, mint ismeretes, szétválasztják a $J$ tartományt), ennélfogva ${}_{\xi}^{\eta}\Phi_F^r(t)={}_{\xi}^{\eta}\Phi_F(t)$ legfeljebb megszámlálható sok kivételtől eltekintve minden $t$-re, ebből pedig következik állításunk helyessége.

Végül nyilván igaz a következő:

33. SEGÉDTÉTEL.

$$ {}_{\xi}^{\eta}V^b(F)={}_{\xi}^{\eta}V^{b+}(F)+{}_{\xi}^{\eta}V^{b-}(F) $$

és

$$ {}_{\xi}^{\eta}V^h(F)={}_{\xi}^{\eta}V^{h+}(F)+{}_{\xi}^{\eta}V^{h-}(F). $$

A 30—33. segédtételek azt mondják, hogy a bevezetett variációkra érvényesek a szokásos összefüggések: *a* (tartományon vett, ponttól pontig vett, belső, határ- vagy általános) *teljes variáció egyenlő a megfelelő pozitív és negatív variáció összegével.* Továbbá igaznak bizonyul egy másik természetes összefüggés is: *a* (teljes, pozitív, negatív, az egész tartományon vett vagy a ponttól pontig vett) *variáció egyenlő a megfelelő belső és határ-variáció összegével.*

## 2. §. A lineáris variáció mint a függvény variációja az egydimenziós fán. A multiplicitás függvények mérhetősége

A továbbiakhoz szükségünk van néhány, egyszerű íven vagy ami ugyanaz, a [0, 1] szakaszon értelmezett függvényekre vonatkozó tételre.

34. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $f(x)$ a* [0, 1] *szakaszon értelmezett folytonos függvény. Akkor a $\Phi_f(t)$, $\Phi_f^+(t)$, $\Phi_f^-(t)$ multiplicitás függvények* (lásd II. fejezet 1. §) *mérhetők.*

BIZONYÍTÁS. Először mutassuk meg a $\Phi_f(t)$ függvény mérhetőségét. Jelentse $T(\varepsilon, n)$ azon $t$ értékek összességét, amelyeknek mindegyikéhez található a $t$ nívónak $n$ számú pontja úgy, hogy távolságuk páronkint $\geqq\varepsilon$. A $T(\varepsilon, n)$ halmaz nyilván zárt. Legyen $T(n)=\sum\limits_k \left(\frac{1}{k}, n\right)$ és $T(\infty)=\prod\limits_n T(n)$. A $\Phi_f(t)$ függvény $\underset{t}{E}\{\Phi_f(t)\geqq n\}$ *Lebesgue*-halmazai a mérhető $T(n)$, $T(\infty)$ halmazok.

Most tegyük fel, hogy a $t$ nívó nem tartalmaz maximum- és minimum-helyet. Megmutatjuk, hogy ha ebben az esetben $\Phi_f(t)=\infty$, akkor egyúttal $\Phi_f^+(t)=\Phi_f^-(t)=\infty$. Valóban, ha $E_t$ nem izolált pontjainak a halmaza végtelen, akkor $\Phi_f^+(t)=\Phi_f^-(t)=\infty$. Ha viszont $E_t$ nem izolált pontjainak halmaza véges, akkor található $E_t$ izolált pontjainak egy $a_1, a_2, \ldots$ monoton sorozata, amelynek elemeit $E_t$ más pontjai nem választják el. De akkor az $(a_1, a_2)$, $(a_2, a_3)$, ... intervallumokon $f(x)$ nem veszi fel a $t$ értéket és váltakozva egyszer határozottan nagyobb, mint $t$, egyszer határozottan kisebb, mint $t$ (másképp az $a_s$ pontok egyike extrémumhely lenne). Következésképpen az $a_s$ pontok váltakozva növekedési és fogyási pontok, és ezzel a kívánt egyenlőséget bebizonyítottuk.

Maximum- és minimum-helyek legfeljebb megszámlálhatóan sok nívón fordulnak elő, így az $\underset{t}{E}\{\Phi_f^+(t)=\infty\}$, $\underset{t}{E}\{\Phi_f^-(t)=\infty\}$ *Lebesgue*-halmazok legfeljebb egy megszámlálható halmazzal térnek el a mérhető $T(\infty)$ halmaztól, tehát maguk is mérhetők.

Most megmutatjuk, hogy az $\underset{t}{E}\{\Phi_f^+(t) \geqq n\}$ és az $\underset{t}{E}\{\Phi_f^-(t) \geqq n\}$ *Lebesgue*-halmazok mérhetők. E célból bevezetjük a $h$-növekedési ($h$-fogyási) pont fogalmát. Tegyük fel, hogy vannak olyan $a < x_0 < b$ pontok, amelyekre $f(a) + h \leqq f(x_0) \leqq f(b) - h$ (illetve $f(a) - h \geqq f(x_0) \geqq f(b) + h$) és $x \in (a, x_0)$ esetén $f(x) \leqq f(x_0)$, $x \in (x_0, b)$ esetén pedig $f(x) \geqq f(x_0)$ (illetve $x \in (a, x_0)$ esetén $f(x) \geqq f(x_0)$, $x \in (x_0, b)$ esetén $f(x) \leqq f(x_0)$). Ekkor az $x_0$ pontot $h$-növekedési (illetve $h$-fogyási) pontnak nevezzük. Legyen $T$ azon $t$ nívók halmaza, amelyek nem tartalmaznak extrémum-helyet, és amelyekre $\Phi_f(t) = \infty$. Amint kimutattuk, $T$ mérhető halmaz. Legyen $\alpha$ a $h$-növekedési pontok valamely torlódási pontja. Akkor $\alpha$ nem fogyási pont. Jelentse $T(h, \varepsilon, n, +)$ azon $t$ értékek halmazát, amelyekre $E_t$ tartalmaz legalább $n$ olyan $a_1, \ldots, a_n$ $h$-növekedési pontot, amelyek páronkinti távolsága $\geqq \varepsilon$. Akkor $\overline{T}(h, \varepsilon, n, +)$ csak olyan nívókat tartalmaz, amelyek mindegyikének legalább $n$ pontja nem fogyási pont.

Legyen

$$T(h, n, +) = \sum_k T\left(h, \frac{1}{k}, n, +\right) \quad \text{és} \quad T(n, +) = \sum_l T\left(\frac{1}{l}, n, +\right).$$

A $T(n, +)$ halmaz mérhető és mindegyik $t \in T(n, +)$ nívó legalább $n$ számú nemfogyási pontot tartalmaz. Másrészt, ha $t \in T$, akkor a $t$ nívó csak növekedési és fogyási pontokat tartalmaz. Minden növekedési pont elég kis $h$-ra $h$-növekedési pont. Ebből következik, hogy ha $\Phi_f^+(t) \geqq n$ és $t \in T$, akkor $t \in T(n, +)$. Tehát $\underset{t}{E}\{\Phi_f^+(t) \geqq n\}$ a mérhető $T(n, +) \cap T$ halmaztól legfeljebb megszámlálhatóan sok $t'$ ponttal tér el (amelyekre a $t'$ nívó tartalmaz extrémum-helyet). Ebből következik az $\underset{t}{E}\{\Phi_f^+(t) \geqq n\}$ halmaz mérhetősége minden $n$-re és ezzel együtt a $\Phi_f^+(t)$ függvény mérhetősége. A $\Phi_f^-(t)$ függvény mérhetősége analóg módon bizonyítható. A 34. segédtételt teljesen bebizonyítottuk.

35. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszon értelmezett folytonos függvény, $f(a) = t_1$, $f(b) = t_2$. Akkor $t_1 < t_2$ esetén minden $t$-hez ($t_1 < t < t_2$) található a $t$ nívónak olyan $c \in [a, b]$ pontja, amely nem fogyási pont, $t_1 > t_2$ esetén pedig minden $t$-hez ($t_1 > t > t_2$) található a $t$ nívónak olyan pontja, amely $f(x)$-nek nem növekedési pontja.*

BIZONYÍTÁS. Legyen meghatározottság kedvéért $t_1 < t < t_2$. Legyen $c$ az $E_t$ halmaz leginkább jobbra fekvő pontja. Ha $c$ fogyási pont, akkor a $[c, b]$ szakaszon található olyan $d$ pont, amelyben $f(d) < t$, ennélfogva a $[d, b]$ szakaszon van olyan $e$ pont, ahol $f(e) = t$, vagyis $c$ az $E_t$ halmaznak nem a leginkább jobbra fekvő pontja. A $t_1 > t_2$ esetben a bizonyítás analóg módon történik.

Most be tudjuk bizonyítani a variációnak a multiplicitás függvény integrálja segítségével történő előállításáról szóló nevezetes tételt (lásd [6]).

17. TÉTEL. *Legyen $f(x)$ a $[0, 1]$ szakaszon értelmezett folytonos függvény. Legyen $V(f)$, $V^+(f)$ és $V^-(f)$ e függvény teljes, pozitív, illetve negatív variációja. Akkor*

$$V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f(t)\,dt, \quad V^+(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f^+(t)\,dt \quad \text{és} \quad V^-(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f^-(t)\,dt.$$

BIZONYÍTÁS. Mindenekelőtt tételünk igaz bármely szakaszonként lineáris függvényre. Most jelentse $f_n(x)$ $(n=1, 2, \dots)$ azt a függvényt, amely a $\frac{k}{n!}$ helyeken $(k=0, 1, 2, \dots, n!)$ az $f\left(\frac{k}{n!}\right)$ értékeket veszi fel, a közbenső intervallumokon pedig lineáris. Akkor fennáll

$$V^+(f_n) \leqq V^+(f), \quad V^-(f_n) \leqq V^-(f), \quad V(f_n) \leqq V(f),$$

valamint

$$V^\pm(f) = \lim_n V^\pm(f_n) \quad \text{és} \quad V(f) = \lim_n V(f_n).$$

Továbbá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^\pm_{f_n}(t)\,dt = V^\pm(f_n) \leqq V^\pm(f) \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f_n}(t)\,dt = V(f_n) \leqq V(f).$$

Az $n$ index növelésével a $\Phi^\pm_{f_n}(t)$, $\Phi_{f_n}(t)$ függvények minden egyes $t$-re monoton növekednek. Meg fogjuk mutatni, hogy majdnem minden $t$-re

$$\lim_n \Phi^\pm_{f_n}(t) = \Phi^\pm_f(t), \quad \lim_n \Phi_{f_n}(t) = \Phi_f(t).$$

Ebből következik, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^\pm_f(t)\,dt = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^\pm_{f_n}(t)\,dt = \lim_n V^\pm(f_n) = V^\pm(f)$$

és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f(t)\,dt = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f_n}(t)\,dt = \lim_n V(f_n) = V(f).$$

Legyen $t$ olyan nívó, amely nem tartalmazza $f(x)$ és az $f_n(x)$ $(n=1, 2, \dots)$ függvények egyetlen extrémum-helyét sem. Legyenek $a_1, \dots, a_k$ az $E_t$ halmazhoz tartozó és nem fogyási pontok. Legyen $\delta$ az $a_s$ pontok páronkinti távolságai közül a legkisebb. Akkor mindegyik $a_s$ pont $\frac{\delta}{4}$-sugarú környezetében található két olyan $b_s < c_s$ pont, hogy $f(b_s) < f(a_s) = t < f(c_s)$. Az $f_n(x)$ függvények egyenletesen tartanak $f(x)$-hez és ezért elég nagy $n$ értékekre $f_n(b_s) < t < f_n(c_s)$ $(s=1, 2, \dots, k)$. Akkor elég nagy $n$ mellett bármely $s$-hez található a $(b_s, c_s)$ intervallumnak olyan pontja, amely az $f_n(x)$ függvény $t$ nívójához tartozik és növekedési pont; következésképpen $\lim_n \Phi^+_{f_n}(t) \geqq \Phi^+_f(t)$ minden olyan $t$ nívóra, amely nem tartalmazza az $f(x), f_n(x)$ függvények egyetlen extrémum-helyét sem, azaz legfeljebb megszámlálhatóan sok kivétellel minden $t$-re. Most legyen $\Phi^+_{f_n}(t) = k$, és $t$-re teljesüljenek az előbbi megkötések. Akkor található $k$ számú $a_1 < b_1 \leqq \dots \leqq a_k < b_k$ pontpár úgy, hogy $f_n(a_s) = f(a_s) < t$ és $f_n(b_s) = f(b_s) > t$ $(s=1, 2, \dots, k)$. A 35. segédtétel szerint mindegyik $(a_s, b_s)$ intervallumon az $f(x)$ függvény $t$ nívójának van legalább egy pontja, amely nem fogyási pont, tehát $\Phi^+_f(t) \geqq \lim_n \Phi^+_{f_n}(t)$. Ily módon majdnem minden $t$-re $\Phi^+_f(t) = \lim_n \Phi^+_{f_n}(t)$.

Ezzel a $V^+(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f^+(t)\,dt$ egyenlőséget bebizonyítottuk. Áttérve a $-f(x)$ függvényre, azonnal kapjuk:

$$V^-(f) = V^+(-f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{-f}^+(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f^-(t)\,dt.$$

Most térjünk vissza a kétváltozós függvényekhez. Legyen $F(\eta)$ a $J$ tartományon értelmezett folytonos függvény, $\xi$ és $\zeta$ a $J$ tartomány két pontja, $T_F$ pedig az egydimenziós fa. Legyen $F^*(l)$ a megfelelő függvény $T_F$-en, és $\sigma$ az $l_\xi$, $l_\zeta$ pontokat összekötő minimális egyszerű ív $T_F$-ben. Akkor a 7. tétel szerint a $\sigma$ íven tekintett $F^*(l)$ függvény ($l_\xi$-re vonatkozó) növekedési és fogyási pontjainak egyértelműen megfelelnek az $F(\eta)$ függvény $E_t$ nívóhalmazainak ($\xi$-re vonatkozó) növekedési és fogyási komponensei. Ebből következik, hogy ${}^\zeta_\xi\Phi_F^+(t) = \Phi_{F^*}^+(t)$ és ${}^\zeta_\xi\Phi_F^-(t) = \Phi_{F^*}^-(t)$, ahol $\Phi_{F^*}^\pm(t)$ a $\sigma$ egyszerű íven tekintett $F^*(l)$ függvényhez tartozik. Ezek szerint a ${}^\zeta_\xi\Phi_F^\pm(t)$ multiplicitás függvények mérhetők. Mutassuk meg a ${}^\zeta_\xi\Phi_F^{b\pm}(t)$, ${}^\zeta_\xi\Phi_F^{h\pm}(t)$ függvények mérhetőségét arra az esetre, amikor $J$ négyzet. Ehhez előbb egy segédtételt bizonyítunk be.

36. SEGÉDTÉTEL. *Legyen a $J$ tartomány négyzet, $F(\eta)$ folytonos függvény $J$-n és $T_F$ az $F(\eta)$ függvény egydimenziós fája. Legyen $\sigma$ egy $T_F$-hez tartozó egyszerű ív. Akkor $\sigma$ azon pontjai, amelyek $J$ határát metsző komponenseknek felelnek meg, egy $\sigma_1 \subset \sigma$ egyszerű ívet alkotnak* (előfordulhat, hogy $\sigma_1 = 0$, $\sigma_1 = \sigma$ vagy $\sigma_1$ a $\sigma$ ív valamely pontja).

BIZONYÍTÁS. Legyen $l_1 \in \sigma$, $l_2 \in \sigma$ a $J$ tartomány határát metsző $K_1$, $K_2$ komponenseknek megfelelő két pont. Akkor bármely a $K_1$, $K_2$ komponenseket elválasztó komponens is metszi $J$ határát. Ebből következik, hogy $\sigma$ minden $l_1$ és $l_2$ között fekvő pontja $\sigma_1$-hez tartozik, vagyis $\sigma_1$ valóban egyszerű ív.

A 36. segédtételből azonnal következik a $\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)$, $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)$ függvények mérhetősége. Valóban, tekintsük $T_F$-nek egy végpontokra és $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ egyszerű ívekre való szabályos felbontását (lásd I. fej. 2. §); válasszuk ki mindegyik $\sigma_s$ íven azokat a pontokat, amelyek $J$ határát metsző komponenseknek felelnek meg. A 36. segédtétel szerint ezek egy $\sigma_s'$ egyszerű ívet alkotnak. Akkor a $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)$ multiplicitás függvény majdnem mindenütt egyenlő a $\sum\limits_s \Phi_{F^*,s}^\pm(t)$ összeggel, ahol $\Phi_{F^*,s}^\pm(t)$ a $\sigma_s'$ íven tekintett $F^*(l)$ függvénynek az $l_\xi$-re nézve nem fogyási (illetve nem növekedési) pontok szerint képezett multiplicitás függvénye, mert $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t) - \sum\limits_s \Phi_{F^*,s}^\pm(t)$ csak azon $t$ értékekre különbözhet nullától, amelyek $T_F$ elágazási pontjainak felelnek meg, ilyen pont pedig az 1. segédtétel értelmében legfeljebb megszámlálhatóan sok van. Analóg módon $\sigma_s - \sigma_s'$ egy vagy két egyszerű ívből áll, esetleg végpontok nélkül. Legyenek ezek az ívek $\sigma_s^{(1)}$ és $\sigma_s^{(2)}$. Legyen az $F^*(l)$ függvénynek az $l_\xi$-re nézve nem fogyási (nem növekedési) pontok szerint képezett multiplicitás függvénye (a $\sigma_s^{(1)}$, ill. $\sigma_s^{(2)}$ íven) $\Phi_{F^*,s}^{\pm(1)}(t)$, ill. $\Phi_{F^*,s}^{\pm(2)}(t)$. Akkor, ismét legfeljebb megszámlálhatóan sok $t$ érték kivételével, amelyek $\sigma_s^{(1)}$ és $\sigma_s^{(2)}$ végpontjainak és $T_F$ elágazási pontjainak felelnek meg, minden $t$-re fennáll:

$$\Phi^{b\pm}_{F,\xi}(t)-\sum_{s}\left[\Phi^{\pm(1)}_{F^*,s}+\Phi^{\pm(2)}_{F^*,s}\right]=0.$$

A $\Phi^{\pm}_{F^*,s}(t)$, $\Phi^{\pm(1)}_{F^*,s}(t)$ és $\Phi^{\pm(2)}_{F^*,s}(t)$ függvények mérhetősége következtében a $\Phi^{h\pm}_{F,\xi}(t)$, $\Phi^{b\pm}_{F,\xi}(t)$ függvények mérhetők.

Most legyen $\xi$ és $\zeta$ a $J$ tartomány két pontja. Legyen $\sigma$ az $l_\xi$, $l_\zeta$ pontokat összekötő minimális egyszerű ív. Legyen $\sigma'\subset\sigma$ a $\sigma$ ív azon pontjaiból álló egyszerű ív, amelyek $J$ határát metsző komponenseknek felelnek meg. Legyen $\sigma=\sigma'+\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}$, ahol $\sigma^{(1)}$ és $\sigma^{(2)}$ két egyszerű ív, esetleg végpontok nélkül. Ha $\Phi^{h\pm}_{F^*}(t)$, $\Phi^{b\pm(1)}_{F^*}(t)$, $\Phi^{b\pm(2)}_{F^*}(t)$ az $F^*(l)$ függvény, $\sigma'$ $\sigma^{(1)}$, ill. $\sigma^{(2)}$ ívhez tartozó multiplicitás függvényét jelenti azon pontok szerint, amelyek $l_\xi$-re nézve nem fogyási (nem növekedési) pontok, akkor fennáll ${}^{\zeta}_{\xi}\Phi^{h\pm}_{F}(t)=\Phi^{h\pm}_{F^*}(t)$ és ${}^{\zeta}_{\xi}\Phi^{b\pm}_{F}(t)=\Phi^{b\pm(1)}_{F^*}(t)+\Phi^{b\pm(2)}_{F^*}(t)$, ahol az első egyenlőség minden $t$-re, a második pedig a $\sigma'$ végpontjainak megfelelő $t_1$, $t_2$ értékek esetleges kivételével minden $t$-re érvényes. Ebből következik a ${}^{\zeta}_{\xi}\Phi^{b\pm}(t)$, ${}^{\zeta}_{\xi}\Phi^{\pm}_{h}(t)$ függvények mérhetősége.

A kapott eredményeket összefoglalva, a multiplicitás függvények mérhetőségéről az alábbi tételt nyerjük.

18. TÉTEL. *Tetszés szerinti, a $J$ tartományon értelmezett $F(\eta)$ folytonos függvényre és tetszés szerinti $\xi,\zeta$ pontokra a ${}^{\zeta}_{\xi}\Phi^{\pm}_{F}(t)$, ${}^{\zeta}_{\xi}\Phi^{b\pm}_{F}(t)$, ${}^{\zeta}_{\xi}\Phi^{h\pm}_{F}(t)$, $\Phi^{\pm}_{F,\xi}(t)$, $\Phi^{b\pm}_{F,\xi}(t)$, $\Phi^{h\pm}_{F,\xi}(t)$ függvények $t$ mérhető függvényei.*

Ezenfelül a ponttól pontig vett variációk és az $F(\eta)$ függvény valamely tartományon vett lineáris variációja új definícióját kaptuk.

20. definíció. A $\xi=a_0, a_1, \dots, a_n=\zeta$ pontsorozatot $\xi-\zeta$*-láncnak* nevezzük (az adott $F(\eta)$ folytonos függvényre vonatkozóan), ha a $K_s\ni a_s$ $(s=1,2,\dots,n)$ nívóhalmaz-komponens elválasztja a $K_{s-1}$, $K_{s+1}$ komponenseket.

19. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény a szokásos tartományon. Legyen $|A|^+=A$, ha $A\geqq 0$; $|A|^+=0$, ha $A\leqq 0$ és $|A|^-=|-A|^+$. Akkor*

$${}^{\zeta}_{\xi}V(F)=\sup\sum_{s=1}^{n}|F(a_s)-F(a_{s-1})|$$

*és*

$${}^{\zeta}_{\xi}V^{\pm}(F)=\sup\sum_{s=1}^{n}|F(a_s)-F(a_{s-1})|^{\pm},$$

*ahol a felső határ mindenütt az összes lehetséges, tetszés szerinti $n$ számú pontból álló, $\xi-\zeta$-láncra képezendő.*

BIZONYÍTÁS. Valóban, legyen $T_F$ az $F(\eta)$ függvény egydimenziós fája. Legyen $l_\xi$ és $l_\zeta$ a $T_F$ fa azon két pontja, amely a $\xi$, ill. $\zeta$ pontot tartalmazó komponensnek felel meg. Legyen $a_0, a_1, \dots, a_n$ valamely $\xi-\zeta$-lánc a 20. definícióban megadott értelemben. Legyen $T_F$ megfelelő pontjainak sorozata $l_\xi=l_0, l_1, \dots, l_n=l_\zeta$. Akkor

$${}^{\zeta}_{\xi}V^{\pm}(F)={}^{\zeta}_{\xi}V^{\pm}(F^*)\geqq\sum_{s=1}^{n}|F^*(l_s)-F^*(l_{s-1})|^{\pm}=\sum_{s=1}^{n}|F(a_s)-F(a_{s-1})|^{\pm},$$

ahol $F^*(l)$ az $F(\eta)$-nak megfelelő függvény $T_F$-en, ${}_{\xi}^{\zeta}V^{\pm}(F^*)$ pedig $F^*(l)$ pozitív (negatív) variációja az $l_\xi$, $l_\zeta$ pontokat összekötő minimális $\sigma$ egyszerű íven. Analóg módon, ha $l_0 = l_\xi, l_1, \ldots, l_n = l_\zeta$ monoton pontsorozat a $\sigma$ íven, akkor az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sorozat, ahol $a_s$ az $E_t$ nívóhalmaz $l_s$-nek megfelelő $K_s$ komponenséhez tartozik, $\xi - \zeta$-láncot alkot. Ennélfogva

$${}_{\xi}^{\zeta}V^{\pm}(F) = V^{\pm}(F^*) = \sup \sum_{s=1}^{n} |F^*(l_s) - F^*(l_{s-1})|^{\pm} = \sup \sum_{s=1}^{n} |F(a_s) - F(a_{s-1})|^{\pm},$$

és ezt kellett bebizonyítani.

Analóg módon

$${}_{\xi}^{\zeta}V(F) = \sup \sum_{s=1}^{n} |F(a_s) - F(a_{s-1})|.$$

A ${}_{\xi}^{\zeta}V^{b\pm}(F)$, ${}_{\xi}^{\zeta}V^{h\pm}(F)$ variációk és az egész tartományon vett variációk definíciójának analóg módon való megfogalmazását az olvasóra bízzuk.

E paragrafus befejezéseként bebizonyítjuk még a következő, csaknem nyilvánvaló tételt négyzeten értelmezett függvény *határ*-variációjáról.

20. TÉTEL. *Legyen $J$ a négyzet és $F(\eta)$ folytonos függvény $J$-n. Akkor $V^h(F) = \frac{1}{2} V_C(F)$ (ahol $V_C(F)$ az $F$ függvény variációja a $J$ négyzet $C$ határán), ha $V^h(F) < +\infty$ és $V^h(F) = V_C(F) = +\infty$ az ellenkező esetben.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\Phi_C(t)$ a $J$ négyzet $C$ határán tekintett $F(\eta)$ függvényre vonatkozó multiplicitás függvény. Akkor a 17. tétel értelmében $V_C(F)$ kifejezhető a következőképpen:

$$V_C(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_C(t)\,dt.$$

Továbbá

$$V^h(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F^h(t)\,dt.$$

Hasonlítsuk össze a $\Phi_C(t)$ és a $\Phi_F^h(t)$ függvényt. Mindenekelőtt olyan $t$ nívó, amely a $J$-n tekintett és a $C$-n tekintett $F(\eta)$ függvénynek is tartalmazza legalább egy extrémum-helyét, legfeljebb megszámlálhatóan sok van. Legyen továbbá $\zeta \in C \cap E_t$ és tegyük fel, hogy $\zeta$, bár az $F(\eta)$ függvénynek nem extrémum-helye $C$-n, mégis valamely $J$-t szét nem választó $K \subset E_t$ komponenshez tartozik. Akkor $\zeta$-hoz bármilyen közel található olyan $\zeta_1$ és $\zeta_2$ pont a $C$ határon, hogy $F(\zeta_1) < t < F(\zeta_2)$. De a $\zeta_1, \zeta_2$ pontokat az $E_t$ nívóhalmaz, és így valamely $K' \subset E_t$ komponens is elválasztja. Ennélfogva $K' \neq K$ és $K' \cap C \neq 0$. Ily módon a $C$ határon $\zeta$-hoz tetszés szerinti közelségben található olyan pont, amely $E_t$-nek egy $J$-t szétválasztó komponenséhez tartozik. Ezért $\Phi_C(t) = \Phi_F^h(t) = \infty$.

Végül tegyük fel, hogy a $K$ komponens metszi $C$-t és a közös pontok száma kettőnél több. Legyen $aK \cap \in C$, $b \in K \cap C$ és $c \in K \cap C$. Akkor vagy az $ab$, $bc$, $ca$ ívek egyike teljesen $E_t$-ben fekszik, vagy $C$-n található a $CE_t$ kiegészítő halmaznak három $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ pontja, amely rendre a $bc$, $ca$ és $ab$ ívhez tartozik. Ebben az esetben

$K$ páronkint elválasztja az $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ pontokat (ez *Jordan* tételéből következik), és így $K$ legalább három tartományra választja szét a $J$ négyzetet. Az 1. segédtétel szerint ilyen komponensek legfeljebb megszámlálható sok nívón fordulnak elő. Olyan $K$ komponens, amely tartalmazza $C$-nek valamely ívét, szintén legfeljebb megszámlálhatóan sok van.

Ily módon, esetleg megszámlálható sok nívón elhelyezkedő komponensek kivételével, minden komponens metszi $C$-t, de legfeljebb két közös pontja van vele. Ebből következik, hogy $\Phi_C(t) \leqq 2\Phi_F^h(t)$ majdnem minden $t$-re. Továbbá ha a $K$ komponensnek $C$-vel csak egy közös pontja van, akkor vagy $K$ szétválasztja $J$-t, ami a 7. segédtétel szerint legfeljebb megszámlálható sok nívóhoz tartozó komponensekre állhat fenn, vagy $K$ nem választja szét $J$-t, és akkor, amint fentebb megmutattuk, $\Phi_C(t) = \Phi_F^h(t) = \infty$ minden ilyen $t$-re, kivéve esetleg megszámlálhatóan sokat.

Tehát majdnem minden $t$-re vagy $\Phi_C(t) = 2\Phi_F^h(t)$, vagy $\Phi_C(t) = \Phi_F^h(t) = \infty$. Ha az utóbbi egyenlőség nulla mértékű halmazon teljesül, akkor

$$V^h(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F^h(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_C(t)\,dt = \frac{1}{2} V_C(F).$$

Ha viszont $\Phi_C(t) = \Phi_F^h(t) = \infty$ a nívók valamely pozitív mértékű rendszerén, akkor

$$V_C(t) = V_F^h(t) = \infty.$$

Foglaljuk össze ennek a paragrafusnak az eredményeit. Bebizonyítottuk, hogy a $V(F)$ lineáris variáció, továbbá az $F(\eta)$ függvény ponttól pontig vagy az egész tartományon vett (adott pontra vonatkozó) pozitív és negatív, belső és határ-variációja visszavezethető az $F(\eta)$ függvény $T_F$ egydimenziós fáján értelmezett $F^*(l)$ függvény megfelelő variációira. Azonkívül bebizonyítottuk az összes multiplicitás függvények mérhetőségét. Ezáltal bebizonyítottuk a variációk definíciójának jogosságát és a variációk közötti $V(F) = V^+(F) + V^-(F)$ típusú szokásos összefüggéseket is, amelyeket az előző paragrafus végén a multiplicitás függvények mérhetőségének feltételezése mellett kaptunk.

Végül az $F(\eta)$ függvény határ-variációját kifejeztük a határon vett variációja segítségével, ami talán kissé indokolja az elnevezést.

## 3. §. A ${}_\xi^\zeta V(f)$ lineáris variációnak mint a $\zeta$ pont függvényének tulajdonságai. Korlátos lineáris variációjú függvény felbontása két monoton függvény különbségére

Legyen $F(\eta)$ rögzített folytonos függvény a szokásos tartományban (négyzet vagy gömbfelület), és legyen $\xi$ tetszés szerinti pont. Megmutatjuk, hogy a ${}_\xi^\zeta V^{\cdot\cdot}(F)$ mennyiségek (ahol a pontok helyébe a $b^\pm$ és $h^\pm$ indexpárok bármelyike írható) *a $\zeta$ pont függvényeként* tekintve folytonosak és $\xi$-re nézve monoton növekedők, hacsak $F(\eta)$ *korlátos lineáris variációjú* függvény, vagyis ha $V(F) < +\infty$.

Továbbá meg fogjuk mutatni, hogy ebben az esetben

$$F(\zeta) - F(\xi) = {}_\xi^\zeta V^+(F) - {}_\xi^\zeta V^-(F),$$

és hogy ez a felbontás bizonyos értelemben minimális.

Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy ha nem követeljük meg $F(\eta)$ lineáris variációjának korlátosságát, hanem mondjuk csak a ${}^{\zeta}_{\xi}V(F)$ variációk ($\zeta$ pontok szerinti) egyenletes korlátosságát, akkor előfordulhat, hogy a ${}^{\zeta}_{\xi}V(F)$ variáció mint a $\zeta$ pont függvénye nem folytonos. Ismertetünk egy erre vonatkozó példát.

Legyen $\{K_n\}$ az $\frac{1}{2^{4n}}$ sugarú, $\left(\frac{1}{2^n}, 0\right) = a_n$ középpontú $K_n$ körök sorozata. Legyen

$$F(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad \eta \notin \sum\limits_n K_n, \\ \frac{1}{2^{4n+1}} \sin(2^{8^n}\pi\varrho_n) & \text{ha} \quad \eta \in K_n, \end{cases}$$

ahol $\varrho_n$ az $\eta$ pont $a_n$-től mért távolsága.

Akkor ${}^{a_n}_{\xi}V^{\pm}(F) = 1$ ($\xi = (0, 0)$); *minden* $\zeta$ pontra ${}^{\zeta}_{\xi}V^{+}(F) \leqq 1$; és ${}^{\zeta}_{\xi}V^{+}(F)$, ${}^{\zeta}_{\xi}V^{-}(F)$, ${}^{\zeta}_{\xi}V(F)$ mint $\zeta$ függvényei nem folytonosak a $\zeta = \xi = (0, 0)$ helyen.

Bebizonyítjuk, hogy ha $V(F) < +\infty$, akkor ilyen eset nem fordulhat elő.

37. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a szokásos $J$ tartományon értelmezett, folytonos függvény, és tegyük fel, hogy $F(\eta)$ lineáris variációja korlátos: $V(F) < +\infty$. Akkor ${}^{\eta}_{\xi}V^{b\pm}(F)$, ${}^{\eta}_{\xi}V^{h\pm}(F)$, ${}^{\eta}_{\xi}V^{b}(F)$, ${}^{\eta}_{\xi}V^{h}(F)$, ${}^{\eta}_{\xi}V^{\pm}(F)$ és ${}^{\xi}_{\eta}V(F)$ az $\eta$ pontnak folytonos függvényei.*

BIZONYÍTÁS. Minthogy $V(F) < +\infty$ és $V(F) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F(t)dt < +\infty$, a $\Phi_F(t)$ függvény $t$ szerint integrálható és az

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \Phi_F(t)dt$$

függvény abszolút folytonos. Az abszolút folytonos függvény definíciója szerint bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|t_2 - t_1| < \delta(\varepsilon)$ esetén

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \Phi_F(t)dt < \varepsilon.$$

Most legyen a $\theta(\varepsilon) > 0$ szám olyan, hogy az $F(\eta)$ függvényre $|\eta_2, \eta_1| < \theta(\varepsilon)$ esetén fennáll $|F(\eta_2) - F(\eta_1)| < \frac{1}{2}\,\delta(\varepsilon)$. Legyenek $a$, $b$ a $J$ tartomány tetszés szerinti pontjai, amelyekre $\varrho(a, b) < \theta(\varepsilon)$. Akkor ${}^{a}_{\xi}V^{\cdot\cdot} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} {}^{a}_{\xi}\Phi^{\cdot\cdot}(t)dt$ és ${}^{a}_{\xi}V^{\cdot\cdot} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} {}^{b}_{\xi}\Phi^{\cdot\cdot}(t)dt$; minden a $\xi$, $a$ pontokat elválasztó, de a $\xi$, $b$ pontokat nem elválasztó komponens elválasztja $a$-t és $b$-t, és ugyanez vonatkozik a $\xi$, $b$ pontokat elválasztó, de $\xi$-t és $a$-t nem elválasztó komponensekre. De az $a$, $b$ pontokat elválasztó komponensek mindnyáján $F(a) - \frac{\delta(\varepsilon)}{2}$ és $F(a) + \frac{\delta(\varepsilon)}{2}$ közötti nívókhoz tartoznak és így a $t$ változónak egy $\delta(\varepsilon)$ hosszúságú intervallumához tartoznak. De akkor a multiplicitás függvénynek az összes ilyen komponenseken vett integrálja nem haladja meg az $\varepsilon$ értéket, következésképpen $|{}^a_\xi V^{\cdot\cdot}(F)-{}^b_\xi V^{\cdot\cdot}(F)|<\varepsilon$, ugyanis minden más komponens egyszerre választja el vagy nem választja el $\xi$-t $a$-tól és $\xi$-t $b$-től, és ezért egyszerre járul vagy nem járul hozzá a ${}^a_\xi\Phi^{\cdot\cdot}_F(t)$ és a ${}^b_\xi\Phi^{\cdot\cdot}_F(t)$ multiplicitás függvényhez.

Tehát $\varrho(a,b)<\theta(\varepsilon)$ fennállásából következik $|{}^a_\xi V^{\cdot\cdot}(F)-{}^b_\xi V^{\cdot\cdot}(F)|<\varepsilon$, ami azt jelenti, hogy az összes variációk valóban folytonosak.

Most megmutatjuk, hogy az $F(\eta)$ függvény $\xi$-től $\zeta$-ig vett pozitív és negatív variációja monoton növekvő függvény (a $\xi$ pontra nézve). Ehhez szükségünk lesz a következő nyilvánvaló segédtételre.

38. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a $J$ tartományon értelmezett folytonos függvény, $\xi\in J$ tetszés szerinti pont és $K$ valamely nívóhalmaz tetszés szerinti komponense. A ${}^\lambda_\xi V^{b\pm}(F)$, ${}^\lambda_\xi V^{h\pm}(F)$ variációk mint a $\lambda$ pont függvényei állandók a $K$ halmazon.*

39. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény a szokásos $J$ tartományon és legyen $V(F)<+\infty$. Akkor bármely $\xi\in J$ pontra a $\varphi(\eta)={}^\eta_\xi V^+(F)$, $\psi(\eta)={}^\eta_\xi V^-(F)$ függvények monoton növekednek ($\xi$-re vonatkozóan).*

BIZONYÍTÁS. A $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$ függvények a 37. segédtétel értelmében folytonosak. Legyen $\tilde{K}\not\ni\xi$ a $\varphi(\eta)$ függvény $t$ nívójának valamely reguláris komponense, továbbá $J_1\ni\xi$ és $J_2$ azok a komponensek, amelyekre $\tilde{K}$ felosztja $J$-t. Legyen $\zeta\in J_2$. Megmutatjuk, hogy $\varphi(\zeta)\geqq t$. Az $F(\eta)$ függvény nívóhalmazainak a $\xi,\zeta$ pontokat elválasztó komponensei egyesítve egy $D$ kontinuumot alkotnak (az $l_\xi$, $l_\zeta$ pontokat összekötő minimális $\sigma\subset T_F$ egyszerű ív inverz képét). Fennáll $D\supset\xi+\zeta$, ezért $\tilde{K}\cap D\neq 0$. Legyen $a\in\tilde{K}\cap D$. Akkor az $F(\eta)$ függvény $K\ni a$ nívóhalmaz-komponensén a $\varphi(\eta)$ függvény állandó és $\varphi(a)=t$. Minthogy $\tilde{K}$ elválasztja $\xi$-t és $\zeta$-t, ebből, tekintettel a 19. tételre, következik, hogy $\varphi(\zeta)\geqq\varphi(a)=t$. Legyen továbbá $\varkappa\in J_1\cap D$. Legyen $K\ni\varkappa$ az $F(\eta)$ függvény nívóhalmaz-komponense; $K$ elválasztja a $\xi$ és az $a\in\tilde{K}\cap D$ pontot. Akkor $K$ nem metszi a $\tilde{K}$ komponenst, mert különben a 38. segédtétel szerint $K\subset\tilde{K}$ lenne. Következésképpen $K$ elválasztja a $\xi$ pontot és a $\tilde{K}$ komponenst, és a fentebb bizonyítottak értelmében $\varphi(\varkappa)\leqq\varphi(a)=t$. A bizonyítottakból következik, hogy az $l_\xi$, $l_\zeta$ pontokat összekötő $\sigma\subset T_\varphi$ egyszerű íven, ahol $\zeta\in J_2$, a $\varphi^*(l)$ függvény monoton növekszik $l_\xi$-re vonatkozóan. Minthogy a $\zeta$ pont tetszés szerinti, a 7. tétel alapján ez azt jelenti, hogy $\varphi(\eta)$ a $\xi$ pontra nézve monoton növekedő függvény.

A $\psi(\eta)$ függvényre a bizonyítás analóg módon történik.

40. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ korlátos lineáris variációjú folytonos függvény. Legyen $\xi$ és $\zeta$ két tetszés szerinti pont. Akkor*

$$F(\zeta)-F(\xi)={}^\zeta_\xi V^+(F)-{}^\zeta_\xi V^-(F).$$

BIZONYÍTÁS. Valóban, legyen $T_F$ az $F(\eta)$ függvény egydimenziós fája, $l_\xi$ és $l_\zeta$ a $T_F$ fa azon pontjai, amelyek a $\xi$, ill. $\zeta$ pontot tartalmazó komponenseknek felelnek meg, $\sigma$ pedig az $l_\xi$, $l_\zeta$ pontokat összekötő minimális egyszerű ív $T_F$-ben. Legyen $F^*(l)$ az $F(\eta)$-nak megfelelő függvény $T_F$-en. Tekintsük az $F^*(l)$ függvényt csak a $\sigma$ íven. E fejezet 2. §-ának eredményei értelmében $V^\pm(F^*)={}^\zeta_\xi V^\pm(F)$. De $F(\zeta)-F(\xi)=$ $=F^*(l_\zeta)-F^*(l_\xi)$. Minthogy $F^*(l)$ korlátos variációjú függvény a $\sigma$ egyszerű íven, fennáll:

$$F^*(l_\zeta)-F^*(l_\xi) = V^+(F^*)-V^-(F^*),$$

ennélfogva $F(\zeta)-F(\xi) = {}_\xi^\zeta V^+(F)-{}_\xi^\zeta V^-(F)$, és ezt kellett bebizonyítani.

21. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a $J$ tartományon értelmezett, korlátos lineáris variációjú, folytonos függvény, és $\xi \in J$ tetszés szerinti pont. Akkor:*

1. *Az $F(\eta)$ függvény előállítható két, a $\xi$ pontra nézve monoton növekedő, folytonos függvény különbségeként.*

2. *Ilyen függvényeket szolgáltat a $\xi$-től $\eta$-ig vett pozitív és negatív variáció mint a változó $\eta$ pont függvényei: $F(\xi)+{}_\xi^\eta V^+(F)$ és ${}_\xi^\eta V^-(F)$.*

3. *Az $F(\eta) = F(\xi)+{}_\xi^\eta V^+(F)-{}_\xi^\eta V^-(F)$ előállítás minimális, vagyis ha $\varphi_1(\eta)$ és $\varphi_2(\eta)$ két, $\xi$-re nézve monoton növekedő, folytonos függvény, $F(\eta) = \varphi_1(\eta)-\varphi_2(\eta)$ és $\varphi_1(\xi) = F(\xi)$, akkor minden $\eta \in J$ pontban $\varphi_1(\eta) \geqq F(\xi)+{}_\xi^\eta V^+(F)$ és $\varphi_2(\eta) \geqq {}_\xi^\eta V^-(F)$.*

BIZONYÍTÁS. Az 1. és 2. pontot és az $F(\eta) = F(\xi)+{}_\xi^\eta V^+(F)-{}_\xi^\eta V^-(F)$ egyenlőséget már bebizonyítottuk a 37., 39. és 40. segédtételben. Hátra van még a 3. állítás bebizonyítása. Felhasználjuk a 19. tétel eredményét. Legyenek $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$ folytonos és a $\xi$ pontra nézve monoton növekedő függvények, $F(\eta) = \varphi_1(\eta)-\varphi_2(\eta)$, $\varphi_1(\xi) = F(\xi)$. Legyen $\xi = a_0, \ldots, a_n = \eta$ valamely $\xi-\eta$-lánc a 20. definícióban megadott értelemben, és az előre megadott $\varepsilon > 0$ számra teljesüljön

$${}_\xi^\eta V^\pm(F) \leqq \sum_{s=1}^{n} |F(a_s)-F(a_{s-1})|^\pm + \varepsilon.$$

Legyen $K_s \ni a_s$ az $F(\eta)$ függvény megfelelő nívóhalmaz-komponense. Minthogy $K_s$ zárt halmaz és $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$ folytonos függvények, $K_s$-nek van olyan $b_s$ pontja, amelyben a $\varphi_1(\eta)$ függvény $K_s$-ben minimális értéket vesz fel. Mivel $\varphi_1(\eta)-\varphi_2(\eta) = F(\eta)$ és $F(\eta)$ a $K_s$ halmazon állandó, a $b_s$ pontban $\varphi_2(s)$ is felveszi $K_s$-beli minimális értékét. Helyettesítsük az $\{a_s\}$ láncot a $\{b_s\}$ lánccal. Megjegyezzük, hogy ennek során lehetséges a $b_0 = a_0 = \xi$ választás. Valóban, ellenkező esetben $\varphi_1(b_0) < \varphi_1(a_0)$ és ugyanakkor $\varphi_2(b_0) < \varphi_2(a_0) = \varphi_2(\xi) = 0$ lenne. De $\varphi_2(\eta)$ a feltevés szerint $\xi$-re nézve monoton növekedő függvény, következésképpen a $\xi$ pontban a $\varphi_2(\eta)$ függvény (a 8. tételt követő megjegyzés értelmében) minimális, tehát $\varphi_2(b_0) < 0$ nem lehetséges és feltehetjük, hogy $\varphi_2(b_0) = \varphi_2(a_0) = \varphi_2(\xi)$.

Most bebizonyítjuk a $\varphi_1(b_{s+1})-\varphi_1(b_s) \geqq 0$, $\varphi_2(b_{s+1})-\varphi_2(b_s) \geqq 0$ egyenlőtlenségeket. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben az egyik egyenlőtlenség nem érvényes. Meghatározottság kedvéért legyen $\varphi_1(b_{s+1}) < \varphi_1(b_s)$. A $K_s$ komponens elválasztja a $\xi$, $b_{s+1}$ pontokat. Továbbá a $K_s$ halmazon mindenütt $\varphi_1(\eta) \geqq \varphi_1(b_s)$. Ezek szerint a $\xi$, $b_{s+1}$ pontokat elválasztja az az $\overline{M}_{\varphi_1(b_s)}$ halmaz, amely a $\varphi_1(\eta) \geqq \varphi_1(b_s)$ tulajdonságú pontokból áll. De akkor az $\underline{M}_{\varphi_1(b_{s+1})}$ halmaz, amely a $\varphi_1(\eta) \leqq \varphi_1(b_{s+1})$ egyenlőtlenséget kielégítő összes pontokból áll, nem összefüggő, mert $\xi \in \underline{M}_{\varphi_1(b_{s+1})}$, $b_{s+1} \in \underline{M}_{\varphi_1(b_s)}$, és az $\underline{M}_{\varphi_1(b_{s+1})}$ halmazt nem metsző $\overline{M}_{\varphi_1(b_s)}$ halmaz elválasztja $\xi$-t és $b_{s+1}$-et. Az $\underline{M}_{\varphi_1(b_{s+1})}$ halmaz össze nem függő volta a 8. tétel értelmében ellentmond $\varphi_1(\eta)$ monotonitásának, és így a $\varphi_1(b_{s+1}) \geqq \varphi_1(b_s)$ egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

A második egyenlőtlenség bizonyítása analóg módon történik.

Fennáll

$$F(b_{s+1})-F(b_s) = [\varphi_1(b_{s+1})-\varphi_1(b_s)]-[\varphi_2(b_{s+1})-\varphi_2(b_s)].$$

A bizonyítottak szerint a jobb oldalon álló szögletes zárójelek mindegyike *nem-negatív*. Tehát ha $F(b_{s+1})-F(b_s)\geqq 0$, akkor

$$\varphi_1(b_{s+1})-\varphi_1(b_s) \geqq F(b_{s+1})-F(b_s).$$

Ha pedig

$$F(b_{s+1})-F(b_s) \leqq 0,$$

akkor

$$\varphi_2(b_{s+1})-\varphi_2(b_s) \geqq -\{F(b_{s+1})-F(b_s)\}.$$

Tekintetbe véve még a

$$\varphi_1(b_{s+1}) \geqq \varphi_1(b_s), \quad \varphi_2(b_{s+1})\geqq \varphi_2(b_s)$$

egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy mindig fennáll

$$\varphi_1(b_{s+1})-\varphi_1(b_s) \geqq |F(b_{s+1})-F(b_s)|^+$$

és

$$\varphi_2(b_{s+1})-\varphi_2(b_s) \geqq |F(b_{s+1})-F(b_s)|^-.$$

Ily módon

$$\varphi_1(\eta)\geqq\varphi_1(b_n)=\varphi_1(\xi)+\sum_{s=1}^{n-1}[\varphi_1(b_{s+1})-\varphi_1(b_s)]\geqq$$

$$\geqq F(\xi)+\sum_{s=1}^{n-1}|F(b_{s+1})-F(b_s)|^+\geqq F(\xi)+{}_\xi^\eta V^+(F)+\varepsilon.$$

Minthogy $\varepsilon$ tetszőlegesen kicsi, innen következik, hogy

$$\varphi_1(\eta)\geqq F(\xi)+{}_\xi^\eta V^+(F).$$

Analóg módon találjuk:

$$\varphi_2(\eta)\geqq {}_\xi^\eta V^-(F),$$

és ezzel a 21. tételt teljesen bebizonyítottuk.

## 4. §. A lineáris variáció mint funkcionál tulajdonságai

Ebben a paragrafusban függvények tartományon (nem pedig ponttól pontig) vett variációjának tulajdonságait vizsgáljuk. Mindenekelőtt definícióink értelmében *mindegyik variáció* a $J$ tartományon folytonos függvényeken értelmezett *nem-negatív funkcionál.*

Most vizsgáljuk meg, hogyan viselkednek a variációk az értelmezési tartomány önmagára való homeomorf leképezése során. Ez pontosabban a következőt jelenti.

Legyen $J$ az értelmezési tartomány és $\tau$ a $J$ tartomány önmagára való homeomorf leképezése, amely az $\eta\in J$ pontot a $\tau(\eta)$ pontba viszi át. Legyen $F(\eta)$ a $J$ tartomány pontjaiban megadott függvény. Vezessük be az $\tilde{F}[\tau(\eta)]=F(\eta)$ jelölést. Ily módon az értelmezési tartománnyal együtt mintegy elmozdítottuk a függvény grafikonját is.

A maximumot, félmaximumot, minimumot, félminimumot szolgáltató és a koncentrikus szingularitású komponensek definíciója invariáns a $J$ tartomány önmagára való homeomorf leképezéseivel szemben. Valamely kontinuumnak az a tulajdonsága, hogy két pontot elválaszt egymástól, illetve hogy a síkot szétválasztja vagy nem választja szét (abban az esetben, amikor $J$ négyzet), szintén invariáns $J$ önmagára való homeomorf leképezésével szemben. Ennélfogva a szétválasztó komponenseknek a 2. tételben megadott osztályozása *invariáns a $J$ tartomány önmagára való homeomorf leképezéseivel szemben.*

Ennek során ha a homeomorf leképezés előtt az osztályozás a $\xi$ pontra vonatkozott, akkor a $\tau$ homeomorfizmus után az osztályozást a $\tau(\xi)$ pontra vonatkozóan kell megadni. Speciálisan, a nívóhalmaz-komponensek osztályozása és ezzel együtt a variációk definíciója invariáns $J$ azon homeomorf leképezéseivel szemben, amelyek a $\xi$ pontot a helyén hagyják. Nézzük meg azonban, *nem függetlenek-e* egyes variációk *a $\xi$ ponttól.* Gömbfelület esetében csak a teljes variáció ilyen. Négyzet esetében viszont a helyzet kissé bonyolultabb. Mindenekelőtt ilyen a $V^b(F)$ *belső és a* $V^h(F)$ *határ-variáció,* és természetesen összegük, a $V(F)$ *lineáris variáció.*

A $V_\xi^{h\pm}(F)$ variációk a $\xi$ pont semmilyen megválasztása esetén sem invariánsak $J$ önmagára való homeomorf leképezéseivel szemben, ha a leképezés a $\xi$ pontot nem hagyja a helyén. Másképpen áll a dolog a *belső* pozitív és negatív variációval. Ebben az esetben, érthető módon, a $\xi$ pont *tetszés szerinti* megválasztása mellett a $V^{b\pm}(F)$ variációk *függnek $\xi$-től.* Ha azonban $\xi$ a határ valamely pontja, akkor a $J$ értelmezési tartomány önmagára való $\tau$ homeomorfizmusánál a $\xi$ pont $\tau(\xi)$ képe ismét határpont. Meg fogjuk mutatni, hogy a $V_\xi^{b\pm}(F)$ *mennyiségek, ha a határon fekvő $\xi$ pontokra szorítkozunk, nem függnek attól, hogy a határnak éppen melyik pontját választottuk $\xi$-nek.* Ily módon (abban az esetben, amikor $J$ négyzet) *nem függ a $\xi$ ponttól a teljes határ-variáció, továbbá a* csak határpontokra vonatkozóan tekintett *pozitív és negatív belső variáció.* Természetes, hogy ezeknek a lineáris kombinációi is rendelkeznek az említett tulajdonsággal. Tehát a következő segédtételt kell bebizonyítanunk:

41. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a $J$ négyzeten értelmezett folytonos függvény és $\xi_1$, $\xi_2$ a $J$ négyzet határán fekvő pontok. Akkor*

$$V_{\xi_1}^{b\pm}(F)=V_{\xi_2}^{b\pm}(F).$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $K$ az $E_t$ nívóhalmaznak a $J$ négyzet határát nem metsző, reguláris komponense. A $K$ komponens $J$-t két tartományra, $J_1$-re és $J_2$-re osztja. Nyilvánvaló, hogy $\xi_1$ és $\xi_2$ ugyanahhoz a tartományhoz tartozik, például $J_1$-hez. De akkor $K$ egyszerre növekedési (fogyási) komponens $\xi_1$-re és $\xi_2$-re nézve, tehát ha $K$ nem növekedési (fogyási) komponens a $\xi_1$, $\xi_2$ pontok egyikére nézve, akkor a másikra nézve sem növekedési (ill. fogyási) komponens.

Majdnem minden nívónak azok a komponensei, amelyek a síkot szétválasztják, nem metszik $J$ határát. Ennélfogva majdnem minden $t$-re $\Phi_{\xi_1}^{b\pm}(t) = \Phi_{\xi_2}^{b\pm}(t)$ és így

$$V_{\xi_1}^{b\pm}(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{\xi_1}^{b\pm}(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{\xi_2}^{b\pm}(t)dt=V_{\xi_2}^{b\pm}(F).$$

A segédtételt bebizonyítottuk.

Tehát az összes variációk invariánsak $J$ önmagára való olyan homeomorf leképezéseivel szemben, amelyek a $\xi$ pontot a helyén hagyják, a $V^h$, $V^b$, $V$ variációk pedig (és $V_\xi^{b\pm}$ is, ha $\xi$ határpont) invariánsak $J$ önmagára való *összes* homeomorf leképezéseivel szemben.

Megjegyezzük, hogy az általunk bevezetett variációk, hasonlóan az egyváltozós függvények esetéhez, nem lineáris funkcionálok. Az egyváltozós függvények esetében azonban az $F_1$, $F_2$ függvények összeadásakor variációik összeadódnak, feltéve, hogy $F_1$ és $F_2$ *különböző* szakaszokon változtak, vagyis ha az $[a, b]$ értelmezési intervallum előállítható két szakasz $[a, c]+[d, b] = [a, b]$ összegeként úgy, hogy az $F_1$ függvény állandó az $[a, c]$ szakaszon, $F_2$ pedig a $[d, b]$ szakaszon. Analóg módon legyen $J = J_1 + J_2$, ahol $J_1$ és $J_2$ két zárt tartomány; legyenek $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ folytonos függvények, amelyekre

$$F_1(\eta) = \mathrm{const}_1 \quad \text{ha} \quad \eta \in J_2$$

és

$$F_2(\eta) = \mathrm{const}_2 \quad \text{ha} \quad \eta \in J_1.$$

Akkor az $F(\eta) = F_1(\eta) + F_2(\eta)$ függvény variációja *egyenlő $F_1$ és $F_2$ variációjának összegével.* Itt variáción bármelyik variációt értjük — a pozitív, negatív vagy teljes, határ- vagy belső variációt. Ennek a ténynek a bizonyítása nyilvánvaló, ezért a bizonyítást elhagyjuk.

Most megmutatjuk, hogy a $V_\xi^{b\pm}$, $V_\xi^{h\pm}$ variációk és a belőlük képezett $V^b$, $V^h$, $V^+$, $V^-$, $V$ összegek mindegyike mint funkcionál *alulról félig folytonos az egyenletes konvergenciára nézve,* vagyis érvényes a következő tétel.

22. TÉTEL *(a $V$, $V^{b\pm}$, $V^{h\pm}$ variációk alulról félig folytonos voltáról). Legyen $\{F_s(\eta)\}$ folytonos függvényekből álló egyenletesen konvergens sorozat és $F(\eta) = \lim\limits_s F_s(\eta)$. Akkor tetszés szerinti $\xi \in J$ pontra*

$$V_\xi^{\cdot\cdot}(F) \leqq \varliminf_s V_\xi^{\cdot\cdot}(F_s),$$

*ahol a két pont helyébe a*

$$b+,\ b-,\ h+,\ h-$$

*kombinációk bármelyike írható. Továbbá fennállnak a*

$$V^b(F) \leqq \varliminf_s V^b(F_s), \quad V^h(F) \leqq \varliminf_s V^h(F_s),$$

$$V_\xi^{\pm}(F) \leqq \varliminf_s V_\xi^{\pm}(F_s), \quad V(F) \leqq \varliminf_s V(F_s)$$

*egyenlőtlenségek.*

Mielőtt a 22. tételt bebizonyítanánk, előrebocsátunk egy segédtételt.

42. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény a szokásos $J$ tartományon, $\xi$ tetszés szerinti pont és $T$ a tipikus nívók halmaza $(F(\xi) \notin T)$. Legyen $K$ a $t$ tipikus nívó olyan reguláris komponense, amely nem fogyási (ill. nem növekedési) komponens. Legyen $J_1 \ni \xi$ és $J_2$ az a két tartomány, amelyre $K$ felosztja $J$-t. Legyen $U$ a $K$ komponens bármilyen kis környezete. Akkor vagy találhatók olyan $a \in U \cap J_1$, $b \in U \cap J_2$ pontok, hogy $F(a) < t$ és $F(b) > t$ (illetve $F(a) > t$ és $F(b) < t$), vagy $K$ helyettesíthető ugyan-*

*annak a nívónak valamely, U-ban fekvő $K'$ komponensével, amelyre az említett körülmény már fennáll, azaz találhatók $a \in U \cap J_1'$ $b \in U \cap J_2'$ pontok, amelyekben $F(a) < t$ és $F(b) > t$ (ill. $F(a) > t$ és $F(b) < t$); itt $J_1' \ni \xi$ és $J_2'$ azokat a tartományokat jelenti, amelyekre $K'$ osztja fel J-t.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\zeta \in J_2$, $T_F$ az egydimenziós fa és $\sigma$ egyszerű ív $T_F$-ben az $l_\xi$, $l_\zeta$ végpontokkal. Tegyük fel, hogy a $K$ komponens nem fogyási komponens és $\tau_F(K) = l_0$. Akkor $l_0$ az $F^*(l)$ függvénynek nem fogyási pontja a $\sigma$ íven $l_\xi$-re vonatkozóan. Legyen $\tilde{U}(l_0)$ az $l_0$ pont azon környezete, amelyet az $U(K)$ környezet generál. Ha az $l_\xi l$ ív és az $\tilde{U}(l_0)$ halmaz metszete tartalmaz olyan $l'$ pontot, amelyre $F^*(l') < t$, akkor az $l' l_\zeta$ ív és $\tilde{U}(l_0)$ metszetében található olyan $l''$ pont, ahol $F^*(l'') > t$ (mert különben $l_0$ maximumhely lenne a $\sigma$ íven) és az $l' l''$ íven a $t$ nívónak van olyan $\tilde{l}$ pontja, amelynek a $\tau_F^{-1}(\tilde{l})$ inverz képe eleget tesz a segédtétel követelményeinek. Most legyen $l_\xi l_0$ és $\tilde{U}(l_0)$ metszetének minden pontjában $F^*(l) \geqq t$. Akkor ebben a környezetben mindenütt $F^*(l) > t$, mert különben az $\tilde{l} \in \overset{\frown}{l_\xi l_0} \cap \tilde{U}(l_0)$ pontnak, ahol $F(\tilde{l}) = t$, kvázi-extrémális $\tau_F^{-1}(\tilde{l})$ komponens felelne meg.

Analóg módon, $l_\xi$ és $l_\zeta$ helyét felcserélve azt találjuk, hogy vagy az $\overset{\frown}{l_\zeta l_0}$ ívnek az $\tilde{U}(l_0)$ környezettel való metszete tartalmaz olyan $l''$ pontot, amelyre $\tau_F^{-1}(l'')$ a keresett komponens, vagy az $\overset{\frown}{l_\zeta l_0} \cap \tilde{U}(l_0)$ metszeten mindenütt $F^*(l) < t$.

Tehát ha $\tilde{U}(l_0) \cap \sigma$ nem tartalmaz nekünk szükséges $l''$ pontot, akkor $l_0$ fogyási pont.

Ha $K$ nem növekedési komponens, akkor a bizonyítást a $-F(\eta)$ függvényre való áttéréssel nyerjük. A segédtételt bebizonyítottuk.

A 22. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Legyen $T$ az $F(\eta)$ függvény tipikus nívóinak halmaza és $T_s$ az $F_s(\eta)$ függvény tipikus nívóinak halmaza. Legyen $T^* = T \cap \prod_s T_s$.

Minthogy a $T$, $T_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$ halmazok mindegyikének kiegészítő halmaza legfeljebb megszámlálható, $T^*$ kiegészítő halmaza szintén legfeljebb megszámlálható; itt $CT_s$-hez és $CT$-hez számítjuk az $F_s(\xi)$, ill. $F(\xi)$ értéket is.

Most legyen $t \in T^*$. Bebizonyítjuk, hogy ha $\Phi^{b+}_{F,\xi}(t) \geqq N$, akkor $\underline{\lim}_s \Phi^{b+}_{F_s,\xi}(t) \geqq N$, és ha $\Phi^{h+}_{F,\xi}(t) \geqq N$, akkor $\underline{\lim}_s \Phi^{h+}_{F_s,\xi}(t) \geqq N$ is fennáll, ahol $\Phi^{b+}_{F,\xi}$ és $\Phi^{b+}_{F_s,\xi}$ (hasonlóan $\Phi^{h+}_{F,\xi}$ és $\Phi^{h+}_{F_s,\xi}$) a megfelelő multiplicitás függvényeket jelenti az $F$, ill. $F_s$ függvényekre vonatkozóan. Tehát legyen $\Phi^{b+}_{F,\xi}(t) \geqq N$ (illetve $\Phi^{h+}_{F,\xi}(t) \geqq N$). Legyenek $K_1, \ldots, K_N$ az $F$ függvény $t$ tipikus nívójának olyan reguláris komponensei, amelyek nem fogyási komponensek és amelyek szétválasztják (ill. nem választják szét) a síkot. Akkor a 11. segédtétel értelmében található olyan $\delta > 0$, hogy az $M = E_{t+\delta} \dot{-} E_{t-\delta}$ halmaz páronkint elválasztja a $K_s$, $K_m$ $(s, m = 1, 2, \ldots, N)$ komponenseket. Jelölje $J_1^{(s)}$ és $J_2^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$ azokat a tartományokat, amelyekre a $K_s$ komponens felosztja $J$-t, mégpedig olyan sorrendben, hogy $\xi \in J_1^{(s)}$. Legyen $U_s$ a $K_s$ komponens olyan kicsiny környezete, hogy $U_s$-ben $t - \frac{\delta}{2} \leqq F(\eta) \leqq t + \frac{\delta}{2}$. A 42. segédtétel szerint a $K_s$ komponensek helyettesíthetők ugyanannak a nívónak olyan $K_s'$ komponenseivel (lehet, hogy

$K_s' = K_s$), amelyek a megfelelő $U_s$-ben fekszenek és amelyekhez találhatók szintén $U^s$-ben fekvő $a_s$, $b_s$ pontok úgy, hogy

1. $F(a_s) < t < F(b_s)$;
2. $K_s'$ elválasztja az $a_s$, $\xi$ pontokat $b_s$-től.

Legyen $a_s$, $b_s$ és $K_s'$ rögzített ($s = 1, 2, \ldots, N$). Ha a $K_s$ komponensek nem metszették $J$ határát, akkor az $U_s$ környezeteket választhatjuk olyan kicsiknek, hogy $U_s$ és következésképpen $K_s' \subset U_s$ szintén ne messe $J$ határát. Ha pedig a $K_s$ komponensek nem választották szét a síkot, akkor a $K_s'$ komponensek, amelyek elég kis $U_s$ környezetek esetén elválasztják egymástól a $K_s$ és a $CU_s$ halmazt (feltesszük, hogy $U_s$ a $J$ tartomány határának legalább egy pontját nem tartalmazza; ez mindig elérhető, mert $J$ határa nem tartozik teljesen a síkot szét nem választó $K_s$ komponenshez), feltétlenül metszik $J$ határát, és minthogy $t$ tipikus, nem választják szét a síkot.

Az $F_n(\eta)$ függvények egyenletesen tartanak $F(\eta)$-hoz, tehát valamely $n$ indextől kezdve $F_n(a_s) < t$, $F_n(b_s) > t$. Ennélfogva valamely $n_0$ indextől kezdve az $F_n(\eta)$ függvények $E_t^{(n)}$ nívóhalmazai ($n \geqq n_0$) elválasztják az $a_s, b_s$ ($s = 1, 2, \ldots, N$) pontokat. Ebből következik, hogy $E_t^{(n)}$ bizonyos $K_1^{(n)}, \ldots, K_N^{(n)}$ komponensei rendre elválasztják az $a_1$ és $b_1, \ldots, a_N$ és $b_N$ pontot. A $K_p^{(n)}$, $K_m^{(n)}$ komponenseknek nem kell eleve különbözniük. Meg fogjuk azonban mutatni, hogy valamely $n_0$ indextől kezdve az összes $K_s^{(n)}$ komponensek különbözők ($s = 1, 2, \ldots, N$). Valóban, a $t$ nívó $a_s, b_s$ pontokat elválasztó $K_s^{(n)}$ komponense szükségképp metszi az $U_s$ halmazt. Tegyük fel, hogy $K_s^{(n)} = K_m^{(n)}$ ($s \neq m$) az indexek valamely végtelen $n_k$ sorozatára. Az $\{n_k\}$ részsorozatot választhatjuk úgy, hogy $\underset{k}{\mathrm{lt}}\, K_s^{(n_k)} \neq 0$. Legyen $K = \overline{\underset{k}{\mathrm{lt}}}\, K_s^{(n_k)}$. A $K$ halmaz kontinuum, és minthogy $\eta \in K_s^{(n)}$ esetén $F_n(\eta) = t$ és az $F_n(\eta)$ függvények egyenletesen tartanak az $F(\eta)$ függvényhez, $F(\eta)$ a $K$ kontinuumon mindenütt egyenlő $t$-vel. Nyilvánvaló, hogy $K$ metszi az $U_s$ és az $U_m$ halmazt is. Ha azonban az $U_s$, $U_m$ halmazokat úgy választottuk, amint fentebb mondtuk, akkor $F(\eta)$ az $U_s$, $U_m$ halmazokon legfeljebb a $\frac{\delta}{2}$ értékkel különbözik $t$-től. Ily módon az $R = K + \overline{U}_s + \overline{U}_m$ kontinuum metszi $K_s'$-t is, $K_m'$-t is (sőt, tartalmazza őket), és az $R$ kontinuumon az $F(\eta)$ függvény $t$-től való eltérése sehol sem haladja meg a $\frac{\delta}{2}$ értéket. Ebből következik, hogy az $M = E_{t+\delta} + E_{t-\delta}$ halmaz nem választja el a $K_s'$, $K_m'$ komponenseket.

Tehát megmutattuk, hogy valamilyen $n$-től kezdve a $K_s^{(n)}$ komponensek mind különbözők ($s = 1, 2, \ldots, N$). Legyen $\widetilde{K}_s^{(n)}$ az $F_n(\eta)$ függvény $E_t^{(n)}$ nívóhalmazának az $a_s$, $b_s$ pontokat elválasztó komponensei közül a $b_s$-hez legközelebbi. Meg fogjuk mutatni, hogy elég nagy $n$ indexekre mindegyik $\widetilde{K}_s^{(n)}$ nem fogyási komponens.

Mindenekelőtt mutassuk meg, hogy $\widetilde{K}_s^{(n)}$ nem választja el a $\xi$, $a_s$ pontokat, ha $n$ elég nagy. Végezzük a bizonyítást indirekt módon. Legyen $\{\widetilde{K}_s^{(n_k)}\}$ olyan komponensek sorozata, amelyek elválasztják a $\xi$, $a_s$ pontokat.

Feltehetjük, hogy e sorozat topológiai limes inferiora nem üres és a $K = \overline{\underset{k}{\mathrm{lt}}}\, \widetilde{K}_s^{(n_k)}$ halmaz kontinuum. Akkor a $t$ nívó $\widetilde{K} \supset K$ komponense szintén elválasztja a $\xi$, $a_s$ pontokat. Azonkívül $\widetilde{K}$ elválasztja az $a_s$, $b_s$ pontokat, mert a $\widetilde{K}_s^{(n_k)}$ halmazok ezt teszik. A $t$ nívó két, az $a_s$, $b_s$ pontokat elválasztó $\widetilde{K}$, $K_s'$ komponense közül valamelyik közelebb fekszik $b_s$-hez. Ha $\tilde{K}$ elválasztja a $\xi$ pontot $a_s$-től és az $a_s$ pontot $b_s$-től, akkor $\tilde{K}$ a $\xi$ pontot nem választja el $b_s$-től (ugyanis $t$ tipikus volta miatt $\tilde{K}$ reguláris). Ekkor $K_s'$ közelebb van $b_s$-hez, mint $\tilde{K}$, mert $K_s'$ *elválasztja* a $\xi$, $b_s$ pontokat.

Megmutatjuk, hogy $K_s'$ kvázi-extremális komponens.

Legyen $R_{n_k}$ olyan kontinuum, amely a $\tilde{K}_s^{(n_k)}$ komponenst összeköti a $b_s$ ponttal és nem metszi az $E_t^{(n_k)}-\tilde{K}_s^{(n_k)}$ halmazt. Az F tétel alapján ilyen kontinuum létezik, ugyanis $\tilde{K}_s^{(n_k)}$ az $E_t^{(n_k)}$ nívóhalmaz $a_s$, $b_s$ pontokat elválasztó komponensei közül a $b_s$-hez legközelebbi. Feltehetjük, hogy az $\{n_k\}$ részsorozat olyan ritka, hogy $\underline{\mathrm{lt}}_k\, R_{n_k} \neq 0$ és így az $R=\overline{\mathrm{lt}}_k\, R_{n_k}$ halmaz kontinuum. Nyilvánvaló, hogy $R \ni b_s$ és $R \cap \tilde{K} \neq 0$. Továbbá egyik $F_{n_k}(\eta)$ függvény *sem kisebb* a megfelelő $R_{n_k}$ halmazon, *mint* $t$. De akkor $F(\eta)$ az $R$ halmazon szintén nem kisebb $t$-nél. Minthogy $K_s'$ elválasztja a $b_s$ pontot a $\tilde{K}$ komponenstől, $K_s'$ nyilván kvázi-extremális komponens: az $R$ halmazon mindenütt $F(\eta) \geqq t$, és a $K_s'$ által leválasztott tartományban éppúgy, mint a $K_s'$ és $\tilde{K}$ által határolt tartományban találhatók $R$-nek olyan pontjai, amelyekben $F(\eta) > t$ (az egyik esetben $F(b_s) > t$, a másik esetben pedig ez azért igaz, mert különben a $K_s'$, $\tilde{K}$ komponensek $R$-nek a köztük levő tartományban fekvő részével együtt *egyetlen* komponenst adnának).

Tehát elég nagy $n$ indexekre az $F_n(\eta)$ függvény $t$ nívójának az $a_s$, $b_s$ pontokat elválasztó komponensei közül a $b_s$-hez legközelebb fekvő $\tilde{K}_s^{(n)}$ komponens elválasztja a $\xi$, $b_s$ pontokat. A 10. segédtétel értelmében ezek a komponensek nem fogyási komponensek. Korábban bebizonyítottuk, hogy valamely $n_0$-tól kezdve az összes $\tilde{K}_s^{(n)}$ halmazok különbözők. Ebből következik, hogy valamely $n_1$-től kezdve $\Phi_{F_n,\xi}^{b+}(t) \geqq N$, illetve $\Phi_{F_n,\xi}^{h+}(t) \geqq N$. Minthogy $t$ tetszés szerinti tipikus nívó, ebből következik, hogy majdnem minden $t$-re (sőt, legfeljebb megszámlálhatóan sok kivétellel mindegyikre) fennáll

$$\varliminf_{s} \Phi_{F_s,\xi}^{b+}(t) \geqq \Phi_{F,\xi}^{b+}(t), \quad \varliminf_{s} \Phi_{F_s,\xi}^{h+}(t) \geqq \Phi_{F,\xi}^{h+}(t).$$

A valós függvénytan ismert tétele szerint ebből következik:

$$V_\xi^{b+}(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{F,\xi}^{b+}(t)\,dt \leqq \varliminf_{s} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{F_s,\xi}^{b+}(t)\,dt = \varliminf_{s} V_\xi^{b+}(F_s)$$

és

$$V_\xi^{h+}(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{F,\xi}^{h+}(t)\,dt \leqq \varliminf_{s} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{F_s,\xi}^{h+}(t)\,dt = \varliminf_{s} V_\xi^{h+}(F_s).$$

Az $F$ függvényről áttérve a $-F$ függvényre, könnyen adódik:

$$V_\xi^{b-}(F) \leqq \varliminf_{s} V_\xi^{b-}(F_s)$$

és

$$V_\xi^{h-}(F) \leqq \varliminf_{s} V_\xi^{h-}(F_s).$$

Végül a megfelelő egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk:

$$V^b(F) \leqq \underline{\lim_s}\, V^b(F_s);\quad V^h(F) \leqq \underline{\lim_s}\, V^h(F_s);$$

$$V_\xi^{\pm}(F) \leqq \underline{\lim_s}\, V_\xi^{\pm}(F_s);\quad V(F) \leqq \underline{\lim_s}\, V(F_s).$$

A 22. tételt bebizonyítottuk.

Teljesen analóg módon bizonyítható a következő.

23. TÉTEL. *Legyen $\{F_s(\eta)\}$ folytonos függvényekből álló egyenletesen konvergens sorozat és $F(\eta) = \lim_s F_s(\eta)$.*

*Akkor bármely $J$-beli $\xi$, $\zeta$ pontpárra*

$$_\xi^\zeta V^{b\pm}(F) \leqq \underline{\lim_s}\, V^{b\pm}(F_s);\quad _\xi^\zeta V^{h\pm}(F) \leqq \underline{\lim_s}\, {}_\xi^\zeta V^{h\pm}(F_s);$$

$$_\xi^\zeta V^b(F) \leqq \underline{\lim_s}\, {}_\xi^\zeta V^b(F_s);\quad _\xi^\zeta V^h(F) \leqq \underline{\lim_s}\, {}_\xi^\zeta V^h(F_s);$$

$$_\xi^\zeta V^{\pm}(F) \leqq \underline{\lim_s}\, {}_\xi^\zeta V^{\pm}(F_s);\quad _\xi^\zeta V(F) \leqq \underline{\lim_s}\, {}_\xi^\zeta V(F_s).$$

Ezt a bizonyítást elhagyjuk.

Tehát megmutattuk, hogy a $V_\xi^{b\pm}$, $V_\xi^{h\pm}$, $V_\xi^{\pm}$, $V^b$, $V^h$ és $V$ variációk mind olyan funkcionálok, amelyek a négyzeten vagy gömbfelületen folytonos függvényekre vannak értelmezve (gömbfelület esetén a $V^{h\pm}$, $V^h$ határ-variációk elesnek) és amelyek eleget tesznek a következő feltételeknek:

1. $V(F) \geqq 0$.

2. Ha $J = J_1 + J_2$, ahol $J_1, J_2$ zárt tartományok, továbbá az $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ folytonos függvényekre

$$F_1(\eta) = C_1 \quad \text{ha} \quad \eta \in J_2,$$

$$F_2(\eta) = C_2 \quad \text{ha} \quad \eta \in J_1,$$

akkor $V(F_1 + F_2) = V(F_1) + V(F_2)$.

3. Ha $F(\eta) = \lim_s F_s(\eta)$, akkor $V(F) \leqq \underline{\lim}_s V(F_s)$ *(felülről való féligfolytonosság)*.

4. Ha $\tau$ a $J$ tartomány önmagára való homeomorf leképezése, amely a $\xi$ pontot a helyén hagyja, és $\widetilde{F}[\tau(\eta)] = F(\eta)$, akkor $V(\widetilde{F}) = V(F)$. A $V^h$, $V^b$, $V$ variációkra, és abban az esetben, amikor a $\xi$ pont $J$ határához tartozik, a $V_\xi^{b+}$, $V_\xi^{b-}$ variációkra is, teljesül az az erősebb 4* követelmény, amely abban különbözik 4-től, hogy a $\tau$ homeomorfizmustól nem kívánja meg, hogy a $\xi$ pontot a helyén hagyja.

*Fordította: Bognár János*
*a matematikai tudományok kandidátusa*

# KÖNYVISMERTETÉS

## J. Aczél: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*

1. Aczél János könyve a függvényegyenletek kérdéskörének első rendszeres feldolgozása a matematikai irodalomban. E terület jelentőségét minden kutató matematikus ismeri, akár közvetlen vizsgálataibar vezette vissza problémáit függvényegyenletekre, akár kutatási területének klasszikusai nyomán került velük kapcsolatba. Azonban a könyv egésze, a felsorolt alkalmazási területek sokfélesége minden vitán felülivé teszik az olvasó számára egyrészt a függvényegyenletek e leszűkített területének önálló fejezetként való létjogosultságát, másrészt alapvető jelentőségét a kutató matematikus számára, dolgozzék az illető a matematika elmélete, vagy akár alkalmazásai terén.

Szerző tizegynéhány esztendő kitartó, invenciózus munkájával nemcsak jelentősen továbbfejlesztette a függvényegyenletek elméletét, hanem megbírkózott a rendszerezés sok nehéz problémájával is, ami hozzásegítette az elmélet számos hézagának kitöltéséhez. Maga a rendszerbefoglalás ténye számos megoldatlan, mélyenfekvőnek mutatkozó problémát vetett fel, mint a függvényegyenletek osztályozásának, a megoldási módszerek alkalmazhatósági határainak, a megoldások egzisztenciájának és unicitásának kérdéseit, amely problémák irányában teendő kutatások a matematika fejlődése szempontjából érdekes fejleményeket ígérnek.

2. A könyv bevezetése a definíciókat, húsz jellegzetes példát, majd értékes történeti utalásokat tartalmaz. A könyv első része az egyváltozós, a második része a többváltozós függvényekre vonatkozó egyenleteket tárgyalja. E nyolc fejezetnyi részt néhány megjegyzés és átfogó problémakör követi; részletekre vonatkozó problémák a könyv különböző fejezeteiben találhatók. Végül szerző felsorolja a függvényegyenletek irodalmát a XVIII. század közepétől — D'Alembert, Euler sokat idézett munkáitól — indulva az 1960. évig, közel 60 oldalon keresztül; ezután a névjegyzék következik, amely sajnos a szerző aktivitását nem tünteti fel.

A könyv egyszerű tárgyalásra törekszik, az olvasó szoros értelemben vett bevezetését tűzi célul. Mindenekelőtt figyelmen kívül hagyja a nem-folytonos megoldásokat, elhatárolja magát a differenciál-, integrál-, integrodifferenciál-, differencia-, iterációsegyenletektől, amelyek tágabb értelemben szintén függvényegyenletek. Az alkalmazási területeket illetően a folytonos csoportok elmélete, a geometria, ezen belül a vektoranalízis, a geometriai objektumok elmélete, a nem-euklideszi geometria, továbbá a valószínűségszámítás és mechanika említendők; a folytonos csoportok elméletének és a geometriai objektumok elméletének behatóbb tárgyalására nem kerül sor, ez utóbbi téma a szerzőnek Gołab-bal írott, időközben megjelent könyvében került feldolgozásra. A felhasznált és érintett területek közül az algebra, a csoportok és félcsoportok elmélete játszik jelentős szerepet.

* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1961., 331 oldal.

3. A bevezetésben a „kifejezés” szellemes definíciója után a függvényegyenleteket mint az egyenlőség jelével összekapcsolt két kifejezést definiálja. Ugyanakkor, amikor például a differenciálegyenletektől elhatárolja könyvének tárgyát, megjegyzi, hogy az egyik legegyszerűbb $f'(x)=f(x)$ differenciálegyenlet is a következő alakban mint függvényegyenlet írható:

$$f(x+y)-f(x)(1+y) = F(x,y)\,y$$

$$F(x,0)=0, \quad F(x,y) \text{ folytonos.}$$

Az első rész első fejezete az $f[G(x,y)] = F(f(x),y)$ alakú egyenleteket tárgyalja, majd további bonyolultabb eseteket. Talán itt említem meg, ami a könyv más helyein szerepel, a függvényegyenletek egy érdekes és jellegzetes sajátosságát: szinte lényegtelen eltérés az egyenletben, lényeges eltérés a megoldásban. Számos példa közül egy:

$$F[x, F(y,z)] = F[F(x,y),z],$$

megoldás:

$$F(x,y) = g^{-1}(g(x)+g(y)),$$

ugyanakkor

$$F[x, F(y,z)] = F[y, F(x,z)],$$

megoldás:

$$F(x,y) = g^{-1}(h(x)+g(y)).$$

A második fejezetben a változók csupán a szereplő függvényeken belül lépnek fel. Itt kerülnek tárgyalásra a *Cauchy*-egyenletek és a *Jensen*-egyenlet, továbbá ezek bizonyos általánosításai. Különféle geometriai, mechanikai, valószínűségszámítási alkalmazások után polinomokra és trigonometrikus függvényekre vonatkozó egyenletekkel zárja a második fejezetet.

A harmadik fejezet több ismeretlen függvényt tartalmazó egyenleteket és rendszereket tárgyal.

A negyedik fejezet függvényegyenleteknek differenciál- vagy integrálegyenletekre való visszavezetésének módszereit adja.

A könyv második részének első fejezete a *Cauchy*-féle és hasonló típusú egyenletek többváltozós formáival, a homogén és majdnem-homogén függvények függvényegyenletével, továbbá — részben alkalmazásként — a középértékek karakterizációinak kérdésével foglalkozik.

A következő fejezet összetett egyenleteket tárgyal. Elsőként az ún. tranzlációs egyenlet

$$F[F(x,u),v]=F(x,u+v)$$

megoldásával foglalkozik. Ezután az asszociativitás, tranzitivitás, biszimmetria és autodisztributivitás egyenleteinek részletes tárgyalása következik.

A második rész harmadik fejezete több ismeretlen függvény esetét tartalmazza, amelyek egyenként többváltozósak. Az előző fejezetben említett kategóriák általánosítása, majd egyes eseteknek parciális differenciálegyenletekre való visszavezetése zárja a fejezetet.

A második rész utolsó, egyben a könyvnek nyolcadik, záró fejezete vektor- és matrixegyenletekkel foglalkozik, amelyben főként már tárgyalt típusok általánosításai foglalnak helyet.

4. Az alkalmazott módszerek közül egyik legáltalánosabb egyes változók alkalmas megválasztása és ezáltal a probléma redukciója, majd a különböző pozíciókból az általános megoldás felépítése. Az itt felmerülő lehetőségek sokfélesége, az eredményrejutás változatossága, az elemi számelmélet szellemes, változatos ad hoc módszereire emlékeztet, a kutatótól sok ötletességet kíván, számára sok szépséget nyújt.

Ez a körülmény, figyelembe véve a kérdéskörnek a bevezetésünkben vázolt általánosságát és jelentőségét, a tárgyalás egyszerűségét, annak megállapítására ösztönöz, hogy egyetemi hallgatóink, középiskolai tanáraink, fiatalabb kutatóink számára is rendkívül tanulságos volna a függvényegyenletekről magyar nyelvű bevezető könyv megjelentetése. Egyik lehetőségként kínálkozik jelen könyv magyar nyelven való kiadása.

Szerző könyvét FEJÉR LIPÓTnak ajánlotta. A könyvet stílusának világossága, felépítésének részleteiben és egészében való áttekinthetősége valóban méltóvá teszi nagy mesterünk emlékéhez.

*Írta: Vincze István*
*a matematikai tudományok kandidátusa*

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1963. I. 2. — Terjedelem: 9,25 (A/5) ív, 1 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 63-109

Ára: 20,— Ft

# TARTALOMJEGYZÉK



## A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL



## KÖNYVISMERTETÉS



Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI

XIII. KÖTET 2. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1963

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI



XIII. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésén bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismeretetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

# A KVÁZICSOPORTOK NÉHÁNY PROBLÉMÁJÁRÓL

Írta: DÉNES JÓZSEF és PÁSZTOR ENDRÉNÉ

## Bevezetés

Latin négyzeten EULER óta egy olyan négyzetes matrixot értünk, amelynek $n^2$ mezőjében $n$ különböző betű, illetve szám úgy foglal helyet, hogy egy sorban és egy oszlopban sem fordul elő két azonos. A *Cayley*-féle csoporttáblák, mint ismeretes, speciális latin négyzetek.

Egy $G$ csoport CAYLEY táblája a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. Latin négyzet, vagyis olyan $\|a_{ik}\|$ négyzetes matrix, amelynek minden sora, illetve oszlopa $G$ elemeinek egy permutációja.

2. Érvényes a négyszög kritérium, vagyis minden $i, j, \ldots$ index esetén az $a_{ik} = a_{i_1k_1}$, $a_{il} = a_{i_1l_1}$, $a_{jk} = a_{j_1k_1}$ egyenletekből következik, hogy $a_{jl} = a_{j_1l_1}$.

Megfordítva, tetszőleges $\|a_{ik}\|$ matrix, amely rendelkezik az 1. 2. tulajdonságokkal, egy $G$ csoport művelettáblája.

Az $S$ véges halmazt akkor nevezzük kvázicsoportnak, ha $S$-ben értelmezve van egy művelet és tetszőleges $a, b$ esetén az $ax = b$, $ya = b$ egyenleteknek pontosan egy megoldása van. Két kvázicsoportot $Q_1$-et és $Q_2$-t (a $Q_1$-ben értelmezett műveletet jelöljük $\mathbf{1}$-gyel, a $Q_2$-ben értelmezett műveletet $\mathbf{2}$-vel), akkor nevezünk izotopnak, ha tetszőleges $x, y \in Q_1$ esetén létezik olyan $\sigma$, $\eta$, $\varrho$ leképzés, hogy $\sigma(x\mathbf{1}y) = \eta(x)\mathbf{2}\varrho(y)$.

A kvázicsoportok művelettáblája latin négyzet és megfordítva, minden latin négyzethez izotópiától eltekintve egyértelműen található olyan kvázicsoport, amelynek ez a művelettáblája. A kvázicsoportok definíciójából következik, hogy a kvázicsoportok és a latin négyzetek elmélete igen szoros kapcsolatban áll egymással.

A kérdés irodalmából ez a kapcsolat nem tűnik ki eléggé, mert a kutatók a latin négyzetekhez legtöbbnyire kombinatorikai problémák megoldása közben jutottak (mint pl. a 36 tiszt problémája, bűvös négyzetek szerkesztése), míg a kvázicsoportok elmélete az utolsó évtizedekben mint a csoportelmélet egy általánosítása fejlődött ki. Jelen dolgozat egyik célja e kapcsolat kidomborítása.

E dolgozat szerzőinek egyike más helyen (lásd [8]) megoldotta a következő problémát:

„Hagyjunk el egy $G$ véges $n$-ed rendű csoport csoporttáblájából tetszőleges $k$ számú elemet. Határozzuk meg a legnagyobb $k = k(n)$ számot, amelyre a tábla megmaradó része a műveltáblát egyértelműen meghatározza."[1] [8]-ban megtalálható a következő eredmény: $k(n) = 2n-1$ ha $n \neq 4$ és $k(4) = 3$.

A dolgozatban az előző probléma kvázicsoportokra vonatkozó analogonjaként a következő kérdésre adunk választ: *Hány elemet hagyhatunk el tetszőlegesen egy n-ed rendű latin négyzetből úgy, hogy a megmaradó elemek az eredeti latin négyzetet egyértelműen meghatározzák?*

[1] Ezt a problémát FUCHS LÁSZLÓ vetette fel könyvében (lásd [10]).

Más szavakkal: *Hány elemet hagyhatunk el tetszőlegesen egy n-ed rendű kvázicsoport művelettáblájából úgy, hogy a megmaradó elemek az eredeti művelettáblát egyértelműen meghatározzák?*

Kérdésünkre a 1. tételhez tartozó korollárium adja meg a választ. Tetszőleges $n$-re ($n \neq 3$) létezik két különböző olyan $n$-ed rendű latin négyzet, amelyek pontosan 4 helyen különböznek egymástól; míg 3 elemet akárhogy elhagyva egy tetszőleges $n$-ed rendű latin négyzetből ($n \neq 3$), a megmaradó elemekből a latin négyzet egyértelműen rekonstruálható. $n=3$ esetén a latin négyzet 9 eleme közül bárhogyan is adunk meg 4-et, a hiányzó 5 elem rekonstruálható.

Az 1. tétel bizonyításához felhasznált konstrukciós módszer segítségével egyszerű bizonyítást adunk R. SCHAUFFLER egy tételére és megcáfoljuk D. W. WALLnak egy sejtését. (2. §, 3. §.)

A 4. §-ban FUCHS LÁSZLÓnak néhány kvázicsoportokkal kapcsolatos problémájával foglalkozunk.

Az 5. §-ban a latin négyzetek diagonálisaival analóg gráfelméleti fogalmat mutatjuk be. Az említett analógia segítségével a diagonálisok gyakorlati kikeresésére adódik egyszerű módszer.

A szerzők köszönetüket fejezik ki RÉNYI ALFRÉD és FUCHS LÁSZLÓ professzoroknak értékes megjegyzéseikért.

## 1. §. Egy konstrukciós módszer

1. TÉTEL: *Tetszőleges n-re ($n \geqq 4$) létezik olyan n-ed rendű kvázicsoport, amely tartalmaz másodrendű részkvázicsoportot.*

BIZONYÍTÁS: Ha $n$ páros, akkor a tételben kimondott állítás következik CAUCHYnak következő tételéből: *Legyen G n-rendű csoport és p n-nek prímosztója, akkor G tartalmaz p-ed rendű elemet.* Vagyis, ha $n$ páros, akkor van 2-rendű alcsoportja, így csak annak bizonyítása marad hátra, hogy páratlan $n$-re is igaz a tétel.

Ha $n$ páratlan, megmutatjuk, hogy minden páratlan $n>3$-ra lehet ilyen kvázicsoportot konstruálni.

Szükségünk lesz a *diagonális* fogalmára, ezt a következőképpen definiáljuk:

*Egy n-ed rendű latin négyzetben (kvázicsoport művelettáblájában) diagonálisnak*[2] *nevezünk n olyan különböző elemet, amelyek a latin négyzet különböző soraiban és oszlopaiban helyezkednek el.*

Az általunk használt elnevezést a diagonális elemeinek a művelettáblában való elhelyezkedése indokolja.

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ egy $n$-ed rendű $G$ csoport elemeinek három permutációja és $a_i b_i = c_i (i=1, 2, \ldots, n)$ $G$-nek egy diagonálisa, akkor $a_i b_i a_1 = c_i a_1$ is diagonális és $a_i b_i a_1 = c_i a_1$, $a_i b_i a_2 = c_i a_2$, $\ldots$ $a_i b_i a_n = c_i a_n$ diagonálisok páronként diszjunktak. Vagyis, tetszőleges véges $n$-ed rendű csoportban egyetlen diagonális létezéséből következik $n$ diszjunkt diagonális létezése.

[2] A diagonálist J. SINGER 1-1 permutációnak nevezi cikkében. (Lásd [21]-ben.) M. HALL és L. J. PAIGE complete mapping-nek nevezi a [13] és [17] dolgozatban.

Ha $n$ páratlan, akkor nyilvánvalóan $a_i a_i = a_i^2$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ diagonálist alkot.

Az előzőkből következik, hogy a páratlan $n$-ed rendű ciklikus csoportok műveletttáblái $n$ diszjunkt diagonálissal rendelkeznek, $n+2$ rendű ($n$ páratlan) kívánt tulajdonságú kvázicsoportot nyerhetünk az $n$-ed rendű ciklikus csoportból, ha egyik diagonálisának minden eleme helyébe $n+1$-et, egy másik diagonálisának minden eleme helyébe $n+2$-t írunk és a két kiválasztott diagonálist $n+1$-edik, $n+2$-edik sorként, illetve oszlopként csatoljuk a konfigurációhoz. A jobb alsó sarokban levő négy üres helyre az $n+1$, $n+2$ elemeket írjuk a következő elrendezésben:

$$\begin{array}{cc} n+1 & n+2 \\ n+2 & n+1 \end{array}$$

Az így létrejött négyzetes matrix latin négyzet és egy olyan $n+2$-ed rendű kvázicsoport művelettáblája, amely tartalmaz másodrendű részkvázicsoportot.

Mivel $n=1$ esetben a diagonálisok száma egy és a konstrukcióhoz két kiválasztott diagonálisra van szükség, $n=3$-ra nem tudunk kívánt tulajdonságú latin négyzetet konstruálni.[3]

KORROLÁRIUM: *Tetszőleges n-re* $(n \neq 3)$ *létezik két olyan n-ed rendű latin négyzet, amelyek pontosan* 4 *helyen különböznek egymástól, míg* 3 *elemet akárhogy elhagyva egy tetszőleges n-ed rendű latin négyzetből* $(n \neq 3)$ *a latin négyzet egyértelműen rekonstruálható.*

Tekintsük ugyanis azt az $n$-ed rendű $Q$ kvázicsoportot, amelynek van másodrendű részkvázicsoportja. Akkor $Q$ művelettáblája a következő alakú:

$$\begin{array}{|l} \hline a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \\ a_2\, a_1 \\ \vdots \end{array}$$

*1. ábra*

ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n$-nel $Q$ elemeit jelöljük.

Négy elem megváltoztatása esetén egy $Q$-tól különböző $n$-ed rendű kvázicsoport következő alakú művelettáblájához juthatunk:

$$\begin{array}{|l} \hline a_2\, a_1 \ldots a_n \\ a_1\, a_2 \\ \vdots \end{array}$$

*2. ábra*

[3] RÉNYI ALFRÉD hívta fel figyelmünket az 1. tétel egy másik bizonyítására:
Ha $n>3$, akkor minden másodrendű latin négyzet kiegészíthető $n \times 2$ latin téglalappá. H. B. MANN [16] könyvében található tétel szerint, tetszőleges $n \times m$ latin téglalap kiegészíthető $n \times n$ latin négyzetté. E tételből következik, hogy az $n \times 2$ latin téglalap kiegészíthető $n \times n$ latin négyzetté és ez a latin négyzet eleget tesz követelményünknek. Hasonló módon bizonyítható a 2. tétel is.

Három elem tetszőlegesen elhagyható, mivel ebben az esetben van a latin négyzetnek egy olyan sora vagy oszlopa, amelyből egyetlen elem hiányzik és ez egyértelműen pótolható, hasonló módon a még hiányzó két elem is.

MEGJEGYZÉS: M. HALL-tól származik a következő tétel (lásd [12]).

*G n-ed rendű Abel-csoport tetszőleges elemei legyenek* $c_1, c_2, \ldots, c_n$. *Akkor és csak akkor létezik két G összes elemeiből álló* $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ *permutáció, amelyre fennáll, hogy*

$$c_i = a_i - b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

*ha*

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 0.$$

M. HALL eredményét FUCHS L. végtelen *Abel*-csoportokra is kiterjesztette. (Lásd: [11].)

Ha (1)-re fennáll, hogy $c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ is permutációt alkot, akkor (1)-et diagonálisnak nevezzük.

M. HALL és FUCHS L. a diagonális létezésének szükséges és elégséges feltételét adta meg, a feltétel szükségességét már korábban L. J. PAIGE véges esetre bebizonyította. (Lásd [18].) P. BATEMANN (lásd [1]) bebizonyította, hogy tetszőleges végtelen csoport műveleltáblájában van diagonális.

Később a problémát vizsgálták nem *Abel*-csoportokra is. M. HALL és L. J. PAIGE bebizonyította (lásd [13]), hogy feloldható csoportnál tetszőleges $n$-re szükséges és elégséges, feloldhatatlan csoportoknál szükséges feltétele annak, hogy a csoporttáblában legyen diagonális az, hogy a 2-*Sylow*-alcsoport nem ciklikus. M. HALL és L. J. PAIGE azt sejtik, hogy a feltétel feloldhatatlan csoportok esetében is elégséges.

MEGJEGYZÉS: Ha egy $n$-ed rendű $G$ véges csoport csoporttáblájában levő diszjunkt diagonálisok száma $d$, akkor $d \equiv 0 \mod n$. Azonban abból, hogy egy latin négyzetnek $n$ diszjunkt diagonálisa van, nem következik, hogy ez egyben csoporttábla is.

Könnyen belátható ugyanis, hogy létezik olyan $n$ diszjunkt diagonálisú latin négyzet, amely nem csoporttábla.

A már említett, M. HALL és L. J. PAIGE által bebizonyított tételből következik, hogy $n = 4k + 2$ esetén $n$-ed rendű csoport csoporttáblája nem tartalmaz diagonálist.

Másrészt, R. C. BOSE és S. S. SHRIKANDE megcáfolta az ortogonális latin négyzetekre vonatkozó *Euler*-sejtést[4] $n > 10$-re és E. T. PARKER $n = 10$ esetre. (Lásd [4], [5], [19].)

D. M. JOHNSON, A. L. DULMAGE, N. S. MENDELSOHN (lásd [15]) és L. J. PAIGE (lásd [17]) bebizonyították, hogy ortogonális latin négyzetpárt csak $n$ diszjunkt diagonálisú latin négyzethez lehet konstruálni.

Van tehát olyan latin négyzet, amely $n$ diszjunkt diagonálisú és nem csoporttábla. Az alább közölt 10-ed rendű latin négyzet $n$ diszjunkt diagonálisú és, mint az

[4] EULER azt sejtette, hogy ha $n = 4k + 2$ és $n > 6$, akkor nem létezik $n$-rendű ortogonális latin négyzetpár, BOSE és SHRIKANDE azonban minden $4k + 2$ alakú $n > 10$-re, PARKER pedig $n = 10$-re konstruáltak ortogonális latin négyzetpárt.

könnyen látható, nem csoporttábla:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{0}$ | $\boxed{4}$ | 1 | 7 | 2 | 9 | 8 | 3 | 6 | 5 |
| $\boxed{8}$ | $\boxed{1}$ | 5 | 2 | 7 | 3 | 9 | 4 | 0 | 6 |
| 9 | 8 | 2 | 6 | 3 | 7 | 4 | 5 | 1 | 0 |
| 5 | 9 | $\boxed{8}$ | 3 | 0 | 4 | 7 | 6 | $\boxed{2}$ | 1 |
| 7 | 6 | 9 | 8 | 4 | 1 | 5 | 0 | 3 | 2 |
| 6 | 7 | $\boxed{0}$ | 9 | 8 | 5 | 2 | 1 | $\boxed{4}$ | 3 |
| 3 | 0 | 7 | 1 | 9 | 8 | 6 | 2 | 5 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 8 | 9 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 9 | 7 | 8 |

(A négyszög kritérium a megjelölt elemekre nem teljesül.)

MEGJEGYZÉS: Ha $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$, valamint $\min(p_1, p_2, ..., p_n)$ jelöli a $p_1, p_2, ..., p_r$ különböző prímszámok közül a legkisebbet, azt sejtjük, hogy

$$k(s) \leqq 2 \min(p_1, p_2, ..., p_r) - 1,$$

ahol $k(s)$ egy $n$-ed rendű kvázicsoport művelettáblájából olyan módon elhagyható elemek legnagyobb számát jelöli, hogy a tábla megmaradó része a művelettáblát egyértelműen meghatározza.

Az 1. tétel bizonyításánál felhasznált módszer segítségével belátható a következő T. EVANS [24] és S. K. STEIN által bebizonyított tétel:

2. TÉTEL: *Minden n-re létezik olyan n-ed rendű kvázicsoport, amely tartalmaz k-ad rendű részkvázicsoportot, ha* $k \leqq \frac{n}{2}$.

MEGJEGYZÉS: Az előzőkben láthattuk, hogy az *Abel*-csoportok között van 0 diagonálisú, pl. minden páros rendű ciklikus csoport ilyen. Könnyen belátható, hogy létezik nem kommutatív 0 diagonálisú csoport, ilyen pl. a diéder csoport. Nem sikerült bebizonyítanunk, hogy egy $G$ csoport művelettáblája akkor és csak akkor 0 diagonálisú, ha a csoport egységeleme nem állítható elő a csoport összes elemeit tényezőként pontosan egyszer tartalmazó szorzatként. Továbbá a következő kérdést nem sikerült megválaszolni: Igaz-e, hogy minden 0 diagonálisú latin négyzet csoporttábla?

## 2. §. A csoportizotóp kvázicsoportok

A 2. tétel alkalmazásaként be fogjuk bizonyítani R. SCHAUFFLER egy tételét (lásd [20]-ban).

Legyen $M$ az $1, 2, ..., n$ természetes egész számok nem üres, véges részhalmaza. Az $M$ halmazon értelmezett $T_1$ latin négyzet által meghatározott $\mathbf{1}$ művelet kvázicsoportot alkot és ezt $(M)_1$-gyel jelöljük.

Jelölje $\Omega_n$ az összes $n$-ed rendű $M$ halmazon értelmezett kvázicsoportból álló halmazt. $\Omega_n$-t akkor nevezzük egészében asszociatívnak, ha tetszőleges $\mathbf{1}, \mathbf{2}$ $((M)_1, (M)_2 \in \Omega_n)$ műveletekhez található olyan $\mathbf{1}^*, \mathbf{2}^*$ $((M)_{1^*}, (M)_{2^*} \in \Omega_n)$ művelet, hogy $M$ tetszőleges $x, y, z$ elemére fennáll a következő összefüggés:

$$x\,\mathbf{1}\,(y\,\mathbf{2}\,z) = (x\,\mathbf{1}^*\,y)\,\mathbf{2}^*\,z. \tag{2}$$

R. SCHAUFFLER tétele a következő:

3. TÉTEL: *$\Omega_n$ akkor és csak akkor egészében asszociatív, ha $n \leqq 3$.*

BIZONYÍTÁS: Számolással könnyen belátható, hogy $n \leqq 3$ esetben $\Omega_n$ egészében asszociatív (lásd [20]-ban). A tétel bizonyítása azzal válik teljessé, ha kimutatjuk, hogy $n > 3$ esetében $\Omega_n$ nem egészében asszociatív. Ennek kimutatásához szükségünk lesz a következő tételre:

*Legyen $\Sigma$ egy olyan részhalmaza $\Omega_n$-nek, amelyre (2) teljesül. Ekkor tetszőleges $T_1$-re $((M)_1 \in \Sigma)$ érvényes a következő:*

$$x\,\mathbf{1}\,y = \varphi(x)\,\mathbf{2}\,z\,\mathbf{2}\,\psi(y),$$

*ahol $\mathbf{2}$ művelet az $M$ halmazon csoportot alkot, ennek a $(M)_2$ csoportnak $\varphi, \psi$ két automorfizmusa, $z$ pedig $M$-nek egy rögzített eleme, $x, y$ két tetszőleges eleme $M$-nek.*[5]

Másképpen fogalmazva SCHAUFFLER tétele így hangzik:

*$\Omega_n$ akkor és csak akkor egészében asszociatív, ha minden eleme csoportizotóp.* (Egy kvázicsoportot akkor nevezünk csoportizotópnak, ha létezik vele izotóp csoport.) Mivel minden $n$ $(n > 3)$ pozitív egész számhoz található olyan $n' \left(n' < \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ egész szám, hogy $n'$ nem osztója $n$-nek, így a 2. tételből következik, hogy $n > 3$ esetén létezik olyan $n$-ed rendű kvázicsoport, amelyre nem érvényes a *Lagrange*-tétel, vagyis nem csoportizotóp. Tehát $n > 3$ esetén $\Omega_n$ nem lehet egészében asszociatív.

## 3. §. D. W. Wall egy sejtéséről

D. W. WALL [22] cikkében közölte a következő sejtését:

Jelölje $Q$ az olyan $n$-ed rendű kvázicsoportot, amely $m$ diszjunkt $s$-ed rendű részkvázicsoportot tartalmaz, akkor fennáll a következő összefüggés.[6]

$$n \geqq (m+1)s \tag{3}$$

[5] A tételt BELOUSZOV mondta ki egyik előadásában a moszkvai egyetem 1958. február 3–6-ig megtartott algebrai kollokviumán. Az előadás kivonata megtalálható bizonyítás nélkül BELOUSZOV [2] dolgozatában. HOSSZÚ M. bizonyította be a tételt [14] dolgozatában. Hasonló állítás szerepel R. H. BRUCK [6] dolgozatában is.

A csoportizotóp kvázicsoportokra vonatkozó feltételekkel foglalkozik A. FRIGERIO [9] dolgozata is.

[6] (3)-ban leírt összefüggést Wall sejtésnek fogjuk nevezni abban az esetben, ha $m > 2$, mivel az $m = 1$ és $m = 2$ esetre (3) érvényességét D. W. Wall bebizonyította, a bizonyítás megtalálható [22]-ben.

Ennek a paragrafusnak az a célja, hogy megcáfoljuk WALL sejtését és bebizonyítsuk a következő tételt:

4. TÉTEL. *Ha $m > 2$, akkor létezik olyan kvázicsoport, amely $m$ diszjunkt tetszőleges azonos rendű részkvázicsoport egyesítése.*

BIZONYÍTÁS: R. H. BRUCK bebizonyította (lásd [7]), hogy tetszőleges $n$-re ($n > 2$) létezik idempotens kvázicsoport.[7] Nyilvánvaló, hogy egy idempotens $m$-ed rendű kvázicsoport minden elemét helyettesíthetjük egy $s$-ed rendű kvázicsoporttal és így egy új $ms$ rendű kvázicsoporthoz jutunk,[8] amelyre fennáll a következő összefüggés

$$n = ms.$$

MEGJEGYZÉS: Az 1. tételben felhasznált konstrukciós eljárás alkalmazásaként megmutatjuk, hogy minden $n > 2$-re létezik idempotens kvázicsoport.

Példaképpen a leírt módszer segítségével a harmadrendű ciklikus csoportból (lásd 5. ábra) létrehozunk egy negyedrendű idempotens kvázicsoportot (lásd 6. ábra).

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\boxed{3}$ | 2 |
| 2 | 3 | 2 | $\boxed{1}$ |
| 3 | $\boxed{2}$ | 1 | 3 |

*5. ábra*

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 3 | 2 |
| 4 | 2 | 3 | 1 | 4 |

*6. ábra*

[7] Az 1. tétel kapcsán bizonyítást nyert az is, hogy tetszőleges $n > 2$ és $n \neq 6$-ra van olyan latin négyzet, amely $n$ diszjunkt diagonálist tartalmaz. Idempotens $n$-ed rendű kvázicsoport létezése ennek speciális esete.

[8] A leírt konstrukciós eljárásra példaképpen vegyük azt az esetet, amikor $n = 6$, $m = 3$, $s = 2$. Vegyünk egy harmadrendű idempotens kvázicsoportot, amely a következő művelettáblával írható le:

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 3 |

*3. ábra*

Ha 1 helyébe az $\begin{smallmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{smallmatrix}$ latin négyzetet, 2 helyébe $\begin{smallmatrix}2 & 5\\ 5 & 2\end{smallmatrix}$ végül 3 helyébe $\begin{smallmatrix}3 & 6\\ 6 & 3\end{smallmatrix}$ latin négyzetet helyettesítjük, akkor egy olyan hatodrendű kvázicsoportot kapunk, amely három diszjunkt másodrendű részkvázicsoportot tartalmaz (lásd 4. ábra).

| | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 3 | 6 | 2 | 5 |
| 4 | 4 | 1 | 6 | 3 | 5 | 2 |
| 2 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 5 | 6 | 3 | 5 | 2 | 4 | 1 |
| 3 | 2 | 5 | 1 | 4 | 3 | 6 |
| 6 | 5 | 2 | 4 | 1 | 6 | 3 |

*4. ábra*

A $\square$ jelzett diagonális elemei helyébe 4-et írtunk. Mivel tetszőleges páratlan $n$-re, az $n$-ed rendű ciklikus csoporttal izotóp idempotens kvázicsoport létezik és az $n$-ed $(n>1)$ rendűből $n+1$-ed rendű idempotens kvázicsoport az előzőkhöz hasonló módon konstruálható, következik, hogy minden $n$-re $(n>2)$ létezik idempotens kvázicsoport.

## 4.§. Fuchs László néhány kvázicsoportokkal kapcsolatos problémája

FUCHS LÁSZLÓ vetette fel a következő problémákat:

1. Tetszőleges $n$ esetén található-e $n$ minden $k$ tagú particiójához ($n = n_1+n_2+ +\ldots+n_k$), ahol $n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_k$ és $n_1 \leqq \sum_{i=2}^{n} n_i$ olyan $Q_n$ $n$-ed rendű kvázicsoport, ahol

$$Q_n = Q_{n_1} \cup Q_{n_2} \cup \ldots \cup Q_{n_k}.$$

2. Tetszőleges $n$-nek egy adott

$$n = n_1+n_2+\ldots+n_k$$

particiójához létezik-e olyan $Q_n$ $n$-ed rendű kvázicsoport, amelyre fennáll, hogy

$$Q_n = Q_{n_1} \cup \ldots \cup Q_{n_k}.$$

3. Tetszőleges $n$-hez létezik-e olyan $Q_n$ $n$-ed rendű kvázicsoport, amelynek minden $m$-re $\left(m \leqq \frac{n}{2}\right)$ van $m$-ed rendű részkvázicsoportja.

Az 1. probléma speciális esetként tartalmazza a 2. és 3. problémákat.

Az 1. és 2. probléma esetén $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$ feltétel miatt a szereplő $Q_{n_1}, Q_{n_2}, \ldots, Q_{n_k}$ részkvázicsoportok páronként elemidegenek.

Legyen $n_1 = \left[\frac{n}{2}\right]$, akkor latin négyzet tulajdonságok miatt[9] $Q_{n_i}$ $(i=2, \ldots, k)$ egyetlen idempotens elemből áll és ezzel bizonyítottuk, hogy az 1. és 2. problémára adott válasz tagadó.[10]

A 3. problémát illetően a szerzőknek nem sikerült eredményt elérni.

A 3. problémát csoportok esetén, vagyis amikor $m$ osztója $n$-nek, C. HOBBY, H. RUMSEY és P. M. WEICHSEL vizsgálták (lásd [25]) és a következő tételt bizonyították be:

$G$ véges $n$-ed rendű csoport akkor és csak akkor tartalmaz az összes lehetséges $m$-ed rendű ($m$ osztója $n$-nek) elemekből legalább egyet, ha a következő feltételek közül legalább az egyik teljesül:

(1) $G$ ciklikus

(2) $G$ $p$-csoport és tartalmaz $p$ indexű ciklikus alcsoportot

(3) $n=p^{\alpha}q$, ahol $p$ és $q$ különböző prímszámok. $G$ csak egyetlen $q$-*Sylow* alcsoportot tartalmaz és ez $G$-nek kommutator alcsoportja, valamint akkor is, ha $S$, $G$-nek $p$-*Sylow* alcsoportja, és $b$ $S$-nek generátor eleme, és $b^p$ $G$-nek a centrumában van.

[9] Lásd [22].

[10] A részletes bizonyítás a problémakörre vonatkozó egyéb eredményekkel együtt egy későbbi alkalommal fog megjelenni.

## 5. §. A diagonális fogalmának gráfelméleti analogonja

Minden $n$-ed rendű latin négyzethez hozzárendelhető egy gráf a következőképpen:

Jelölje $a_{ij}$ az $A$ latin négyzet $i$-edik sorában és $j$-edik oszlopában álló elemet. $a_{ij}$-hez rendeljük hozzá a gráf $P_{ij}$ szögpontját. A gráfban két szögpontot akkor kötünk össze egy éllel, ha a két szögpontnak megfelelő $A$-beli elemek azonosak, vagy egy sorban, illetve egy oszlopban vannak. Jelöljük az $A$-hoz rendelt gráfot $G(A)$-val.

Egy gráfban a független pontok maximális rendszerének nevezik azon pontok halmazát, amelyek közül nincs két olyan, amelyet él köt össze és bármely, e halmazon kívül levő pontból vezet él a halmaz valamelyik eleméhez.

Könnyen belátható, hogy amennyiben $A$-ban van diagonális, úgy a diagonálisnak megfelelő $G(A)$-beli szögpontok a független pontoknak egy maximális rendszerét alkotják.

A latin négyzetek és bizonyos gráfok között leírt kapcsolat lehetőséget nyújt gráfelméleti eredmények alkalmazására.

C. BERGE könyvében [3] foglalkozik a maximális független pontrendszerek kiválasztásával.

Ortogonális latin négyzetek egyszerű előállításához szükséges olyan algoritmus, amelynek segítségével kiválasztható adott latin négyzetből egy diagonális.

C. BERGE eredményeinek megfelelő átfogalmazása segítségével a diagonális kiválasztása elektronikus számológépre programozható. A diagonálisok kiválasztására szolgáló programot készített több szerző, részletesebb tájékoztatás [26]-ban található.

[21] dolgozatában J. SINGER foglalkozik a következő problémával: az $n$-ed rendű ciklikus csoport műveletteáblájából ($n$ páratlan) hányféleképpen választható ki diagonális.

Bizonyos gráfokra vonatkozóan is foglalkoztak hasonló kérdéssel. Vagyis azt vizsgálták, hogy bizonyos gráfokban hányféleképpen lehet maximális független pontrendszert kiválasztani.

A bevezetett megfeleltetés lehetőséget nyújt a gráfelméleti eredmények alkalmazására.

## IRODALOM

[1] P. BATEMANN: Complete mappings of infinite groups. *Amer. Math. Monthly.* 1950., 623—624. o.
[2] В. Д. Белоусов: Ассоциативные системы квазигрупп. Успехи Мат. Наук 1958., 243. o.
[3] C. BERGE: *Theorie des graphes et ses applications*, Paris 1958.
[4] R. C. BOSE and S. S. SHRIKANDE: On the falsity of Euler's conjecture about the non-existence of two orthogonal Latin squeres of order $4k+2$ *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 1959. 734—737. o.
[5] R. C. BOSE and S. S. SHRIKANDE: Mutually orthogonal Latin squares, *Transactions of the Amer. Math.* Soc., 1960, 191—209. o.
[6] R. H. BRUCK: Some results in the theory of quasigroups, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 1944, 19—52. o.
[7] R. H. BRUCK: Some results in the Theory of Quasigroups, *Ann. of Math.*, 1946., 50—55. o.
[8] J. DÉNES: On a problem of L. Fuchs., Acta Sci. Mat. Univ. Szegediensis 1962., 237—242. o.
[9] A. FRIGERIO: Sui Quasi gruppi associati ai gruppi., *Rendiconti del Sem. Mat. della Univ. di Padova* 1958., 107—111. o.

[10] L. FUCHS: *Abelian groups,* Budapest 1958.
[11] L. FUCHS: Ein Kombinatorisches Problem bezüglich abelscher Gruppen., *Math. Nachrichten,* 1958., 292–297. o.
[12] M. HALL: A combinatorial problem on abelian groups., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1952., 584–587. o.
[13] M. HALL and L. J. PAIGE: Complete mapping of finite groups., *Pacific Journ. of Math.*, 1955., 541–549. o.
[14] HOSSZÚ, M.: Belouszov egy tételéről és annak néhány alkalmazásáról., *Magy. Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, 1959., 51–56. o.
[15] D. M. JOHNSON, A. L. DULMAGE, N. S. MENDELSOHN: Orthomorphism of groups and orthogonal latin squares, I., *Canadian Journ. of Math.*, 1961., 356–372. o.
[16] H. B. MANN: *Analysis and Design of Experiments.*, Dover, New-York 1949.
[17] L. J. PAIGE: Complete mappings of finite groups., *Pacific Journ. of Math.*, 1951., 111–115. o.
[18] L. J. PAIGE: A note of finite abelian groups., *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, 1947., 590–593. o.
[19] E. T. PARKER: Ortogonal latin squares. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, 1959., 859–862. o.
[20] R. SCHAUFFLER: Die Associativität im Ganzen, besonders bei Quasigruppen., *Mat. Z.*, 1957., 428–435.
[21] J. SINGER: A class of groups associated with Latin squares. *Amer. Math. Monthly* 1960., 235–240. o.
[22] D. W. WALL: Sub-quasigroups of finite quasigroups., *Pacific. Journ. Math.*, 1957., 1711–1714.
[23] K. YAMAMOTO: Generation principles of Latin squares. *Rep. Stat. Appl. Res. Union Sap. Sci. Eng.* 1961., 73–76. o.
[24] T. EVANS: Embedding incomplete Latin squares. *Amer. Math. Monthly* 1960., 958–961. o.
[25] C. HOBBY, H. RUMSEY, P. M. WEICHSEL: Finite groups having elements of every possible order. *Journ. Washington Acad. Sci.* 1960., 11–12. o.
[26] R. C. BOSE, I. M. CHAKRAVARTI, D. E. KNUTH: On methods of constructing sets of mutually orthogonal Latin squares using a computer I–II, *Technometrics* 1960., 507–516. o.; 1961., 111–117. o.

(Beérkezett: 1962. II. 20.)

# FELÜLETI GÖRBÉK AFFIN GEODETIKUS GÖRBÜLETÉNEK ÚJ JELLEMZÉSE

Írta: MERZA JÓZSEF

A háromdimenziós affin térbe ágyazott $x=x(u^1, u^2)$ felületen az unimoduláris affin metrikát a

$$\varphi = G_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta$$

alapforma definiálja[1], ahol a $G_{\alpha\beta}$ mennyiségek a szokott

$$G_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta}}{|a|^{1/4}}$$

módon képzendők és

$$a_{\alpha\beta} = \left| \frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^\alpha\, \partial u^\beta} \right|,$$

továbbá

$$a = \det \| a_{ij} \| .$$

Mint ismeretes, emellett bevezetik a *Fubini* és *Pick* által definiált

$$\psi = A_{\alpha\beta\gamma}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma$$

köbös alapformát, amelyet a

$$\psi = \frac{1}{|a|^{1/4}} \cdot \left| \frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial x}{\partial u^2}, d^3 x \right| - \frac{3}{2}\, d\varphi$$

formában is írhatunk. A felület *Gauss*-féle derivációs képleteit ezek után a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^\alpha\, \partial u^\beta} = \Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta} \frac{\partial x}{\partial u^\varrho} + G_{\alpha\beta}\, n$$

alakban nyerjük,[2] ahol

$$\Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta} = \Gamma^\varrho_{\alpha\beta} + A^\varrho_{\alpha\beta},$$

és a $\Gamma_{\alpha\beta}$ mennyiségek a $G_{\alpha\beta}$ tenzorból az ismert módon képezett *Christoffel*-szimbólumok. Az így nyert $\Gamma^*$ konnexió a felületen szimmetrikus affin összefüggést definiál. Ezen összefüggéshez tartozó autoparalel görbéket a

$$\frac{d^2 u^\varrho}{dt^2} + \Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt} = \alpha(t) \frac{du^\varrho}{dt}$$

[1] Lásd: [1], [6].
[2] Lásd: [4].

differenciálegyenlettel jellemezhetjük, majd bevezethetünk egy ilyen görbén oly $\sigma$ affin parametert, amely segítségével az autoparalel görbe differenciálegyenlete a

$$\frac{d^2u^\varrho}{d\sigma^2}+\Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{d\sigma}\frac{du^\beta}{d\sigma}=0$$

alakot ölti.[3]

Ezen előzmények után rátérünk a dolgozat céljának megjelölésére. Ismeretes, hogy valamely felületi görbe affin geodetikus görbületét a

$$\varkappa_g=-\varepsilon\frac{\sqrt{|G|}}{|\varphi|^{3/2}}\cdot\delta;\quad \varepsilon=-\operatorname{sgn} G;\quad G=\det\|G_{\alpha\beta}\|$$

formulával értelmezhetjük,[4] ahol a $\frac{du^\alpha}{ds}=t^\alpha$ jelölés alkalmazásával

$$\delta=\left|t^\alpha,\ \frac{Dt^\alpha}{ds}\right|.$$

A $\frac{D}{ds}$ szimbólum a $\Gamma^*$ segítségével képezett invariáns derivált operátora. A dolgozat célja annak kimutatása, miként lehet valamely görbe affin geodetikus görbületét az őt érintő autoparalel görbétől való eltérése mértékével definiálni. E célból tekintsük az ekviaffin $s$ ívhosszra vonatkoztatott $x=x^*(s)=x(u(s))$ felületi görbét. Rögzítsük a görbe egy pontját és legyen az az ívhosszmérés kezdőpontja, azaz

$$x^*(o)=x(u(o))=x(\underset{(0)}{u}).$$

E pontban a görbe egyenlete harmadrendig sorbafejtve

$$x^*(s)=x^*(o)+x^{*\prime}(o)\cdot s+x^{*\prime\prime}\frac{s^2}{2}+x^{*\prime\prime\prime}(o)\frac{s^3}{3!}+\mathrm{O}(4),$$

(O(4) az $s$-ben legalább negyedfokú tagokat jelöl). Felhasználva az autoparalel görbe differenciálegyenletét, az $u^\alpha(o)=\underset{(0)}{u^\alpha}$ és

$$\left(\frac{d\bar{u}^\alpha}{d\sigma}\right)_{\sigma=o}=\left(\frac{du^\alpha}{ds}\right)_{s=o}$$

kezdeti feltételek mellett meghatározható az az $x(\bar{u}(\sigma))$ autoparalel görbe, amely kielégíti a

$$\frac{d^2\bar{u}^\varrho}{d\sigma^2}+\Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta}\frac{d\bar{u}^\alpha}{d\sigma}\frac{d\bar{u}^\beta}{d\sigma}=0 \tag{1}$$

differenciálegyenletet. Az autoparalel görbe egyenlete végtelen sor alakjában legyen

$$\bar{x}(\sigma)=\bar{x}(o)+\bar{x}'(o)\sigma+\bar{x}''(o)\frac{\sigma^2}{2!}+\bar{x}'''(o)\frac{\sigma^3}{3!}+\mathrm{O}(4).$$

[3] Lásd: [3].
[4] Lásd: [2].

Rendeljük egymáshoz az egyenlő parameterértékű pontokat, tehát nevezzük az $s=\sigma$-hoz tartozó párokat megfelelő pontpároknak. E pontokban vegyük a görbék érintővektorait. Blaschke idézett munkájában értelmezi két vonalelem affin távolságát a következő módon. Két vonalelem affin távolsága azon tetraéder térfogatának hatodik gyökével egyenlő, amelyet az érintővektorok két támadási pontja, továbbá az érintővektoroknak a másik görbe megfelelő pontjabeli simulósíkjával való metszéspontjai alkotnak.

A számolás céljára jelöljük az $s=\sigma$ értékhez tartozó pontot a görbén $P$-vel, az autoparalel görbén pedig $\bar{P}$-sal. A $P$, ill. $\bar{P}$ ponton áthaladó érintő egyenlete

$$y = x^*(s)+\mu\cdot x^{*\prime}(s), \quad \text{ill.} \quad y = \bar{x}(\sigma)+\tau\bar{x}'(\sigma)$$

és az ugyanezen pontokban vett simulósíkok egyenlete

$$|z-x^*(s),\ x^{*\prime}(s),\ x^{*\prime\prime}(s)| = 0, \quad \text{ill.} \quad |z-\bar{x}(\sigma),\ \bar{x}'(\sigma),\ \bar{x}''(\sigma)| = 0.$$

A $\sigma=s$ feltételt kihasználva a $P$ pontbeli érintő a $\bar{P}$ pontbeli simulósíkot a

$$\mu_0=\frac{|\bar{x}(s)-x^*(s),\ \bar{x}'(s),\ \bar{x}''(s)|}{|x^{*\prime}(s),\ \bar{x}'(s),\ \bar{x}''(s)|}$$

parameterhez tartozó $M_2$ pontban metszi. A $\bar{P}$ ponton áthaladó érintő és a $P$ pontbeli simulósík $M_1$ metszéspontjának parameterértéke pedig

$$\tau_0=\frac{|x^*(s)-\bar{x}(s),\ x^{*\prime}(s),\ x^{*\prime\prime}(s)|}{|\bar{x}'(s),\ x^{*\prime}(s),\ x^{*\prime\prime}(s)|}.$$

Rövid számolás után a $P\bar{P}M_1M_2$ tetraéder $V$ térfogatára a

$$6V = \tau_0\mu_0\cdot|\bar{x}(s)-x^*(s),\ \bar{x}'(s),\ x^{*\prime}(s)|$$

kifejezést kapjuk. Ennek becslése során fontoljuk meg, hogy

$$x^*(o)=\bar{x}(o) \quad \text{és} \quad x^{*\prime}(o)=\bar{x}'(o).$$

A $\tau_0$ és $\mu_0$ esetében elégséges a sorfejtésben a másodrendű deriváltakig elmenni, azonban a harmadik tényező esetében a harmadrendű tagokat is figyelembe kell venni. Viszonylag egyszerű számítás révén kapjuk, hogy

$$\mu_0=-\frac{s}{2}\cdot(1+O(1)); \quad \tau_0=-\frac{s}{2}\cdot(1+O(1)),$$

míg

$$|\bar{x}(s)-x^*(s),\ \bar{x}'(s),\ x^{*\prime}(s)|=\frac{s^4}{12}\cdot\left[|x^{*\prime}(o);\ \bar{x}''(o)-x^{*\prime\prime}(o);\ \bar{x}'''(o)-x^{*\prime\prime\prime}(o)|+O(1)\right].$$

A fentiek összevetésével a tetraéder térfogata tehát

$$(2) \qquad 6V=\frac{s^6}{48}\cdot|x^{*\prime}(o);\ \bar{x}''(o)-x^{*\prime\prime}(o);\ \bar{x}'''(o)-x^{*\prime\prime\prime}(o)|+O(7).$$

A képletben szereplő determináns meghatározására állítsuk elő a benne szereplő vektorokat egy alaptriéderre vonatkozólag. Mivel az $x^*$ görbe nem autoparalel görbe, azért arra minden további nélkül alkalmazhatók az [5]-ben levezetett képletek s ezért a

$$\underset{(1)}{t} = t^\alpha \frac{\partial x}{\partial u^\alpha} = x^{*\prime}$$

$$\underset{(2)}{t} = \left( \frac{dt^\alpha}{ds} + \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} t^\beta t^\gamma \right) \frac{\partial x}{\partial u^\alpha}$$

$$\underset{(3)}{t} = n \qquad (n\text{: a felület affin normálisa})$$

triéderben fennállnak az alábbi összefüggések:

$$x^{*\prime} = \underset{(1)}{t}$$

$$x^{*\prime\prime} = \underset{(2)}{t} + \varphi \underset{(3)}{t}$$

$$x^{*\prime\prime\prime} = F^\alpha \underset{(\alpha)}{t} + A \cdot \underset{(3)}{t}.$$

Az autoparalel görbe esetében

$$\underset{(1)}{\bar{t}}(o) = \bar{x}'(o) = x^{*\prime}(o) = \underset{(1)}{t}(o),$$

mivel azonban a görbére fennáll az (1) differenciálegyenlet, azért $\underset{(2)}{\bar{t}} \equiv O$, vagyis

$$\bar{x}'' = \varphi \underset{(3)}{\bar{t}},$$

ahol $\underset{(3)}{\bar{t}}$ a megfelelő görbepontban veendő. Ennek deriválása az

$$\bar{x}''' = \varphi' \underset{(3)}{t} + \varphi \underset{(3)}{\bar{t}'}$$

eredményt szolgáltatja. Mivel azonban $\underset{(3)}{\bar{t}}$ a felület affin normálisa, azért a

$$\frac{\partial n}{\partial u^\alpha} = B^\varrho_\alpha \frac{\partial x}{\partial u^\varrho}$$

derivációs képlet felhasználásával[5] látjuk, hogy a

$$\underset{(3)}{\bar{t}'} = \frac{\partial \underset{(3)}{t}}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{d\bar{u}^\alpha}{d\sigma} = \frac{\partial n}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{d\bar{u}^\alpha}{d\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \tau$$

vektor az érintősíkban fekszik. Ha a $\sigma = O$ pontot tekintjük, akkor a $\tau$ vektor felbontható a $\underset{(1)}{t}(o)$ és $\underset{(2)}{t}(o)$ vektorok segítségével

$$\tau = \alpha \underset{(1)}{t}(o) + \beta \underset{(2)}{t}(o)$$

alakban. Végezzük el ezek után a (2) determinánsba való behelyettesítést:

$$\Delta = |x^{*\prime}(o), \bar{x}''(o) - x^{*\prime\prime}(o), \bar{x}'''(o) - x^{*\prime\prime\prime}(o)| =$$

$$= |\underset{(1)}{t}(o), \varphi \underset{(3)}{t}(o) - \underset{(2)}{t}(o) - \varphi \underset{(3)}{t}(o), \varphi' \underset{(3)}{t}(o) + \varphi[\alpha \underset{(1)}{t}(o) + \beta \underset{(2)}{t}(o)] - F^\alpha \underset{(\alpha)}{t} - A \underset{(3)}{t}|.$$

[5] Lásd: [1].

Egyszerűbb írásmód kedvéért hagyjuk el az $s=\sigma=o$ hely állandó kiírását, majd egyszerűbb alakra hozva a determinánst a

$$\Delta=|\underset{(1)}{t},\underset{(2)}{t},(\varphi'-A)\underset{(3)}{t}|$$

kifejezést nyerjük. Használjuk még fel a

$$|\underset{(1)}{t},\underset{(2)}{t},\underset{(3)}{t}|=|G|^{1/2}\cdot\delta$$

és az

$$A=\frac{3}{2}\varphi'+\psi$$

összefüggéseket[6] s ily módon a

$$\Delta=-\left(\frac{\varphi'}{2}+\psi\right)\delta|G|^{1/2}$$

alakhoz jutunk. A ČECH által bevezetett affin geodetikus görbület kifejezéséből a $\delta\cdot|G|^{1/2}$ helyettesíthető s így

$$\Delta=\varepsilon\left(\psi+\frac{\varphi'}{2}\right)\cdot\varphi^{3/2}\cdot\varkappa_g$$

lesz. Ha a determináns értékét a tetraéder térfogatképletébe írjuk és a

$$c(u)=c(u^1,u^2)=\frac{288\,\varepsilon}{\varphi^{3/2}\cdot\left(\psi+\frac{\varphi'}{2}\right)}$$

csupán felületi helytől függő állandót bevezetjük, akkor

$$c(u)\cdot\frac{V}{s^6}=\varkappa_g+O(1).$$

A W. BLASCHKE által definiált affin távolság[7]

$$d=c\cdot|V|^{1/6},\qquad c=\text{const.}$$

felhasználásával és az

$$\alpha=\frac{|c(u)|^{1/6}}{|c|}$$

jelöléssel határátmenetre térve

$$|\varkappa_g|^{1/6}=\alpha\cdot\lim_{s\to 0}\left|\frac{d}{s}\right|$$

adódik.

TÉTEL: *Valamely felületi görbe affin geodetikus görbülete az őt érintő, alkalmasan választott, autoparalel görbétől való eltérésének mértékét szolgáltatja, amint azt az előző képlet kifejezi.*

[6] Lásd: [5].
[7] Lásd: [1].

## IRODALOM


[1] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* II., Berlin, 1923.
[2] E. Čech, Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine, *Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk* **28** (1923), 1—47.
[3] L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry*, New York, 1927.
[4] J. Merza, L'introduction de la différentiation absolue dans l'espace affin, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1958), 330—337.
[5] J. Merza, Sur les trièdres affines associés aux courbes, (sous presse).
[6] P. A. Shirokov—A. P. Shirokov, *Géométrie différentielle affine*, Moscou, 1959. (en russe)


(Beérkezett: 1962. XI. 25.)

# BELSŐ METRIKÁJÚ HOMOGÉN TEREKRŐL

Írta: SZENTHE JÁNOS

A halmazelméleti geometria egyik fő feladata, hogy a differenciálgeometria eredményeiből kiküszöbölje a geometriától idegen elemeket. Ez a törekvés, amely eredetileg a koordinátafelvétel megkerülését, tételeknek a differenciálhatósági feltevésektől való függetlenítését és más hasonló módszerbeli tisztogatást célzott, számos esetben vezetett új, a régebbi elméletek hatáskörén kívül eső eredményekre. H. BUSEMANN egy kiterjedt elméletet dolgozott ki, amely — a már említett törekvésnek megfelelően — vizsgálat tárgyává teszi a nagybani differenciálgeometria jelentős részét. E vizsgálatok kiindulópontját egy sikeres fogalomalkotás, a G-tér képezi. E terek a metrikus terek egy speciális típusát alkotják. Mielőtt definíciójukat megadnánk, néhány jelölést vezetünk be.

Ha $R$ egy metrikus tér és $a, b$ pontjai, akkor e térben mért távolságukat $\mu(a, b)$ jelöli. Ha az $R$ tér $a, b, c$ pontjaira érvényes a $\mu(a, c)+\mu(c, b) = \mu(a, b)$ összefüggés, akkor azt mondjuk, hogy $c$ az $a$ és $b$ *között van*, jelölésben: $acb$. Ha $p$ az $R$ pontja és $\varrho$ nem negatív szám, az $S(p, \varrho) = \{x : \mu(p, x) < \varrho\}$ halmazt $p$ középpontú és $\varrho$ sugarú *nyílt gömbnek*, az $S\langle p, \varrho\rangle = \{x : \mu(p, x) \leqq \varrho\}$ halmazt pedig $p$ középpontú és $\varrho$ sugarú *zárt gömbnek* nevezzük. Ha $a$ és $b$ az $R$ pontjai és $c$ e tér olyan pontja, melyre $\mu(a, c) = \mu(c, b) = \frac{1}{2}\mu(a, b)$ érvényes, akkor azt mondjuk, hogy $c$ az $a, b$ *pontpár középpontja*.

Az $R$ metrikus teret G-térnek[1] nevezik, ha rá az alábbi négy axióma (**A1—4**) állításai érvényesek.

**A1** Az $R$ tér *finit kompakt*, vagyis bármely végtelen és korlátos részhalmazának van torlódási pontja a $R$ térben.

**A2** Az $R$ tér *konvex*, vagyis bármely két különböző pontjához található egy közöttük levő, de tőlük különböző pontja.

E definícióval összhangban az $R$ tér $H$ részhalmazát konvexnek nevezik, ha a $H$ bármely két különböző pontjához megadható a $H$ egy ezek között levő, de tőlük különböző pontja.

A hátralevő két axióma terminológiájának megindokolására bevezetjük a *metrikus szakasz* fogalmát. A számegyenes egy zárt szakaszának az $R$ térbe való izometrikus leképezésekor keletkező képét az $R$ tér metrikus szakaszának nevezzük; az intervallum végpontjainak képeit a metrikus szakasz végpontjainak nevezzük. Segédtételként többször is alkalmazni fogjuk. K. MENGER egy tételének[2] következő változatát, melyet itt szintén a hátralevő két axióma motiválására adunk meg.

[1] BUSEMANN [1], 37.
[2] MENGER [3].

**S1** *Egy finit kompakt és konvex metrikus tér bármely két pontja összeköthető a tér egy metrikus szakaszával, vagyis található egy olyan metrikus szakasza a térnek, melynek végpontjai az említett pontok.*

Az $R$ teret *belső metrikájú*[3] térnek nevezik, ha bármely két pontja összeköthető egy olyan rektifikálható ívével a térnek, melynek hossza a két pont távolságával egyenlő. Egyszerűen belátható **S1** alapján, hogy minden olyan tér, melyre **A1** és **A2** állításai érvényesek, belső metrikájú.

**A3** Az $R$ tér metrikus szakaszai *lokálisan meghosszabbíthatók*, vagyis bármely $p$ pontjához megadható olyan $\varrho_p$ pozitív szám, hogy az $S(p, \varrho_p)$ gömb bármely $x$ és $y$ pontjához található olyan ezektől különböző $z$ pont, hogy $xyz$ érvényes.

Ha az $R$ tér rögzített $p$ pontja esetén a fenti axiómának megfelelő $\varrho_p$ számok halmazának szuprémumát $\varrho(p)$ jelöli, egyszerűen belátható, hogy ez a szám is eleme a halmaznak; $\varrho(p)=\infty$ esetén $S(p, \varrho(p))$ helyett az $R$ teret célszerű szerepeltetni.

Azt mondjuk, hogy egy metrikus szakasz *reguláris*, ha található olyan metrikus szakasz, melynek része és amelynek végpontjai az eredeti metrikus szakasz végpontjaitól különböznek. Nyilvánvaló, hogy rögzített $p$ pont esetén minden olyan metrikus szakasz, melynek végpontjai az $S(p, \varrho(p))$ elemei, reguláris az **A3** következtében.

**A4** Az $R$ térben a metrikus szakaszok *meghosszabbítása egyértelmű*, vagyis ha $x, y, z_1, z_2 \in R$ és $xyz_1, xyz_2, \mu(y, z_1) = \mu(y, z_2)$ érvényesek, akkor $z_1 = z_2$.

Az $R$ tér $y$ pontját *elágazási pontnak* nevezzük, ha megadhatók hozzá az $R$ olyan $x, z_1$ és $z_2$ pontjai, hogy $xyz_1, xyz_2$ és $\mu(y, z_1) = \mu(y, z_2)$ érvényesek. Az **A4** tehát azt mondja ki, hogy az $R$ térben nincsenek elágazási pontok.

Egyszerűen belátható, hogy a felsorolt axiómáknak megfelelő térben a differenciálgeometriából ismert geodetikus vonalaknak az extremális tulajdonságuk szempontjából vett analogonjai léteznek; ez indokolja e terek elnevezését.

A G-tér fogalmával kapcsolatban figyelmet érdemel a következő körülmény: egyrészről — mint már említettük — a nagybani differenciálgeometria számos tétele érvényes e terekre és ez igen valószínűvé teszi, hogy e terek, legalábbis topológiailag, szorosabb rokonságban álljanak a differenciálgeometriai terekkel, melyek mind topológiai sokaságokon vannak értelmezve; másrészről viszont — amint az látható volt — a definícióra használt axiómák ebben a vonatkozásban igen keveset tartalmaznak. Ez a kettős körülmény indokolja azt a sejtést, hogy az axiómák implicite, következményeikben igen erős megszorítást jelenthetnek a G-terek topológiai struktúrájára vonatkozóan. H. BUSEMANN szerint igen valószínű, hogy minden G-tér topológiai sokaság, de az a véleménye, hogy ennek kimutatása a topológia jelen lehetőségei mellett kilátástalan; valóban még azt sem sikerült bizonyítani, hogy minden G-tér véges dimenziójú.[4]

Ebben a dolgozatban a G-tér fogalmának egy leszűkítését adjuk meg. Ezt azzal érjük el, hogy olyan metrikus tereket tekintünk, melyek a már felsorolt **A1—A4** axiómákon kívül egy további **A5** axióma állításainak is megfelelnek; az ilyen tereket, rövidség kedvéért, H-tereknek fogjuk nevezni. Az új axióma természetesen kapcsolódik az előzőkhöz és geometriailag indokolt. Egyszerűen kimutatható lesz, hogy ez a leszűkítés az eredeti célkitűzés szempontjából lényegtelen, mert minden differenciálgeometriailag érdekes probléma e szűkebb fogalom körébe esik. Meg fogjuk

[3] RINOW [6], 121.
[4] BUSEMANN [1], 403; RINOW [6], 193.

mutatni, hogy e szűkebb térfogalom esetén minden teljes izometria-csoport LIE-csoport és hogy homogén esetben, tehát egy tranzitív izometria-csoport létezése esetén, e terek topológiai sokaságokat képeznek. Így várható, hogy e szűkebb térfogalommal a differenciálgeometriai problémáknak szélesebb köre lesz tárgyalható, mint ami a $G$-tér fogalmával volt.

## I.

A következőkben néhány definíciót és segédtételt adunk meg, amelyekre később szükségünk lesz.

Az $R$ metrikus tér $H$ részhalmazát *egyszeresen konvexnek* nevezik, ha a $H$ bármely két pontjából alkotott pontpárnak van egy és csak egy középpontja a $H$ halmazban.

Egyszerűen belátható, hogy egy finit kompakt metrikus térnek egy zárt részhalmaza akkor és csak akkor egyszeresen konvex, ha bármely két pontja összeköthető egy, de csak egy, e halmazhoz tartozó metrikus szakasszal.

Mint segédtételt fogjuk alkalmazni a következő *Menger*-féle tételt:[5]

**S2** *Ha $R$ finit kompakt metrikus tér és $H$ zárt, egyszeresen konvex részhalmaza, akkor a $H$ halmazhoz tartozó konvex halmazok közös része konvex.*

Az $R$ metrikus tér $H$ részhalmazát *szigorúan konvexnek* nevezzük, ha a $H$ bármely két különböző pontjához található a $H$ egy ezektől különböző és köztük levő pontja és minden ilyen pont belső pontja a $H$ halmaznak.

Egyszerűen belátható, hogy egy finit kompakt metrikus tér $H$ zárt részhalmaza akkor és csak akkor szigorúan konvex, ha a $H$ bármely két pontja összeköthető egy a $H$ halmazhoz tartozó metrikus szakasszal és minden ilyen metrikus szakasz, végpontjai esetleges kivételével, a $H$ halmaz belső pontjaiból áll.

Többször fogjuk a következő, egyszerűen bizonyítható segédtételt alkalmazni:

**S3** *Ha $R$ finit kompakt metrikus tér és $p$ olyan pontja, hogy bizonyos $\varrho > 0$ esetén az $S\langle p, \varrho\rangle$ konvex és minden e zárt gömb által tartalmazott metrikus szakasz reguláris, akkor $q \in S\langle p, \varrho\rangle$ esetén van olyan maximális $\delta \geqq 0$, hogy $S\langle q, \delta\rangle \subset S\langle p, \varrho\rangle$ és ebben az esetben $\mu(p, q) = \varrho - \delta$.*

A következő segédtétel egyszerű elemi geometriai tények általánosításának tekinthető:

**S4** *Ha $R$ finit kompakt metrikus tér és $H$ zárt, egyszeresen konvex részhalmaza és $C$ olyan halmaz, $\varrho > 0$ pedig olyan szám, hogy $a \in \bar{C}$ esetén, ahol $\bar{C}$ a $C$ zárt burkát jelöli, $S\langle a, \varrho\rangle$ szigorúan konvex és minden általa tartalmazott metrikus szakasz reguláris, továbbá $S\langle a, \varrho\rangle \subset H$ érvényes, akkor $\bigcap_{a \in C} S\langle a, \varrho\rangle$ szigorúan konvex.*

A segédtétel bizonyítására feltehetjük, hogy az $M = \bigcap_{a \in C} S\langle a, \varrho\rangle$ halmaz legalább két pontból áll, ellenkező esetben ugyanis a szigorú konvexitás definíciójának feltételei üresen teljesülnek. Az **S2** alapján következik, hogy $M$ konvex. Legyenek $u$ és $v$ az $M$ különböző pontjai és $w$ olyan ezektől különböző pontja, melyre $uwv$ érvényes. Az **S3** alapján következik minden egyes $a \in C$ esetén olyan

[5] MENGER [3].

maximális $\delta(a) \geqq 0$ létezése, melyre $S\langle w, \delta(a)\rangle \subset S\langle a, \varrho\rangle$ fennáll. Tekintve, hogy $S\langle a, \varrho\rangle$ szigorúan konvex $a \in C$ esetén, adódik, hogy $\delta(a) > 0$, $a \in C$ érvényes. Tegyük fel, hogy $w$ nem belső pontja az $M$ halmaznak, akkor képezhető a $C$ elemiből egy olyan $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} \delta(a_n) = 0$. Mivel $M$ nem üres az $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ sorozat korlátos és így, az $R$ finit kompakt volta miatt, van egy $a_t$ torlódási pontja. Értelmezése folytán $a_t$ a $\bar{C}$ eleme. Egyszerűen belátható, hogy $u, v \in S\langle a_t, \varrho\rangle$ és így **S3** alapján az is, hogy létezik a megfelelő $\delta(a_t) \geqq 0$. Mivel feltevéseink következtében $S\langle a_t, \varrho\rangle$ szigorúan konvex, adódik, hogy $\delta(a_t) > 0$. Az elmondottakból következik egy olyan $k$ természetes szám létezése, melyre $\mu(a_t, a_k) < \frac{\delta(a_t)}{2}$ és $\delta(a_k) < \frac{\delta(a_t)}{2}$ érvényesek. Mivel **S3** szerint $\mu(a_t, w) = \varrho - \delta(a_t)$ és $\mu(a_k, w) = \varrho - \delta(a_k)$, a fentiek alapján azt kapjuk, hogy $\mu(a_k, w) > \varrho - \frac{\delta(a_t)}{2}$ és így $\mu(a_k, a_t) \geqq |\mu(a_t, w) - \mu(a_k, w)| = \mu(a_k, w) - \mu(a_t, w) > \varrho - \frac{\delta(a_t)}{2} - (\varrho - \delta(a_t)) = \frac{\delta(a_t)}{2}$, ami ellentmondásban van egy fenti a $k$ értelmezésével kapcsolatos egyenlőtlenséggel. Helytelen volt tehát az a feltevésünk, hogy $w$ nem belső pontja az $M$ halmaznak, ebből viszont az következik, hogy $M$ szigorúan konvex.

Mint már említettük, ebben a dolgozatban a G-tér fogalmának egy leszűkítését adjuk meg, amit egy újabb axióma felvételével érünk el. Ez az axióma a következő:

**A5** Az $R$ tér minden $p$ pontjához található olyan $\varkappa_p > 0$ szám, hogy $0 < \varkappa \leqq \varkappa_p$ esetén az $S\langle p, \varkappa\rangle$ zárt gömb szigorúan konvex; ha rögzített $p$ pont esetén az előző állításnak megfelelő $\varkappa_p$ számok szuprémumát $\varkappa(p)$ jelöli, akkor az $R$ téren így értelmezett függvény infimuma az $R$ minden korlátos részhalmazán nullánál nagyobb.

Azokat a tereket, melyekre az **A1—5** axiómák állításai érvényesek, a következőkben H-tereknek fogjuk nevezni. Említettük, hogy a H-terekre való áttérés a differenciálgeometriai vonatkozások szempontjából nem jelent lényeges megszorítást; ez egyszerűen következik J. H. C. WHITEHEAD egy tételéből, mely szerint egy harmadosztályú és pozitív reguláris ívelemű FINSLER-féle térben az elegendően kis sugarú gömbök szigorúan konvexek.[6] (Első osztályú FINSLER-féle terekre ez már nem érvényes.)

Következő segédtételünk igen egyszerűen bizonyítható:

**S5** *Ha $R$ egy halmaz, $H \subset R$, $\Gamma$ pedig az $R$ önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezéseinek egy csoportja és $\varphi \in \Gamma$ esetén $\varphi(H)$ a $H$ halmaznak a $\varphi$ leképezés nyomán keletkező képét jelöli, akkor $\Gamma$ minden eleme a $\bigcap_{\varphi \in \Gamma} \varphi(H)$ halmazt önmagába képezi le.*

Segédtételként fogjuk alkalmazni H. BUSEMANN következő tételét:[7]

**S6** *Ha $R$ finit kompakt metrikus tér, mely konvex és nem tartalmaz elágazási pontot és $\varphi$ az $R$ egy olyan izometriája, melyhez található olyan $p \in R$ és $\varrho > 0$, hogy $\varphi$ az $S\langle p, \varrho\rangle$ minden pontját változatlanul hagyja, akkor $\varphi$ az $R$ minden pontját változatlanul hagyja.*

[6] WHITEHEAD [7].
[7] BUSEMANN [1], 178.

Ha $R$ metrikus tér és $\Sigma$ az $R$ izometriáinak egy halmaza, $p$ pedig egy tetszőleges, de a továbbiakban rögzített pontja, akkor értelmezhető a $\Sigma$ halmaz $\varphi$, $\psi$ elemeiből alkotott $(\varphi, \psi)$ rendezett párok halmazán a $\delta_p(\varphi, \psi) = \sup\limits_{x \in R} \mu(\varphi(x), \psi(x))$ $e^{-\mu(p,x)}$ függvény. Egyszerűen belátható, hogy a $\Sigma$ halmaz e függvénnyel, mint távolságfüggvénnyel, metrikus teret képez.[8]

Az $R$ metrikus tér izometriáinak $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$ sorozatát *konvergensnek* nevezik, ha az $R$ minden $x$ pontja esetén a $\{\varphi_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ sorozat konvergens. Egyszerűen belátható, hogy konvergens $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$ sorozat esetén az a $\varphi$ leképezés, mely a $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, $x \in R$ kifejezéssel van értelmezve az $R$ izometriája; ezt az izometriát a $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$ sorozat *limeszének* nevezik. Az $R$ metrikus tér izometriáinak egy halmazát *teljesnek* nevezzük, ha elemeiből alkotható minden konvergens sorozat limeszét tartalmazza.

Fel fogjuk használni a következő két ismert tételt[9]:

*Ha $R$ metrikus tér, $p \in R$, a $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$ sorozat elemei és a $\varphi$ az $R$ izometriái és $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_p(\varphi_n, \varphi) = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\varphi_n(x), \varphi(x)) = 0$ az $R$ minden $x$ pontja esetén érvényes.*

*Ha $R$ finit kompakt metrikus tér, $p \in R$ továbbá a $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$ sorozat elemei és $\varphi$ az $R$ izometriái és az $R$ minden $x$ pontjára érvényes, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\varphi_n(x), \varphi(x)) = 0,$$

*akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_p(\varphi_n, \varphi) = 0$.

Az említett két tétel alapján egyszerűen bizonyíthatók a következő megállapítások: *ha $R$ finit kompakt metrikus tér és $\Gamma$ e tér izometriáinak egy csoportja, akkor a $\delta_p$ metrika által e csoporton indukált topológia független a $p$ ponttól;*[10] *$\Gamma$ e topológiára nézve topológikus csoportot képez, amely az $R$ tér topológikus transzformáció csoportja.*[11] A következőkben az izometria-csoportokat, a most elmondottak alapján, topológikus csoportoknak fogjuk tekinteni.

Mint segédtételt alkalmazni fogjuk H. BUSEMANN egy tételének következő kézenfekvő kiterjesztését:[12]

S7 *Ha $R$ finit kompakt metrikus tér, $p \in R$ és $\Sigma$ az $R$ izometriáinak egy teljes halmaza, akkor a $\delta_p$ metrika segítségével a $\Sigma$ halmazból képezett metrikus tér szintén finit kompakt.*

## II.

Egy topológikus csoportról azt mondják, hogy van *tetszőlegesen kicsi alcsoportja*, ha egységelemének bármely környezete tartalmaz egynél több elemű alcsoportot.

[8] BUSEMANN [1], 16—17.
[9] BUSEMANN [1], 17—18.
[10] BUSEMANN [1], 17.
[11] MONTGOMERY—ZIPPIN [4], 40.
[12] BUSEMANN [1], 18.

Rövidség kedvéért bevezetjük a következő elnevezést: az $R$ metrikus tér $p$ pontjáról azt mondjuk, hogy *reguláris pontja* a térnek, ha található olyan $\varrho > 0$ szám, hogy

1. az $S\langle p, \varrho\rangle$ egyszeresen konvex,
2. minden az $S\langle p, \varrho\rangle$ által tartalmazott metrikus szakasz reguláris,
3. $q \in S(p, \varrho)$ esetén van olyan $\varkappa_q > 0$, hogy $0 < \sigma \leqq \varkappa_q$ esetén $S\langle q, \sigma\rangle$ szigorúan konvex,
4. ha rögzített $q \in S(p, \varrho)$ esetén az előző feltételnek megfelelő $\varkappa_q$ értékek szuprémumát $\varkappa(q)$ jelöli, akkor $\inf\limits_{q \in S(p,\varrho)} \varkappa(q)$ nem nulla.

E dolgozat eredményei a következő tételen alapulnak:

**T1** *Ha az $R$ finit kompakt metrikus tér konvex, nincs elágazási pontja, de tartalmaz legalább egy reguláris pontot és $\Gamma$ az $R$ izometriáinak egy csoportja, akkor a $\Gamma$ nem rendelkezik tetszőlegesen kicsi alcsoporttal.*

Nyilvánvaló, hogy bizonyításra az az eset szorul, mikor $R$ egynél több pontot tartalmaz. A bizonyítást indirekt úton végezzük: feltesszük, hogy $\Gamma$ rendelkezik tetszőlegesen kicsi alcsoporttal. Képezzük az $R$ egy reguláris $p$ pontjával a $\Gamma$ csoport $\delta_p$ metrikáját. Indirekt feltevésünk következtében tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén megadható a $\Gamma$ olyan nem-triviális $\Delta_\varepsilon$ alcsoportja, hogy a $\Delta_\varepsilon$ tetszőleges $\varphi$ elemére érvényes a $\delta_p(\varphi, \iota) < \varepsilon$ összefüggés, ahol $\iota$ a $\Gamma$ egységelemét jelöli. Tekintve, hogy $\delta_p(\varphi, \iota) = \sup\limits_{x \in R} \mu(\varphi(x), x) \cdot e^{-\mu(p, x)}$, az exponenciális függvény alaptulajdonságaiból és az elmondottakból következik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $\xi > 0$ értékekhez megadható a $\Gamma$ olyan nem-triviális $\Lambda_{\varepsilon,\xi}$ alcsoportja, melynek bármely $\varphi$ elemére $x \in S\langle p, \xi\rangle$ esetén $\mu(\varphi(x), x) < \varepsilon$ érvényes.

Jelölje most $\varrho$ a regularitás értelmében a $p$ ponthoz sugárként tartozó pozitív szám és az $R$ tér átmérőjének minimumát. A regularitás értelmezésében szereplő jelentésének megfelelően legyen $\varkappa = \inf\limits_{q \in S(p,\varrho)} \varkappa(q)$, akkor $\varkappa > 0$. Legyen $\alpha = \min\left(\varkappa, \frac{\varrho}{3}\right)$ és $\varepsilon = \frac{\alpha}{4}$, a továbbiakban tehát már rögzített. Tekintsük a $\Gamma$ csoportnak az előbbiekben már értelmezett $\Lambda_{\varepsilon,\varrho}$ alcsoportját. Megadható olyan $x \in S\left\langle p, \frac{\varrho}{3}\right\rangle$ pont és $\varphi \in \Lambda_{\varepsilon,\varrho}$ izometria, melyekre $\varphi(x) \neq x$ érvényes; ellenkező esetben ugyanis, a $\Lambda_{\varepsilon,\varrho}$ minden egyes eleme az $S\left\langle p, \frac{\varrho}{3}\right\rangle$ minden pontját változatlanul hagyná, és így **S6** következtében $\Lambda_{\varepsilon,\varrho}$ tiriviális alcsoport lenne. Egyszerűen belátható, hogy a tételben szereplő feltételek teljesülése esetén van olyan $a$ pont, melyre $ax\varphi(x)$ és $\mu(a, x) = \alpha - 3\varepsilon$ érvényesek.

A bizonyítás további részében alapvető szerepet játszik a következő konstrukció: ha $z \in R$ és $\xi > 0$, akkor legyen $F(z, \xi) = \bigcap\limits_{\psi \in \Lambda_{\varepsilon,\varrho}} S\langle \psi(z), \xi\rangle$. A fentiek miatt $x, \varphi(x) \in F(a, \alpha)$, ugyanis $\psi \in \Lambda_{\varepsilon,\varrho}$ esetén $\mu(x, \psi(a)) \leqq \mu(x, a) + \mu(a, \psi(a)) < \alpha - 3\varepsilon + \varepsilon = \frac{\alpha}{2} < \alpha$ és $\mu(\varphi(x), \psi(a)) \leqq \mu(\varphi(x), x) + \mu(x, \psi(a)) \leqq \mu(\varphi(x), x) + \mu(x, a) + \mu(a, \psi(a)) < \varepsilon + \alpha - 3\varepsilon + \varepsilon = \frac{3}{4}\alpha < \alpha$. Szintén egyszerűen látható be, hogy $F(a, \alpha) \subset S\langle p, \varrho\rangle$.

Legyen $\zeta$ azoknak a $\xi$ értékeknek infimuma, melyekre $x \in F(a, \xi)$ érvényes. Az előbb bizonyítottak szerint $\alpha \geqq \zeta$. Az $F(a, \zeta)$ halmaz tartalmazza az $x$ pontot. Ugyanis $\zeta$ definíciója szerint minden $\xi' > \zeta$ értékhez található olyan $\xi$, hogy $\zeta \leqq \xi < \xi'$ és $x \in F(a, \xi)$ érvényesek. Az utóbbiak viszont azt jelentik, hogy $\psi \in \Lambda_{\varepsilon, \varrho}$ esetén $\mu(\psi(a), x) \leqq \xi$, amiből az következik, hogy $\mu(\psi(a), x) \leqq \zeta$ $\psi \in \Lambda_{\varepsilon, \varrho}$ esetén, vagyis $x \in F(a, \zeta)$.

Megmutatjuk, hogy $x$ nem lehet belső pontja az $F(a, \zeta)$ halmaznak. Ha ugyanis $x$ belső pontja lenne az $F(a, \zeta)$ halmaznak, akkor volna olyan $\delta > 0$, hogy $S\langle x, \delta\rangle \subset \subset F(a, \zeta)$ érvényes volna, vagyis $S\langle x, \delta\rangle \subset S\langle\psi(a), \zeta\rangle$ minden $\psi \in \Lambda_{\varepsilon, \varrho}$ esetén fennállna; az **S3** alapján viszont ebből az következne, hogy $\mu(\psi(a), x) \leqq \zeta - \delta$ minden $\psi \in \Lambda_{\varepsilon, \varrho}$ esetén, ami azt jelenti, hogy $x \in F(a, \zeta - \delta)$; ez viszont ellentmond $\zeta$ definíciójának.

A $\varphi(x)$ pont szintén eleme az $F(a, \zeta)$ halmaznak. Ez egyszerűen következik **S5** alapján abból, hogy $S\langle\psi(a), \zeta\rangle = \psi(S\langle a, \zeta\rangle)$ és hogy $x \in F(a, \zeta) = \bigcap_{\psi \in \Lambda_{\varepsilon, \varrho}} S\langle\psi(a), \zeta\rangle$.

Az **S4** alapján belátható, hogy $F(a, \zeta)$ szigorúan konvex; tekintve, hogy — mint beláttuk — $a, x, \varphi(x) \in F(a, \zeta)$ fennáll és hogy $ax\varphi(x)$, továbbá $a \neq x \neq \varphi(x)$ érvényesek, ez arra vezet, hogy $x$ az $F(a, \zeta)$ halmaznak csak belső pontja lehet. Ez viszont ellentmond annak a már bizonyított állításnak, hogy $x$ nem lehet belső pontja e halmaznak. Helytelen volt tehát az a feltevés, hogy a $\Gamma$ csoportnak lehet tetszőlegesen kicsi alcsoportja.

## III.

A következőkben fel fogjuk használni az igen mély GLEASON—YAMABE-féle[13] tételt, amely a következő:

*Ha egy lokálisan bikompakt topológikus csoportnak nincs tetszőlegesen kis alcsoportja, akkor az LIE-csoport.*

E tételből egyszerűen adódik a következő:

**T2** *Ha a finit kompakt R metrikus tér konvex, nincs elágazási pontja, de van legalább egy reguláris pontja és $\Gamma$ az R izometriáinak egy teljes csoportja, akkor $\Gamma$ LIE-csoport.*

Tekintettel a **T1** tételre, csak azt kell belátni, hogy $\Gamma$ lokálisan bikompakt; ez viszont a **S7** segédtételből és abból következik, hogy minden finit kompakt metrikus tér lokálisan bikompakt.

Egyszerűen igazolható, hogy egy H-tér minden pontja reguláris és így fenti tételünkből adódik a következő:

**T3** *Ha R egy* H-*tér és $\Gamma$ az R izometriáinak egy teljes csoportja, akkor $\Gamma$ LIE-csoport.*

Az $R$ metrikus teret *homogénnek* nevezzük, ha bármely két $x$ és $y$ pontjához található az $R$ olyan $\varphi$ izometriája, hogy $\varphi(x) = y$ teljesül. Ha $\Gamma$ az $R$ önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezéseinek egy csoportja és az $R$ bármely két $x$ és $y$ eleméhez található a $\Gamma$ olyan $\varphi$ eleme, hogy $\varphi(x) = y$ érvényes, akkor azt

[13] GLEASON [2]; YAMABE [8].

mondják, hogy a $\Gamma$ csoport *tranzitív* az $R$ téren. Nyilvánvaló, hogy egy metrikus tér akkor és csak akkor homogén, ha létezik az izometriáinak egy rajta tranzitív csoportja.

Felhasználjuk a követező ismert tételt:[14]

*Ha az $R$ lokálisan bikompakt topológikus tér megszámlálható bázisú és $\Gamma$ LIE-csoport az $R$ topológikus transzformáció csopotja tranzitív az $R$ téren, akkor $R$ topológiai sokaság.*

E tétel alapján bizonyítható a következő:

**T4** *Ha az $R$ finit kompakt metrikus tér homogén és konvex, nincs elágazási pontja, de van reguláris pontja, akkor $R$ topológiai sokaság.*

Tekintve, hogy minden finit kompakt metrikus tér megszámlálható bázisú és mint említettük, lokálisan bikompakt, az $R$ is az. Ha az $R$ összes izometriáinak csoportját tekintjük, az teljes és így **T2** miatt LIE-csoport, amely az $R$ téren tranzitív topologikus transzformáció csoport.

Az alábbi tétel egyszerű következménye az előzőnek:

**T5** *Minden homogén H-tér topológiai sokaság.*

## IRODALOM

[1] H. BUSEMANN, *The geometry of geodesics* (New York 1955).
[2] A. GLEASON, Groups without small subgroups. *Ann. of Math.*, **56** (1952), 193—212.
[3] K. MENGER, Untersuchungen über allgemeine Metrik. I, II, III. *Math. Annalen*, **100** (1928), 75—163.
[4] D. MONGOMERY—L. ZIPPIN, *Topological transformation groups* (New York 1955).
[5] L. S. PONTRJAGIN, *Topologische Gruppen* I, II (Leipzig 1957—1958).
[6] W. RINOW, *Die innere Geometrie der metrischen Räume* (Berlin—Göttingen—Heidelberg 1961).
[7] J. H. C. WHITEHEAD, Convex regions in the geometry of paths. *Quart. J. Math. Oxford* 3 (1932), 33—42. Addendum: ibid. 226—227.
[8] H. YAMABE, Generalization of a theorem of Gleason, *Ann. of Math.* **58** (1953), 351—365.

(Beérkezett: 1962. XI. 25.)

[14] PONTRJAGIN. [5], II. 95—97

# AZ EUKLIDÉS ELŐTTI MATEMATIKA FELFEDEZÉSE

Írta: VEKERDI LÁSZLÓ

A tudománytörténetírás legnehezebb kérdései közé tartozik a matematika eredetének a problémája. Amíg a görög matematika élő valóság volt, BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ nagy felfedezéséig, ez a kérdés nem okozott túl sok gondot. A görög matematika EUKLIDÉSszel és a PLATÓN körében kialakult magasabb geometriai módszerekkel kezdődött. EUKLIDÉS rakta le a görög geometria szigorú logikai-axiomatikus alapjait, a PLATÓN körében kialakult magasabb geometria pedig a kúpszeletek és a geometriai hely elméletére vezetett. EUKLIDÉS ezenkívül összeköttetést jelentett a platoni iskola és a hellenisztikus kor matematikája között, amennyiben a reductio ad absurdum módszerének a bevezetésével lehetővé tette az irracionalitás formájában felmerült infinitézimális kérdések indirekt úton való megoldását. Az infinitézimális geometria területén ugyanis a görög geometria „nem volt még elég előrehaladott ahhoz, hogy direkt bizonyításokat szolgáltasson".[1] Így látta a matematika kezdeteit a múlt század közepén MICHAEL CHASLES, a kor egyik legnagyobb geométere. Rövid öt oldalon tekinti át a görög matematika kezdeteit, s azután rögtön áttér az EUKLIDÉS utáni, hellenisztikus matematikára, amit részletesen ismertet, harminchét oldalon keresztül.

A görög matematika történetének egy kitűnő, modern összefoglalása,[2] amit a XX. század egyik legnagyobb matematikusa és matematikatörténésze, B. L. van der WAERDEN írt, nyolc fejezet közül mindössze kettőben foglalkozik a hellenisztikus matematikával, alig ötven oldalon. A könyv nagy része, az első hat fejezet, a korai babiloni és görög matematikáról szól.

Amikor CHASLES írt, akkor a hellenisztikus kor, beleértve a késő hellenisztikus, római és kora bizánci fejlődést is, jelentette a tudományt.[3] A korai idők, THALÉS, PYTHAGORAS, legenda és mitosz homályába burkolt, talán csak a megbízhatatlan korai tradíció által kitalált alakok voltak.

B. L. VAN DER WAERDEN korára a helyzet megfordult: a hellenisztikus kor vált legendák, vallások és mítoszok szülőjévé, amelyik csak fenntartotta, vagy részle-

[1] CHASLES, M.: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.* Paris [2]1875 ([1]1837). 4–9.

[2] WAERDEN, B. L. van der: *Science awakening.* Groningen 1954. (*Ontwakende wetenschap. Egyptische, babylonischen en griekse wiskunde.* Groningen 1950.)

[3] L. pl. J. G. DROYSEN: *Geschichte Alexanders des Grossen.* Berlin 1833. — Durch Aristoteles war jener grossartige Empirismus ins Leben gerufen, dessen die Wissenschaft bedurfte, um des ungeheuren Vorrates von neuem Stoff, den Alexanders Züge jedem Zweige des menschlichen Erkennens eroberten, Herr zu werden. ... Die eigentümliche Entwickelung des griechischen Geistes hatte bisher die Philosophie als den Inbegriff alles Wissens dargestellt; jetzt emanzipierten sich die einzelnen Richtungen des Erkennens. (Kröners Taschenausgabe, Leipzig é. n. 482–483.).

tezte, s később hanyatlásba vitte a korai tudományos fejlődés eredményeit.[4] A hellenisztikus kor a XX. században a vallástörténet területe lett, a korai idők, Babilon és a görög hatodik és ötödik század a tudománytörténetírásé.

Az első tudomány, a matematika születésének a megítélésében a vélemények nagyon eltérőek. A matematika kezdeteit a történészek egy része a görög világba helyezi, mások a babiloni kultúrkör ajándékának tekintik, s a második-harmadik évezred fordulójára viszik vissza.

Az első irány elindítója PAUL TANNERY volt, a másik irány több szálból fonódott össze, s ma OTTO NEUGEBAUER a legjellegzetesebb képviselője.

PAUL TANNERY[5] eredetileg mérnök volt s a francia dohányiparban dolgozott. Mint tudománytörténésznek a korai görög tudomány mellett a XVII. század természettudománya volt a legfontosabb szakterülete. Az ő nevéhez fűződik FERMAT műveinek kiadása, s élete utolsó évtizedei a monumentális DESCARTES-kiadással forrottak össze.

Számos közleményén kívül három fontos könyve jelent meg a görög tudomány kezdeteiről: *Pour l'historie de la science hellène de Thalès a Empédocle*, Paris 1887. — *La géométrie grecque. Essai critique.* I. P. Paris 1887. — *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Paris 1893. Utóbbiban az első nagy áttekintést adja a görög tudomány egészéről. A Bevezetésben a görög tudomány történetét négy periódusra osztja: hellén tudomány (ARISTOTELÉSsel bezárólag), alexandriai tudomány

[4] TARN, W. W.: *Hellenistic civilisation.* London ³1952 (¹1927). — Everything was ready for an outburst of activity, which came as soon as Alexander had in effect quadrupled the rise of the known world. (259.) Pár generáción keresztül páratlan tudományos virágzás következik be. But it contained also one of those queer contradictions of which Hellenism was full; we regard science as essentially European, but Hellenistic astronomy was partly due to Babylonians. (296.) A görögök geometrizálták a babiloni csillagászati empiriát, ez vezetett a geocentrikus rendszer végleges megszilárdulására. The pity of it was that, could heliocentrism have been established, it should have killed astrology and saved the world infinite trouble. (298). Ezzel szemben Vö. GEORG SARTON: *A history of science. Hellenistic science and culture in the last three centuries B. C.* Cambridge (Mass.) 1959. 317: It is not true, as Tarn claims, that Hipparchos' rejection of heliocentrism assured the success of astrology, but his acceptance of the astral religion implied astrological possibilities. Ezenkívül SARTON szerint az asztrológia előretörését a Stoa epikureizmus feletti győzelme döntötte el. Viszont S. SAMBURSKY: *Physics of the stoics.* London 1959. éppen a stoikusokban látja a modern fizika megalapozóit. Utóbbi interpretáció azonban erős ellenzésre talált. Vö. CH. C. GILLISPIE, *Isis* 49 (1958) 356—358 és M. E. SEESOR, *Isis* 51 1960, 233. — M. CLAGETT, aki a középkori tudomány specialistája, még a késő görög tudományban sem hanyatlást, hanem kiegyenlítődést lát: This leveling off was undoubtedly tied up with complicated social and political changes brought about in the Mediterranean area by the rise and spread of Roman power. But it would have taken a fine eye in the first two or even three centuries of the Christian ere to detect any decline in Greek science or the Greek rational spirit by an examination alone of the works of the best scientists. (M. CLAGETT: *Greek science in antiquity.* New York 1955. 115. (CLAGETT szerint a görög csillagászat csúcsát PTOLEMAIOS jelenti, és még asztrológiai főműve, a Tetrabiblos is „kritikai szellemet sugároz". (Uo. 116.)

Nyilvánvaló, hogy a tudománytörténetírás még az előfeltételéig sem jutott el annak, hogy megírható legyen a hellenisztikus kor tudománytörténete. KARL REINHARDT két könyve: *Poseidonios.* München 1921 és *Kosmos und Sympathie.* München 1926 mutatja, mi minden vár még ezen a területen tisztázásra. Először is el kell jutni a források, a kifejezések és a szavak megértéséig, vagy helyesebben, hogy a reinhardti metodikához hűbben fejezzük ki magunkat, a megértésük kapujáig. Azután újra és újra meg kell kísérelni eljutni más irányokból ugyanezekig a kapukig, anélkül, hogy korai szintézis csábítását követve, átlépnénk rajtuk.

[5] TANNERY életéről és működéséről lásd *Osiris* 4 (1938) Part 2 633—689 és *Revue d'Histoire des Sciences* 7 (1954) No. 4.

(EUDÉMOStól kb. i. sz. kezdetéig), görög—római tudomány (i. sz. kezdetétől kb. CONSTANTINUSig és a kommentátorok kora (i. sz. VI. század végéig). Mindegyik periódus kb. 300—300 évig tart. Igazán teremtő csak az első: ekkor rakják le a görög tudomány (és nem filozófia!) alapjait. A második periódusban már csak a matematika fejlődik. „Epikureusok és stoikusok foglalkoznak ugyan fizikával, mégpedig sokat; de az előbbiek nézőpontja — egy általános a priori hipotézissel összeférő különböző magyarázatokkal szembeni teljes közömbösség — minden természettudományos haladásnak a tagadását jelenti, az utóbbiaknak pedig még az alaptanításaik is ellentétesek a természettudománnyal."[6] A harmadik, a görög—római periódus elején TANNERY szerint a stoa uralkodik, de az i. sz. III. században visszafordulnak a régi mesterek, PLATÓN, ARISTOTELÉS, PYTHAGORAS felé. Ez az eklektikus, misztikus, szinkretizmusra törekvő irány azonban nem vezet új szintézishez, és a CONSTANTINUSszal kezdődő új korszak a lélek nélküli utánzás, a kompiláció, a kommentátorok kora lesz.[7]

A négy periódusból az első, s a másodikból száz év: ez az antik világ 1200 évéből a teremtő, a legérdekesebb korszak; ez TANNERY nagy áttekintésének a végső következtetése. Közel 70 év múlva TOBIAS DANTZIG kimutatást készít a 27 legjelentősebb görög matematikus születési helyéről és a fenti négy periódus szerinti megoszlásáról: I. e. 600 és 300 közé esik 13 matematikus 9 városból, 300 és 0 közé 10 matematikus 5 városból, i. sz. 0 és 300 közé 4 matematikus egyetlen városból, Alexandriából.[8]

Ma már természetesnek tűnik, hogy a görög tudomány legérdekesebb periódusa az első, a hellén-korszak. TANNERY előtt azonban ezt a kort egyáltalán nem tartották a természettudomány és a matematika szempontjából lényegesnek: ARISTOTELÉS szemüvegén át filozófusoknak, metafizikusoknak, titokzatos és mély értelmű bölcseknek tekintették a THALÉStől EMPEDOKLESig terjedő gondolkozók sorát. S TANNERY könyve után egyszerre „nem elérhetetlen metafizikusok többé, hanem tapasztalatlan tudósok, nagyon egyszerűek és éppen ezért annál merészebbek, ... fogalmaikban és formuláikban felhagynak minden misztikus jelleggel és gyakran ismerjük fel tanításaikban mai tudományunk egynémely jellegzetes tendenciáját" — írja TANNERY egyik tanítványa, GASTON MILHAUD.[9]

TANNERY ismeri fel például az eleai ZÉNÓN jelentőségét a matematika fejlődése szempontjából. ZÉNÓN maga nem volt matematikus, „de egyike azoknak, akik legtöbbet tették a matematika elvei érdekében, szigorúan körülírva a pont és a pillanat alapvető fogalmait" és frappáns módon alkalmazva a görög gondolkozásra egyébként is oly jellemző reductio ad absurdum módszerét.[10] ZÉNON nem ANAXAGORAS vagy LEUKIPPOS ellen támad híres paradoxonaival, mint általában hiszik, hanem a pythagoreusok ellen. „PARMENIDÉS olyan környezetben írta művét, ahol mint gondolkozók, egyedül a pythagoreusok állottak köztiszteletben." ZÉNÓN pedig nem a mozgás lehetetlenségét igyekszik kimutatni, hanem azt bizonyítja be, hogy a kontinuum nem képzelhető el indivizibilis elemek összegeként, „mert, ha ezeknek az elemeknek nincs semmi nagysága (grandeur), akkor összegük sem lehet,

[6] TANNERY, P.: *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne.* Paris 1893. 3.
[7] Uo. 6—7.
[8] DANTZIG, T.: *The bequest of the greeks.* London 1955. 14.
[9] MILHAUD, G.: Revue des Idées 1906 No. 25 28—39.
[10] TANNERY, P.: *Pour l'histoire de la science Hellène. De Thales a Empédocle.* Paris 1887. 249.

másrészt, ha van nagyságuk, akkor, mivel számuk végtelen, összegük is végtelen lenne".[11]

Egy évtizeddel TANNERY könyve előtt HERRMANN HANKEL[12] még úgy tartotta, hogy ZÉNÓN nem tudott megbirkózni a végtelen és a mozgás kérdésével s a görög matematikai tudományok végleg száműzik a végtelen, a változás és a mozgás fogalmait. A görögök infinitézimál-fóbiájáról szóló legendát TANNERY műve sem tudja eloszlatni, még HEIBERGNÉL[13] is tartja magát, aki pedig TANNERY műveinek egyik kiadója, s kitűnő filológus volt. Az infinitézimális számítás fejlődéstörténetének monográfusa, OTTO TOEPLITZ, jól tudja, hogy a görögöknél szó sincs a végtelentől való irtózástól, s ő is ZÉNÓN paradoxonait tekinti a végtelen fogalmával dolgozó matematika kezdetének. ZÉNÓN „csak olyan végtelen processzus ellen tiltakozik, amivel kontinuum átfutásakor találkozunk".[14] Ugyanez volt lényegében TANNERY véleménye is.

Az ugyancsak 1887-ben megjelent *La géométrie grecque* mintaszerű és a tudománytörténetírásban úttörő analízissel kezdődik. Megvizsgálja a hozzáférhető szövegek tükrében a proklosi adatokat, s annak a segítségével, amit megbízhatónak talált belőlük, analizálja az euklidési „Elemek"-et. S ezzel elkezdődött a tudománytörténet egyik legérdekesebb és legfontosabb kalandja, az „Elemek" egyes könyveinek és tételeinek részletes vizsgálata abból a szempontból, hogy a korai görög matematika fejlődésének melyik fázisába tehetők. A nehézséget az jelenti, hogy a korai görög matematika egyes fázisait jóformán alig ismerjük máshonnan, mint éppen az „Elemek"-ből. Ezenkívül egy pár korai töredék — ARCHYTAS kockamegkettőzése, és HIPPOKRATÉS holdacskák területére vonatkozó vizsgálatai — és ARISTOTELÉS sok, de matematika iránt nem nagy megértést mutató locusa, s a késői kommentátorok nagyon is kérdéses megbízhatóságú adatai állnak rendelkezésre. Érthető, ha az EUKLIDÉS előtti görög matematika rekonstrukciója távolról sem tekinthető megoldott kérdésnek. Ezen a területen való munka a matematikai hozzáértésen, a fokozott filológiai és forráskritikai gondosságon kívül sok leleményességet is igényel. És állandóan fennáll egy sajátos circulus vitiosus veszélye: az „Elemek"-ből rekonstruált korai görög matematika szolgál keretül az „Elemek" egyes tételeinek a kronológiájához.

TANNERY még csak nagyjából osztja fel az „Elemek"-et a korai görög matematika egyes korszakai között. Az „Elemek"-et addig a görög elemi geometria tankönyvének tekintették, TANNERY egy hosszú történelmi fejlődés filológiai jellegű összefoglalását ismeri fel benne, amelynek a kezdetei legalábbis az i. e. V. század közepéig nyúlnak vissza. TANNERY szerint már ekkor lennie kellett a görög geometriában kézikönyvszerű összefoglalásoknak. Ezen túl a HIPPOKRÁTÉSTŐL fennmaradt töredék azt mutatja, hogy már a görög felsőbb mennyiségtan, a körzővonalzóval meg nem oldható feladatok geometriájának az alapjai is készen vannak.[15]

[11] Uo. 255.

[12] HANKEL, H.: *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter.* Leipzig 1874.

[13] HEIBERG, I. L.: *Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum. München* 1925. 4.

[14] TOEPLITZ, O.: *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode.* Erster Band. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1949. 2.

[15] TANNERY, P.: *„Geometria."* (1895) = *Mémoires Scientifiques II.* Paris 1912. 472—486. — TANNERY megállapításai, mint általában, itt is inkább a geniális megsejtés, mint a bizonyított interpretáció szintjén mozognak, amit ő maga is kiemel: „En résumé, lés origines véritables de la

A hagyomány magának HIPPOKRATÉSnek is tulajdonított egy „Elemek"-et. De semmit sem mond arról, mit tartalmazhatott. TANNERY jóformán semmiből rekonstruálja ezt a korai „Elemek"-et. Szerinte legalábbis kérdésfelvetésben mindent tartalmazott, amit EUKLIDÉS „Elemei" az aritmetikai könyvek, a VII., VIII. és IX. kivételével magukban foglalnak. Ezek a hippokratési „Elemek" pedig valószínűleg magáig PYTHAGORASig vagy PYTHAGORAS közvetlen tanítványaiig visszanyúló pythagoreus geometriára támaszkodnak.[16]

Volt-e ennek megfelelő pythagoreus aritmetika is? TANNERY szerint ugyanis az euklidési „Elemek" aritmetikai könyvei nem pythagoreus eredetűek, a pythagoreus aritmetika ennél primitívebb kellett hogy legyen, és mást is kellett tartalmazzon — legalábbis ha az i. sz. I.—II. századból származó neopythagoreus forrásoknak némi hitelt adunk. Megint az a kérdés, mit lehet elhinni ezekből a késői forrásokból? TANNERY felhívja rá a figyelmet, hogy már ARISTOTELÉS kifejezetten a pythagoreusoknak tulajdonít egy, a négyzet átlójának és oldalának az incommensurabilitására vonatkozó bizonyítást, ami azon alapszik, hogy a commensurabilitás egyszerre követelné meg ugyanazon szám páros és páratlan voltát. Ez a bizonyítás, ami EUKLIDÉSben is megtalálható, olyan számfogalmon alapszik, ami az euklidésinél sokkal primitívebb. Ez a számfogalom lehetett a pythagoreus aritmetika alapja.[17] Mindez azonban csak sejtés, és a nyitott kérdések özönét hagyja maga után. „Voilà, les questions qui restent toujours ouvertes, car, si j'ai cherché à les discuter, je n'ai nullement prétendu leur donner une solution définitive."[18] Mindenesetre annyi gyanítható, fejezi be TANNERY, hogy „egy, elsősorban minden szám általános tulajdonságát, s azután a tíz első szám speciális tulajdonságait tárgyaló aritmetika terve nem képzelhető el ARCHYTAS előtt, de feltétlenül megvan az őt közvetlenül követő generációban".[19]

Foglaljuk össze még egyszer a TANNERY-interpretáció centrális gondolatát: Az „Elemek" minden lényeges eredménye és a tárgyalási mód is már messze EUKLIDÉS, sőt PLATÓN előtt készen áll, a geometriai könyvek a pythagoreus matematika gyors fejlődéséből emelkedtek ki az V. század során, az aritmetikai könyvek ARCHYTAS vagy az őt közvetlenül követő generáció művei. PLATÓNnak már semmi egyéb szerepe sem marad a görög matematika fejlődésében, minthogy felhívja a figyelmet a térgeometriai problémák fontosságára.

Ezt az interpretációs vázat töltötték ki a XX. század során részletekkel. Ahol TANNERY általánosságban korokat és generációkat jelölt meg, ott meg kellett keresni az „Elemek" egyes könyveihez tartozó neveket, illetve iskolákat. Az alábbiakban, mintegy példaként az ilyen típusú rekonstrukciók szerkezetére, analizáljuk a matematikus THEAITÉTOS „feltámasztásának" a történetét.

Abban az időben, amikor THEAITÉTOS, a matematikus modern hírneve megalapozódott, a klasszika-filológiában U. von WILAMOWITZ-MOELLENDORFF inter-

---

géométrie théorique chez les grecs restent passablement obscures; on peut simpliment en dire que le gout pour l'étude des propriétés des figures parait un trait caractéristique de la race grecque..." (475.)

[16] A *La géométrie grecque.* Paris 1887. számomra nem volt hozzáférhető. TANNERY véleményét itt másodkézből idézem: P.-H. MICHEL: *De Pythagore a Euclide.* Paris 1950. 168—209. Ez a könyv a kérdésre vonatkozó szakirodalmat is bőven tárgyalja a harmincas évek végéig.

[17] TANNERY, P.: *Pour l'histoire de la science Hellene.* Paris 1887. 369—391. *Appendice II. Sur l'arithmétique pythagorienne.*

[18] Uo. 391.

[19] Uo. 379—380.

pretációs iránya uralkodott. Ő volt a XX. század első felének legnagyobb nevű klasszika-filológusa. NIETZSCHE intuitiv-impresszionista „Zukunftsphilologie”-je elleni éles támadással kezdte gyorsan felfelé ívelő pályáját. A század elején már Berlinben professzor, tekintélye és népszerűsége óriási. De a GEORGE-kör nagy megvetéssel nézte működését, s *Platón*-biográfiáját „ein Platon für Dienstmädchen”-nek minősítette GUNDOLF. WILAMOWITZ-MOELLENDORFF MOMSEN pozitivista, ténytisztelő módszerein nőtt fel. Az interpretációnak a tények gondosan halmozott tömegére kellett felépülni. Semmiféle kitalálásnak, álmodozásnak nem volt benne helye. Az így megalapozott interpretáció a természettudományhoz fogható komoly tudomány igényével lép fel, hatalom lesz. Egy WILAMOWITZ-MOELLENDORFF-tanítvány, EVA SACHS doktori disszertációja körvonalazta a matematikus THEAITÉTOS alakját PLATÓN hasonló című dialógusa alapján 1914-ben.[20]

H. G. ZEUTHEN, aki matematikus volt, a modern matematikai fogalomképzés felől közeledett PLATÓN dialógusához, s THEAITÉTOS mesterében, THEODOROSban ismeri fel annak az új, nagy fontosságú matematikai elvnek a felfedezőjét, aminek az alapján THEAITÉTOS az „Elemek” VII., VIII. és X. könyveit megírta. THEODOROS a 3-tól 17-ig terjedő nem-négyzet számok négyzetgyökeinek az irracionalitását ZEUTHEN szerint egy olyan új kritérium alapján bizonyítja, ami a végtelen törteken alapul, „servant à déterminer le plus grande commune mesure de deux nombres donnés: si cette opération, appliquée à des quantités générales représentées par des segments de droite, s’arrête d’elle-même, les quantités seront commensurables, si elle se continue à l’infini, incommensurables.”[21]

ABEL REY THEODOROST, s rajta keresztül THEAITÉTOSt a pythagoreus matematika képviselőinek tartja.[22] O. BECKER egy-egy külön fejlődési fokot fűz a THEODOROS és THEAITÉTOS nevéhez,[23] s végül B. L. VAN DER WAERDEN a platóni dialógus és az „Elemek” X. könyve alapján rekonstruálta THEAITÉTOS elveszett könyvét.[24]

Láttuk, hogy ZEUTHEN a VII., VIII. és X. könyvet mind THEAITÉTOS munkájának tartotta s ezáltal THEAITÉTOS műve elsősorban aritmetikai jelleget öltött. VAN der WAERDEN a VII. könyvben az ARCHYTAS előtti pythagoreus aritmetikai kézikönyv primitív formáját látja és a VIII.-ban ennek folytatását. De szemben a VII. könyv logikai egységével, a VIII. könyvet logikai tekintetben gyengének tartja. A VIII. könyvben egy általános elvekig felemelkedni nem tudó arányelméletet lát, ami teljes ellentétben áll a X. könyv logikai zártságával. A X. könyvet PLATÓN tanítványának, THEAITÉTOSnak tulajdonítja. A VIII. könyv szerinte a PLATÓNt egy generációval megelőző ARCHYTAS műve. A VIII. könyv logikai gyengéi nem a kor matematikájának közös hibái: a VII. könyv ugyanis magas logikai készültséget árul el, s ARISTOTELÉS is ezen kor matematikai kézikönyveiből vonta le logikai szabályait. Ez a logikai lazaság ARCHYTAS sajátja, ő VAN DER WAERDEN szerint „is constantly at odds with logic, trying unsuccessfully to meet its strict demands”.[25]

[20] SACHS, EVA: *De Theaeteto atheniensi mathematico.* Berlin 1914.

[21] ZEUTHEN, H. G.: *„Sur l’origine historique de la connaissance des quantités irrationnelles”.* Oversigt over det kgl. danske Videnskabernes Selskabs forhandlingen. Copenhague 1915. 333–362. Idézi P. -H. MICHEL: *De Pythagore a Euclide.* Paris 1950. 468.

[22] REY, A.: *L’apogée de la science technique grecque.* Paris 1946. 189–190.

[23] 23. BECKER, O.: *„Die Lehre von Geraden und Ungeraden im neunten Buch der euklidischen Elemente.”* Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. B3 (1936), 533–553.

[24] WAERDEN, B. L. van der: i. m. V. és VI. fejezet.

[25] Uo. 155.

A VII. könyv is arányelmélet, WAERDEN ezt tartja annak a pythagoreus kézikönyvnek, aminek a létezését már TANNERY sejtette. WAERDEN szerint feltehető, hogy ennek az elméletnek a kidolgozására a törtekkel való számolás vezetett. Törtek a hivatalos görög matematikában ARCHIMÉDÉS előtt nem fordulnak elő, de a gyakorlatban természetesen használni kellett őket. Annak az oka, hogy a törteket az elméletből kiküszöbölték, az egység elméleti oszthatatlansága volt. A törtek fogalmának matematikai aequivalense a számok aránya lett. „Törtek legkisebb kifejezésekre való redukciója helyébe számok arányának legkisebb kifejezésekre való egyszerűsítése lép, ezt kutatja elméletileg a VII. könyv."[26] Ennek a pythagoreus arányelméletnek a geometriai segédeszközeit jelentik a II. könyv bizonyos tételei, s ebbe a keretbe illik ARCHYTAS híres kockamegkettőzése: két adott számhoz két középarányos szerkesztése. És hogy az egész gondolatkör mennyire a pythagoreus világkép szerves része, azt szépen demonstrálja WAERDEN az *Archytas*-féle szerkesztés zeneelméleti megfelelőjére való utalással.

Ezt az egész jól kiépített *pythagoreus* gondolatkört egyetlen veszély fenyegette: az, hogy „vonalszakaszokat nem mindig lehet számokkal kifejezni, vagy pontosabban fogalmazva, vonalszakaszok arányai nem mindig fejezhetők ki egész számok arányaiként. Más szóval: léteznek incommensurabilis vonalszakaszok."[27]) Ez a tény, s nem pedig mint TANNERY hitte, a $\sqrt{2}$ irracionális voltának a felfedezése vezetett WAERDEN szerint a görög matematika fokozódó geometrizálódására. A pythagoreusok nagyon jól ismerték az irracionális arányokat, más oka volt, hogy a $\sqrt{2}$-t nem tekintették számnak: a szám definíciójához való ragaszkodásuk. „ARITHMOS számot jelent, ezért egész számot, logikai szigoruk még azt sem engedte meg, hogy törteket vezessenek be; egész számok arányaival helyettesítették őket."[28] Így válik centrális kérdéssé a görög matematikában számok és vonalszakaszok egymáshoz való kapcsolata. Erről szól PLATÓN THEAITÉTOSának sokat idézett része, erről szól az „Elemek" X. könyve, ami WAERDEN szerint nem egyéb, mint THEAITÉTOS EUKLIDÉS által kissé elrontott, elveszett könyve.

Fontossága miatt hosszan kell idéznünk WAERDENnek a X. könyvről adott analízisét: „Mérhetőnek (measurable) nevezünk a továbbiakban egy vonalszakaszt (vagy egy területet), ha commensurabilis egy rögzített $e$ vonalszakasszal (vagy egy $e^2$ négyzettel). EUKLIDÉSben a mérhető területeket kimondhatónak (expressible) (ῥητός) nevezik. Másrészt azokat a vonalakat nevezik kimondható (expressible) vonalaknak, amelyek mérhető négyzetekre vezetnek, tehát nemcsak mérhető vonalakat, hanem olyan nem mérhető vonalakat is, mint a 3, 5, ... területű négyzetek oldalai, amiket THEODOROS vizsgált. Ez a terminológia egyik első következménye azon osztályozási elvnek, amely a vonalszakaszokat az általuk előállított négyzetek szerint osztályozza. Minden egyéb vonalszakaszt irracionálisnak (ἄλογος) neveznek."[29] Ugyanez a beosztás jelentkezik PLATÓN dialógusában is, ahol THEAITÉTOS bizonyos vonalszakaszok incommensurabilitására a feléjük emelt négyzetekből következtet. S mivel bizonyos, a X. könyvben definiált irracionális vonalak esetében ez a vizsgálat téglalapok négyzetté alakítását követeli meg, a X. könyv felhasználja a II. idevonatkozó erdményeit.

[26] Uo. 115.
[27] Uo. 158.
[28] Uo. 125.
[29] Uo. 167.

Az egész X. könyv egységes szellemű. WAERDEN szerint még az is bizonyít, ami a könyvből hiányzik: ti. egy logikailag odaillő arányelmélet, ami összeköttetést jelentene a X. 2. és 3-ban bevezetett antanairesis-en alapuló commensurabilitás-kritérium és a később tárgyalt irracionális vonalszakasz típusok között. EUKLIDÉS itt az V. könyvön alapuló arányelméletet alkalmaz, amit THEAITÉTOS nem használhatott, mert az V. könyv EUDOXOS műve. Ugyancsak nem használhatta a régebbi, VII. könyv által reprezentált arányelméletet sem, mert az incommensurabilis vonalszakaszokra nem érvényes.

WAERDEN szerint ARISTOTELÉS egy helye (Topica 158 b) vet fényt rá, mit hagyott itt ki EUKLIDÉS. ARISTOTELÉS általánosságban beszélve a definícióról, megemlíti, hogy „két terület és két vonal akkor arányosak, ha a területek és a vonalak azonos antanairesissel (ἀνταναίρεσις) rendelkeznek"[30]. Mint egy ilyen arányelmélethez szükséges előzmény érthető meg a X. 1. „Most már minden világos — írja WAERDEN — THEAITÉTOS nyilvánvalóan egy antanairesis-definíción alapuló arányelmélettel kezdette volt a könyvét. Szokása szerint járva el, később felhasználandó lemmákkal indult; ezek közé tartozik a X. 1. A X. 2—3. tételekben bevezeti a végtelen és véges antanairesis elméletét, s egyben kritériumot nyer két vonalszakasz vagy két terület commensurabilitására. Valószínű, hogy a következő lépés arra az antanairesis-definícióra alapított arányelmélet volt, amelyikre ARISTOTELÉS célzott. EUKLIDÉS ezt a részt kihagyta, mert ő már adott egy másik arányelméletet az V. könyvben... A továbbiakban THEAITÉTOS racionális mennyiségekre és arányaikra vonatkozó elméletét fejtette ki arányelmélete alapján (X. 4,5. és 9—13.). Ebben a részben EUKLIDÉS a bizonyításokat másokkal cserélte fel, amiket ARCHYTAS és iskolájának az eredményeiből kölcsönzött. A következő főrészét a X. könyvnek, ami a 13-féle irracionális vonallal foglalkozik, gyakorlatilag változatlanul hagyta EUKLIDÉS."[31]

Ezek a hosszú idézetek nagyon jellemzőek nemcsak EUKLIDÉS, hanem — s a mi szempontunkból ez a fontosabb — VAN DER WAERDEN munkamódszerére is. Már két algebrista generáció nőtt fel a *Moderne Algebra*[32] kristálytiszta vonalvezetésű fejezetein: a számfogalom rövid, halmazelméleti bevezetése — közelítése a csoportelméleten át ahhoz, amit az algebra ért a szám fogalmán —, azután a gyűrűk és testek további beszűkítésén átvitt számoknak mint a „feléjük emelhető" magasabb képződményeknek, polinomoknak részletes vizsgálata — mindezt THEAITÉTOS sem építhette volna fel logikusabban, s PLATÓN bizonyosan nagyon meg lett volna elégedve vele.

WAERDEN THEAITÉTOSa a csúcsát jelenti annak a gazdag lehetőségeket nyújtó interpretációs iránynak, ami TANNERYből indult ki.

Ennek az interpretációs iránynak a nagy eredményei közé kell sorolnunk a babiloni matematika felfedezését is, jóllehet erdményei ellentmondásban látszanak lenni a matematika kezdeteiről TANNERY által kialakított képpel. WAERDEN kitűnően ismeri a babiloni matematikát s neki sikerült egységes képpé ötvöznie a matematika kora görög eredetének elméletét a babiloni kezdet teóriájával. Szerinte a görögök a babilóniaktól veszik döntő matematikai inspirációikat, mégis már nagyon korán, az ötödik század folyamán, ahogy TANNERY tartotta volt, kialakítják a babilonitól annyira eltérő szellemű és formájú matematikájukat.

[30] Uo. 177.
[31] 31. Uo. 179.
[32] WAERDEN, B. L. van der: *Moderne Algebra I.* Berlin [1]1936 [3]1950.

Ma már közismert a mezopotámiai kultúra felfedezéséért folytatott másfél évszázados küzdelem. Kevésbé ismeretes az a harc, amit FRANZ XAVER KUGLER SJ., a babiloni asztronómia egyik legnagyobb ismerője folytatott a század elején a pánbabilonisták ellen. Utóbbi irány képviselői a *Gilgames*-legendakör és néhány szakmai ékírásos tábla megfejtése alapján nemcsak a Bibliát, hanem az egész modern tudományos fejlődés alapjait, csillagászatot, matematikát, orvostudományt Babilonból kísérelték meg levezetni. KUGLER legfőbb bűne a pánbabilonisták szemében az volt, hogy a mitológiát és a tudományt szigorúan szétválasztotta: nem vezet olyan könnyű út a csillag-mitoszoktól a csillagászathoz — hangoztatta —, mint ahogy azt a pánbabilonisták hiszik. Nem lehet HIPPARCHOS felfedezésének alapjait Babilonban megtalálni. A babiloni csillagászat nem évezredes, hanem az i. e. utolsó hét évszázadban fejlődött ki. A babiloni tudomány megértését csak komoly asszirológiai, matematikai és csillagászati tudás birtokában lehet remélni, tanította KUGLER.[33] KUGLER atya örökségét: a British Museum agyagtábláiról készített másolatait és az asszirológiai s matematikai tudás egyesítését OTTO NEUGEBAUER vette át.

OTTO NEUGEBAUER Göttingában tanult matematikát, ő adta ki FÉLIX KLEIN híres felolvasásait a XIX. század matematikájáról.[34] NEUGEBAUER ugyanazt tette a babiloni tudományért, mint TANNERY a korai görög tudományért: kimutatta egy addig elsősorban misztikusnak és filozofikusnak tartott fejlődésről, hogy szigorú, egzakt s meglepően modern fogalmakkal dolgozó tudomány rejlik mögötte.

Azt már régen tudták, hogy Mezopotámiában nagyon korán, még a sumér korszakban, az ékírás felfedezésével körülbelül egy időben bevezettek egy hatvanas számrendszert, aminek a segítségével az alapműveletek elvégezhetőek voltak. A számrendszer azonban nem volt következetes, mert egyrészt kereszteződött a tízes számrendszerrel, másrészt kétértelműek a számjegyei, mert a korai időkben hiányzik a számjegyek közül a nulla. S egyébként sem jutnak képletekhez, általános algoritmushoz, mert a táblázataik ugyanazon típusba tartozó egyedi feladatok felsorolásából állanak. Sokszor valószínűleg nem egyebek iskolai gyakorlatoknál.[35] NEUGEBAUER éppen ezekben a hibákban ismeri fel a sumér számrendszer legnagyobb előnyét. Valóban, a nulla nem fordul elő benne, s ez a tény határozatlan helyértékrendszert eredményez — a mi tízes számrendszerünk határozott, abszolút helyértékrendszerével szemben. Ebben a határozatlan hatvanas számrendszerben „elvileg minden számjegyet szorozni lehet 60 egy tetszőleges pozitív vagy negatív hatványával, anélkül, hogy ez a szám írott kifejezésén változtatna".[36] Az egyes számjegyek helyértékét csak a számolás összefüggéséből lehet eldönteni. Ezáltal olyan számrendszer áll elő, amely páratlanul alkalmas a törtekkel való számolásra. Ha $a$ egész szám, akkor annak, hogy $\frac{1}{a}$ véges hatvanados törtként legyen előállítható, szükséges és elegendő feltétele az, hogy $a=2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ alakú legyen. Az ilyen számokat NEUGEBAUER regulárisoknak, a nem ilyeneket irregulárisoknak nevezi. Az $\frac{1}{a}$ tört jelzésére az $\bar{a}$ jelölést vezeti be.

[33] KUGLER, F.-X. S. J.: *Im Bannkreis Babels. Panbabylonistische Konstruktionen und Religionsgeschichtliche Tatsachen.* Münster i. W. 1910.

[34] KLEIN, F.: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert,* Berlin 1926.

[35] MEISSNER, B.: *Babylonien und Assyrien II.* Heidelberg 1924. 386–7.

[36] NEUGEBAUER, O.: *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. I. Vorgriechische Mathematik.* Berlin 1934. 5.

S ebben az interpretációban az addig iskolai gyakorlatoknak tartott számtáblák mint reciprok táblák lepleződnek le, olyan számok listái, amelyeknek szorzata mindig hatvan, azaz az egység. Beleértve természetesen mint mindig egy 60 valamely hatványával történő szorzást: egy $n$ szám ugyanis nem különböztethető meg $n \cdot 60^k$ számtól. Ezeknek a reciprok tábláknak a célja osztás: egy $b$ számot úgy osztanak egy $a$ számmal, hogy szoroznak $\bar{a}$-val. A táblák kifejezetten mutatják, hogy a sumér matematikusok tisztában voltak az irreguláris számok kivétel jellegével: 7 igi nu—7 nem oszt, jegyzi meg pl. egy ilyen tábla.[37]

NEUGEBAUER felismeri a számlisták törvényszerűségét. A számok mind $2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$ alakúak, s ebből a feltételből egy szellemes geometriai reprezentáció segítségével teszi érthetővé a reciprok táblák előállítási módját.[38] A táblák szorzásra és gyökvonásra is alkalmasak, és a sumér matematikusok ilyen számolási segédeszközök birtokában nem haboztak területekből vonalakat kivonni, vagy területeket összeszorozni, „amit a nagyon óvatos EUKLIDÉS sohasem tett volna meg".[39]

„Ez a táblarendszer, ahogy már i. e. 1800-ban létezett, egymagában az egész antikvitás számolói felé helyezte volna a babiloniaikat. I. sz. 350 és 400 között az alexandriai THEON magyarázatok oldalait fűzi PTOLEMAIOS hatvanas számrendszerben végzett számításaihoz Almagest-jéhez írott kommentárjaiban. Egy babiloni templom birtokának adminisztrációs írnoka 2000 évvel THEON előtt joggal csodálkozott volna ily egyszerű technikára vesztegetett annyi sok szón."[40] Ugyanígy számtáblákban fejezik ki a babiloni matematikusok a *Pythagoras*-tételt is, másfél évezreddel PYTHAGORAS előtt. „Mindezek a problémák — írja NEUGEBAUER — valószínűleg sohasem voltak élesen elválasztva olyan módszerektől, amelyeket mi ma algebrainak nevezünk. Az egész csoport középpontjában a kétismeretlenű másodfokú egyenlet megoldása áll."[41]

Tipikus az

$$x\bar{x} = 1 \quad x + \bar{x} = b$$

probléma. Számos esete van, legfontosabb „az a típus — írja NEUGEBAUER —, amit normálalaknak nevezek: két számot kell találni ha $a$, szorzatuk és $b$, összegük vagy különbségük adott. Számtalan példa célja nyilvánvalóan az, hogy megtanítsa a bonyolultabb kvadratikus problémáknak eme normálalakokra való transzformálását

$$x \cdot y = a$$

$$x \pm y = b,$$

amiből a megoldás mint

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp a}$$

$$y = \pm\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp a}$$

[37] Uo. 8.
[38] Uo. 9—11.
[39] WAERDEN, B. L. van der: *Science awakening*. Groningen 1954. 72.
[40] NEUGEBAUER, O.: *The exact sciences in antiquity*. Providence, Rhode Island [2]1957. 34—35.
[41] Uo. 40.

adódik a két eredeti egyenletet két lineáris

$$x \pm y = b$$

$$x \mp y = \sqrt{b^2 \mp 4a}$$

egyenletre transzformálva. Más szóval, a négyzetes egyenletet normálalakjára redukálni annyit jelent, mint lineáris egyenletek legegyszerűbb rendszerére hozni."[42]

A matematikai táblák gondos tanulmányozása megmutatta, „hogy a régen ismert és sajátságosan primitív egyiptomi matematika és a legélesebb logikai analízissel átdolgozott görög matematika mellett létezett a mediterrán kultúrkörben még egy harmadik matematikai ideavilág is: a babiloni matematika algebrai fogalomképzése".[43]

Hová lett ez a korai algebra? Erre is NEUGEBAUER válaszolt leghatározottabban, s őt követte van der WAERDEN: ez a babiloni algebra öltözött át geometriai formába a görög matematikában. A kérdés története hosszú s mint a görög matematika történetírásában majdnem minden, ez is TANNERYre nyúlik vissza.

TANNERY már 1882-ben felismeri,[44] hogy a másodfokú problémáknak a II. könyvben található megoldásai, ahol az ismeretlenek, mint hosszúságok, a szorzataik pedig mint felületek jelentkeznek, s amely problémákat mi $x^2+px+q = 0$ egyenlet alakjában írjuk fel, még a legelső pythagoreusokra kell visszanyúljanak. Ugyanezeknek a problémáknak a VI. könyvben való megismétlése azért vált szükségessé, mert a görög matematika kezdetén felfedezték, hogy nem minden hosszúság-összehasonlítás fejezhető ki egész számok arányával, nem minden hosszúság mérhető össze egymással. Érthető, hogy ez a pythagoreusok számára, akik a dolgok lényegének az egész számokat tekintették — un véritable scandale logique, une redoutable pierre d'achoppement volt.[45] Ha valamit, hát ezt a felfedezést érdekükben állott eltitkolni, s száműzni ahonnan csak lehetett a kétes mennyiségeket. Ez történik a második könyvben, ahol területek összeadásával vagy kivonásával oldva meg a problémákat, elkerülik a vonalak kivonásakor, ill. aránybaállításakor felmerülő nehézségeket.[46] De a görög matematika nem a mi algebránkhoz hasonló módon alkalmazta ezeket a geometriai számolási eszközöket. TANNERY éppen azt hangsúlyozta, hogy milyen különbség van ugyanazon problémáknak a görög és modern megoldása között. A görög „szerkesztések nem egyenletek megoldásai, a görögök úgy látszik, sohasem láttak mást az egyenletekben, mint konkrét vagy ilyennek feltételezett mennyiségek között fennálló valódi relációkat. Épp ezért náluk az ismeretlennek csak egyetlen értéke lehetett", amit nem lehet a mi másodfokú egyenletünk gyökeivel összehasonlítani.[47]

[42] Uo. 40–41.

[43] NEUGEBAUER, O.: *Vorgriechische Mathematik*, 2. — Ebben a tekintetben a *The exact sciences in antiquity* felfogása egészen más. A *Vorgriechische Mathematik* a különbségekre helyezte a súlyt, az *Exact sciences* a tudományos fejlődés változatlan jellegű vonatkozásaira. Nem lehet figyelmen kívül hagyni, anélkül, hogy bármiféle közvetlen hatásra gondolnánk, azt a tényt, hogy a nyugati történetírás a két könyv kiadása között ugyanezt az alakulási tendenciát mutatta: a kultúrkör elmélettől az ideatörténet felé.

[44] TANNERY, P.: *„De la solution géométrique des problemes du second degré avant Euclide."* (1882) = *Mémoires Scientifiques I.* Paris 1912. 254–280.

[45] Uo. 268.

[46] Uo. 257 és 263.

[47] Uo. 280.

H. G. ZEUTHEN látszólag egészen kis módosítást vitt be TANNERY interpretációjába, éppen mert a II. és VI. könyv geometriai számolása és a mai algebra közötti hasonlattevésnek nem tudott ellenállni. Csaknem mindent átvesz TANNERY értelmezéséből. Elfogadja az incommensurabilitás felfedezése következtében beállított „botrány" elméletét s azt a feltevést, hogy a pythagoreusok az így előállított nehézségek elkerülésére geometriai aritmetikájuk továbbfejlesztéseként alakítják ki a második könyvben leírt geometriai számolást. Nem vetik el ezt a számolási módot az incommensurabilitásnak EUDOXOS általi legyőzése után sem — s itt lép túl TANNERY óvatos interpretációján —, mert felismerik, hogy olyan jelrendszert (Zeichensprache) alakítottak ki benne, ami ugyanazokat a feladatokat képes megoldani, mint a mi algebránk, míg az utóbbi nem lép túl másodfokú kifejezések tárgyalásán. Az így kialakított geometriai algebrájuk éppen a mi másodfokú egyenleteink megoldására alkalmas.[48] Zeuthen geometriai algebra hipotézisét „*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*" (Koppenhagen 1886) című művéből lehet legjobban megérteni. A kúpszeletek tárgyalásához a görögöknek is analitikus segédeszközökre volt szükségük, és ZEUTHEN analitikus segédeszközökön magától érthetődően analitikus geometriát ért. Természetesnek veszi, hogy a görögök már alkalmazzák a koordinátarendszert, ha a fogalmat explicite nem is vezetik be. „A koordinátákat azonban mi az algebrával együtt használjuk, s ezt a görögök nem ismerték. Meg kell tehát vizsgálni, mi lép náluk a koordináták használatánál, valamint más vizsgálatoknál is, ahol mi most az algebrát használjuk, az algebra helyébe." ZEUTHEN szerint erre a célra két segédeszközt használtak: az arányelméletet és a geometriai szerkesztésekkel való számolás módszerét, amint az az „Elemek" II. könyvében jelentkezik. Az arányelmélet azonban az incommensurabilitás felfedezése után nehéz helyzetbe jutott, s míg EUDOXOS ki nem bővíti a számfogalmat az irracionális számok definíciójával, addig az arányelmélet nem volt általános mennyiségekre (valós számokra) alkalmazható. Ezért egy másféle, „bizonyos határok között teljesen általános mennyiségekre is alkalmazható" jelbeszédet alakítottak ki, a geometriai szerkesztésekkel történő számolás módszerét. Ezt a módszert az incommensurabilitás felfedezése nem zavarta. Az így kialakult módszert joggal lehetett ZEUTHEN szerint geometriai algebrának nevezni, mert ez, mint az algebra, alkalmas általános mennyiségekkel való munkára és a közönséges beszédtől különböző eszközöket használ eljárásai szemléletessé tételére. Ez a geometriai algebra EUKLIDÉS korára olyan fejlettséget ért el, hogy ugyanazon feladatok megoldására volt képes, mint a mi algebránk, amíg ezek a feladatok nem mennek túl másodfokú kifejezéseken.[49]

Összefoglalva, ha a görög kúpszelet-elméletet analitikus geometriának tekintjük, akkor az „Elemek" II. és VI. könyvében megadott szerkesztések felfoghatók egy ehhez szükséges geometriai algebraként. S ha a premissza nem áll? Ha a görög kúpszelet-elmélet nem tekinthető analitikus geometriának? Akkor annak sincs semmi értelme, hogy a II. és VI. könyvet valamiféle algebrának interpretáljuk. ZEUTHEN természetesnek vette, hogy a görög kúpszelet-elmélet analitikus geometriának tekinthető, s épp ezért algebrásította a görög szerkesztéses számolást. A későbbi matematikatörténészek nem veszik ezt ilyen természetesnek. H. DE VRIES szerint analitikus geometria a XIX. század előtt egyáltalán nem létezik.[50] Ugyanez a véle-

[48] ZEUTHEN, H. G.: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Koppengahen 1886. 5–11.
[49] Uo. 1–7.
[50] VRIES, H. de : „*How analytic geometry became a science*" *Sripta* Mathematica **14** (1948), 5–15.

ménye R. TATONnak[51] is. Az analitikus geometria történetének monográfusa, C. B. BOYER szerint sem lehet a görögöknél analitikus geometriáról beszélni, az analitikus geometria a szimbolikus algebra kifejlődését feltételezi s a görögöknek erről még csak fogalmuk sem volt.[52] Ezt a nehézséget a görög analitikus geometria létezését védő matematikatörténészek is érzik, pl. J. L. COOLIDGE, aki a görög kúpszeletelmélet legfontosabb segédeszközének nem az algebrai geometriát tekinti, hanem az *eudoxosi* arányelméletet.[53]

Amint a fentebb ismertetett interpretációkból kitűnik, a geometriai algebra kérdése nem választható el a görög analitikus geometria kérdésétől. A geometriai algebra kérdése ZEUTHENnél a kúpszelet-elméletből merült fel. OTTO NEUGEBAUER azonban a fordított irányból indul ki. Először is bizonyítottnak veszi a görög geometriai algebra létezését, s azután kimutatja, hogy ennek a geometriai algebrának az egyes tételei semmi egyebek, mint a babiloni algebra erdményeinek a geometriai algebra nyelvére való átültetései. „Ha így fogalmazzuk meg a problémát — írja NEUGEBAUER — minden további teljesen triviális és a babiloni algebra simán csatolható EUKLIDÉS formuláihoz. „A babiloni $xy=a$; $x+y=b$, illetve $xy=a$; $x-y=b$ normálalakok közvetlenül átfordíthatók geometriai nyelvre és a megoldás itt sem egyéb, mint a babiloni $\frac{x}{y}=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c^2}$ formula szó szerinti lefordítása."[54]

A babiloni algebra nagyra értékelésében nem minden matematikatörténész ért egyet NEUGEBAUERrel. ETTORE BORTOLOTTI az *Osiris* első évfolyamában kimutatta, hogy a babilóniaknál nyoma sincsen még az algebrai módszernek. Szerinte egyenletek, normálformákra való redukció csak a modern fordítók mesterkedései, a babiloniak számkörében elképzelhetetlen minden racionális algebrai elmélet.[55] Márpedig NEUGEBAUER éppen a babiloni számrendszert tartotta tökéletesnek, tökéletesebbnek, mint az azt követő görögöt, és a babiloni számfogalom analízise során jut arra a felismerésre, hogy bizonyos számtáblákat egyenletmegoldásként értelmezzen. Annyi azonban kétségtelen, hogy a *Neugebauer*-féle babiloni számfogalom GAUSS számelmélete nélkül nehezen képzelhető el. „Két $a$ és $b$ számot — írja NEUGEBAUER — amelyek csak 60 (pozitív vagy negatív) hatványának szorzatával különböznek egymástól 60 mint faktor szerint kongruensnek fogunk nevezni, és $a=b$ (fact 60)-val jelölünk. Ékírásban felírva az ilyen kongruens számok nem különböztethetők meg."[56] Ez a speciális számfogalom teszi lehetővé az osztó- és szorzótáblák összeállítását és használatát, s a számolási műveletek algebrai interpretációját.

De hátha a babiloni számfogalom csak a *Gauss*-féle számelmélet ismeretében hat olyan modernnek? Kétségkívül értelmezhetők az ékírásos táblák modern mate-

[51] TATON, R.: „*La préhistoire de l'analyse géométrique*" Archives Internationales d'Histoire des Sciences **29** (1950), 89—102.

[52] BOYER, C.: *History of analytic geometry.* New York 1956. 20.

[53] COOLIDGE, J. L.: „*The origins of analytic geometry*" Osiris **1** (1936), 231—250.

[54] NEUGEBAUER, O.: „*Zur geometrischen Algebra. Studien zur Geschichte der antiken Algebra III.*" Quellen und Studien etc. **B3** (1936), 245—259.

[55] BORTOLOTTI, E.: „*L'algebra nella storia e nella preistoria della scienza.*" Osiris **1** (1936), 184—230.

[56] NEUGEBAUER, O.: *Vorgriechische Mathematik*, 5.

matikai szempontból úgy is, ahogy NEUGEBAUER teszi, de vajon így értelmezték-e őket a babilóniak is?

Hasonlóképpen a görög geometriai algebra is csak akkor interpretálható algebrának, ha a vonalszakaszt általános matematikai mennyiségként (valós számként) fogjuk fel, s a reáemelt négyzetet ennek a számnak a második hatványaként. És a szokásos algebrai írásmódra még akkor is csak úgy térhetünk át, ha a vonalszakaszszám és négyzete között semmi elvi különbséget nem teszünk, ha egy szám négyzetét, köbét stb. ugyanolyan számnak tekintjük, mint magát a számot. Egyszóval, ha rendelkezünk a hatvány fogalmával.

Jól tudjuk, hogy ezeket a nagy újításokat csak DESCARTES hozta be a matematikába. Ezek tették számára lehetővé az algebrai egyenletek geometriai szerkesztésekre történő kölcsönösen egyértelmű leképezését. A „Geometrie" első könyve ezekkel a sorokkal kezdődik: „A geometria minden problémáját könnyen lehet olyan kifejezésekre redukálni, hogy azután már nincs szükség egyébre megkonstruálásukhoz, mint néhány egyenes vonal hosszúságának az ismeretére.

És mint ahogy az egész aritmetika semmi egyébből nem áll, mint négy vagy öt műveletből," úgy a geometriában is csupán definiálni kell ezeket a műveleteket a fent mondott vonalszakaszokra, s akkor itt is lehet egyszerűen számolni. „De gyakran nincs szükség ezeknek a vonalaknak papíron való megrajzolására, elég néhány betűvel jelölni őket, mindegyiket külön betűvel ... ahol meg kell jegyezni, hogy $a^2$ vagy $b^3$, vagy hasonlókon általában semmi egyebet nem értek, mint egészen közönséges vonalakat, bár az algebrában megszokott neveket használva négyzeteknek, köböknek stb. nevezem őket."[57]

Az algebrát, mint a négy egyszerű művelet és a gyökvonás véges számú alkalmazásából nyert kifejezések vizsgálatát DESCARTES teremtette meg. Ezt az algebrát egyaránt lehet vonalszakaszokra vagy tetszőleges jelekre, betűkre leképezni. DESCARTES algebrai módszerekről alkotott fogalmát már alig lehet megkülönböztetni attól, amit egy mai tankönyv ért algebrai módszereken „A tisztán algebrainak nevezhető módszerek és eredmények a matematika olyan tényein alapulnak, amelyek a négy alapművelet és az egyenlőségi jel véges számú alkalmazásával megfogalmazhatók."[58]

Ilyen értelemben vett algebráról DESCARTES előtt nem beszélhetünk. Amit ő előtte így neveztek, az csupán egyes egyenletek megoldása volt s a görög geometriai algebrában még egyenletekről sem lehet szó. A görög matematika nem geometriai szerkesztések és egyenletek, hanem geometriai szerkesztések és arányok között keres kapcsolatot, s ez nagyon különböző attól, amit DESCARTES teremtett meg.

Éppen azért foglalkoztunk olyan részletesen van der WAERDEN THEAITÉTOsával, mert WAERDEN az egyik első matematikatörténész, aki határozottan kidolgozta a korai görög matematika arányelmélet jellegét. Ebben a matematikában a mi algebránktól merőben idegen fogalmak szerepelnek, mint pl. *ἀνταναίρεσις*, *ἄλογος*-nak nevezett vonalak, *ῥητος*-nak mondott területek. Miért nevezik *ἄλογος*-nak az incommensurabilis vonalakat, miért indulnak ki a vonalak osztályozásában a rájuk emelhető négyzetekből, mit jelent az, hogy ARCHYTAS két középarányost ír be ott, ahol mi egy harmadfokú egyenletet oldanánk meg?

[57] *Oeuvres de Descartes.* Publiées par Ch. Adam & P. TANNERY. Tome VI. 369—371.
[58] SZELE TIBOR: *Bevezetés az algebrába.* Budapest 1953. 9.

Az első ilyen jellegű kérdéseket egy TANNERY-tanítvány, PIERRE BOUTROUX vetette fel.[59] Ő látta először világosan, hogy a görög matematika fogalmai nem írhatók át modern jelekkel. Utána KURT REIDEMEISTER, a modern algebrai geometria egyik megteremtője közledett ilyen kritikus módon az alapfogalmak saját matematikai gondolatvilágukból való megértésének az igényével a görög matematikához. CANTOR, HEATH, TANNERY, ZEUTHEN, STENZEL és BECKER — írja REIDEMEISTER — mind a késői teljesen megbízhatatlan neopythagoreusok hatása alá kerültek, s elhitték, hogy a középelmélet, a figurális számok, az irracionális felfedezésének botránya tények. Valójában ezek neopythagoreus mesék. Az irracionális felfedezése semmiféle gondolkozási krízist nem okozott, ellenkezőleg, a görög geometria természetes fejlődési vonalába esett. Ez a vonal a szemlélettől való fokozatos megszabadulás volt, s az irracionalitás felfedezése logikusan következő lépés egy dyadikusan felépített aritmetikában. A görög aritmetika a zenei intervallumok elméletével karöltve fejlődik, és a geometriai számolási mód teljesen független az irracionális problémájától. A tizedik könyvben sem bikvadratikus egyenletek feloldásának a geometriai algebrájáról van szó, hanem a különféle típusú irracionalitásoknak bizonyos racionális nevekre (Namen) való visszavezetéséről. THEAITÉTOS pedig valószínűleg nem egyéb, mint a platóni dialógus körül kikristályosodott legenda. A X. könyv már PLATÓN hatását sejteti, és olyan tejesítmény „ami mélységben és értékben az EUDOXOSéval mérhető össze".[60]

Szó sincsen tehát külön „theaitétosi" és eudoxosi fejlődési fokról, mint O. BECKER és WAERDEN hitték, a görög matematika nagy teljesítményei REIDEMEISTER szerint nem koraiak, hanem egy olyan időszak termékei, amelyik gondolatvilága PLATÓN filozófiájában tükröződik. Másrészt Reidemeister a babilonból való átvétel elméletét is elveti. Honnan és hogyan állanak akkor elő a görög matematika bizonyításai, tételei, szakkifejezései? KURT von FRITZ[61] az „Elemek" egzakt, tudományos felépítését az aristotelési filozófia hatásának tulajdonította, de az „Elemek" egyrészt nem tökéletes logikai zártságú könyv, másrészt tételei nagy része bizonyosan sokkal régibb ARISTOTELÉSnél.

Példa a IX. 20., amelyik azt mondja ki, hogy minden előre megadott prímszámnál létezik nagyobb prímszám. SZABÓ ÁRPÁDnak sikerült erről a tételről bebizonyítania, hogy éppen úgy korai pythagoreus eredmény, mint az „Elemek" másik transfinit tétele, amelyik a négyzetátló és -oldal incommensurabilitását mondja ki. A két tétel bizonyításmódja is azonos: reductio ad absurdum.[62] Honnan jön ez a bizonyítási mód a korai görög matematikába? S egyáltalán miért éppen a korai pythagoreus matematikában olyan gyakori? Ugyanis a fenti két transfinit tételen kívül ugyanerről a bizonyítási módról van szó az O. BECKER által rekonstruált, és REIDEMEISTER által is ősi pythagoreus matematikának elismert páros-páratlan elméletben is. Azon tulajdonságok egyike, amelyeket BECKER oly jellegzetesnek talált a páros-páratlan elmélet bizonyításmódjára, nem egyéb, mint a PARMENIDÉS

[59] BUOTROUX, P.: *Les principes de l'analyse mathématique. Exposé historique et critique.* Paris 1914. I. 486, l. lábjegyzet, uo. 280, 326.

[60] REIDEMEISTER, K.: *Die Arithmetik der Griechen. — Das exakte Denken der Griechen.* Hamburg 1949. 15—43.

[61] FRITZ, K. von: *„Die APXAI in der griechischen Mathematik".* Archiv für Begriffsgeschichte **1** (1955), 13—116.

[62] SZABÓ, Á.: *„Ein Lehrsatz der pythagoreischen Arithmetik."* Elemente der Mathematik **9** (1956), 101—105.

által bevezetett bizonyítási módszer, az ún. „hármas út" módszere. SZABÓ ÁRPÁD emlékeztet rá: KARL REINHARDT már 1916-ban kimutatta, hogy PARMENIDÉSnek ezt a módszerét gúnyolta ki i. e. 500 körül egy szicíliai komédiaíró, EPICHARMOS. És éppen ebből a komédiából fennmaradt töredékben fordul elő először a páros-páratlan szám elnevezés. A töredéket O. BECKER és van der WAERDEN a páros-páratlan elmélet korai voltának a bizonyítására használták fel, és úgy értelmezték, mint a pythagoreus matematika kigúnyolását. SZABÓ ÁRPÁD a BECKER és WAERDEN eredményeit összevetve a REINHARDT megoldásával, kimutatja, hogy itt, a páros-páratlan elméletben az eleata „hármas út", az ellentmondásmentesség kritériuma kerül át az eleata filozófiából a pythagoreus matematikába.[63] S ennek az eleata bizonyítás kritériumnak a hatására válik a pythagoreus matematika deduktív tudománnyá.[64]

De honnan ered a pythagoreus matematika sajátos számfogalma, az oszthatatlan egységekből álló szám fogalma? A megelőző matematika, a babilóni ugyanis éppen a számok oszthatóságára épült fel: a „határozatlan helyértékrendszeren" belül bármely két szám szorzata az egység — modulo 60. Innen kiindulva nem lehetne megérteni a görög számfogalmat. Az egység euklidési definíciója — „egy az, ami szerint minden dolgot egynek mondunk" — egészen más forrásokból táplálkozik.

SZABÓ ÁRPÁD PLATÓN „Állam" c. dialógusának analízisén keresztül mutatja ki, hogy ez a számfogalom PARMENIDÉS létezőről szóló tanítására vezethető vissza. S ez az egység megsokszorozásából álló számfogalom tette szükségessé az „osztás" és a „rész" pontos megfogalmazását. A folyamat nyomon követését a használt terminus technicusok teszik lehetővé. „Kézenfekvő volt — foglalja össze idevonatkozó vizsgálatait SZABÓ Á. — a legegyszerűbb fajta oszthatóság (a ‚felezhetőség') jelölésére a leggyakrabban használt eleai terminust, a *διαιρειν* igét használni. Ugyanakkor viszont azt a névszót —‚rész' = *μέρος* —, amely az eleaták által még tagadott ‚osztás' eredményét jelölte, fölhasználhatták a számok egyéb oszthatóságainak a megjelölésére."[65] Ebben az összefüggésben érthető meg EUKLIDÉS nyolcadik axiomája: „az egész nagyobb mint a rész". Ugyanis az eleata-pythagoreus egység fogalom a geometriára alkalmazva a „pont" fogalmához vezet: „pont az, amelyiknek része nincs", s ekkor a véges vonalszakaszt éppen a 8. axiomával lehet megvédeni ZÉNÓN „fele idő egyenlő a duplájával" paradoxonával szemben.[66]

Az eleata logikának a geometriára való alkalmazása sokkal nehezebb feladatot jelentett, mint az aritmetikai alkalmazása. A görög matematika a geometria területén fokozottan kényszerül a maga álláspontjának az eleata filozófiával szembeni rögzítésére. A folyamat végeredménye a görög geometria axiomatikus-definitorikus megalapozása lett. A részletek valamelyes felderítése a megbízható források teljes hiányában csak a használt terminusok analízise alapján volt lehetséges. A terminusok változásainak a felderítéséből következtetni lehet az általuk takart jelentésre, ami végső, kialakult formájukból már alig remélhető.

[63] SZABÓ Á.: „*Eleatica*". Acta Antiqua Hung. 3 (1955), 67—103.

[64] SZABÓ Á.: „*Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? I, II*," Matematikai Lapok 8 (1957), 8—36 és 232—247.

[65] SZABÓ Á.: „*A görög matematika definíciós-axiomatikus alapjai.*" Matematikai Lapok 10 (1959), 72—121.

[66] Uo. 106—118.

Így az *ἀξιώματα* helyett már közvetlenül EUKLIDÉS után *κοιναὶ ἔννοιαι*-it kezdenek alkalmazni, s csak PROKLOS tér vissza újból, s ő sem következetesen az *ἀξιώματα*-ra. A definíciók — *ὅροι* — helyett pedig gyakran használ PROKLOS *ὑποθέσεις*-t. ARISTOTELÉS erősen tiltakozott ennek a kettőnek a felcserélése ellen, de PLATÓN még *ὑποθέσεις*eknek nevezte a geometria és aritmetika definícióit. Honnan erednek ezek az ingadozások, mit jelentenek a szavak a köznyelvben, a filozófia és a logika használatában és hogyan kerülnek a matematikába?

PLATÓN a *ὑπόθεσις* szót a *ὁμολόγημα* szinonim szavaként „nem bizonyítható feltevés", „előzetes megállapodás" értelemben használja. De ez a fogalom nem jelent teljes önkényességet: olyannak kell lennie, hogy ellentétét feltételezve indirekt bizonyítás lehetősége álljon fenn. „Lényegében minden tökéletesen végbevitt indirekt] bizonyítás — írja SZABÓ Á. — ilyen kettős *ὑπόθεσις* alkalmazásból áll, és éppen erre épül fel az egész platóni dialektika."[67] A módszert a matematikából veszi át: az indirekt bizonyítás az i. e. V. század matematikájának fő bizonyítási módszere. Ide pedig az eleata logikából jutott. A definíció fogalmának az eredetét az eleata logikában kell keresni. Ugyancsak a dialektikában lehet megtalálni az *ἀξίωμα* kifejezés eredetét is. EUKLIDÉS axiómái lényegében mind egyetlen fogalom, az egyenlőség meghatározására valók. PLATÓN erre a célra két definíciót használ, s így is nevezi őket, *ὁμολογήματα*. Az eklidészi *ἀξιώματα* azonban csak az érzékszervek által igazolható, empirikus tételek, s így nem léphetnek fel a *ὁμολογήματα*-vá váláshoz szükséges közös megegyezés igényével, mert az eleata dialektika szerint csak az értelemmel megragadható tételek érdemlik meg ezt a nevet. Az *ἀξίωμα* helybenhagyását meg kell követelni a vitapartnertől, éppen úgy, mint a postulatumét; épp úgy „függőben marad" a vita során, mint az utóbbi. Az *ἀξίωμα*-nak ezt az értelmét csak ARISTOTELÉS sorvasztja el, csak utána veszi fel a „természetszerűen igaznak tartott tétel" jelentést. De a matematika még sokáig annyira érzi az eredeti értelmet, hogy az euklidési szövegben inkább felcseréli *κοιναί ἔννοιαι*-ra.[68] Eredetileg azonban az *ἀξιώματα* éppen úgy az eleaták kritikája ellen felállított követelmények voltak, mint az *αἰτήματα*. Nem formális logikai jellegük, hanem tartalmuk különböztette meg őket. Előbbiek az „egyenlőség" fogalmának a megvédését szolgálták, utóbbiak a „geometriai mozgásét": a szerkesztését.[69]

Ismét a már érintett ténnyel állunk szemben: a geometria területén a görög matematika lényegesen nagyobb erőfeszítéseket tesz álláspontja rögzítése érdekében, mint az aritmetikában. Az aritmetikában ugyanis két szám viszonyának, a *λογος*-nak az egyenlőségére már a legkorábbi időben bevezet a görög matematika egy kifejezést: *ἀνὰ λόγον ἴσοι*, a logos szerint egyenlőek. Az *ἴσον* csakhamar elmarad, az *ἀνάλογον* átkerül a matematikai szaknyelvből a köznyelvbe és a grammatikába, az *ἀνα* prepozíció eredeti disztributív jelentése elvész, s az analógia felveszi mai jelentését, amiből az eredeti jelentést többé kihámozni nem lehetne.[70]

Nagy és nehezen kibogozható problémát jelent a szavak élete. Ugyanazok a szavak korszakonként egészen mást jelentenek, s ugyanazon dolgok jelölésére

[67] SZABÓ, Á.: „*Anfänge des euklidischen Axiomensystems.*" Archive for History of Exact Sciences **1** (1960), 37—106.
[68] Uo. 78.
[69] Uo. 78—84.
[70] SZABÓ Á.: „*ΑΝΑΛΟΓΙΑ.*" Acta Antiqua Hung. **10** (1962) 237—245.

használnak korszakonként egészen más szavakat. Egy szó lefordítása távolról sem jelenti még a szó megértését. Sőt: sok esetben éppen a lefordítás lehet a megértés legfőbb akadálya. Mutatja ezt a *δύναμις* esete.

Ennek a szónak a félreértéséért TANNERY felelős. Ő adta meg a szónak négyzet*oldalként* fordítva azt az értelmet, amelynek a segítségével később azt mutatták ki THEODOROSról, hogy a $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots \sqrt{17}$ irracionalitását akarja bizonyítani esetenként, mert általános tételt még nem tudott hozni az irracionalitásokról, s 17-néi azután abbahagyta. Az irracionalitások teljes, általános elméletét tanítványa, THEAITÉTOS adta meg az „Elemek" X. könyvében.

SZABÓ ÁRPÁD a kérdéses PLATÓN-helyet az egész dialógus keretében, nagyon figyelmesen analizálva kimutatja,[71] hogy a *δυνάμις* nem négyzet*oldalt* jelentett, hanem négyzetet, ill. a *δυνάμει συμμετρος* rövidítése. A kérdéses THEODOROS-jelenetben nem a $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots \sqrt{17}$ irracionalitásának tökéletlen, egyedi bizonyításáról van szó, hanem egy általános megkülönböztetésről „hosszúságuk szerint commensurabilis" — *μήκει σύμμετρος* — és a „föléjük emelhető négyzet szerint commensurabilis — *δυνάμει σύμμετρος* — vonalak között. „THEODOROS tanítványai tehát tulajdonképpen csak egy odaillő *elnevezést, nevet* kerestek arra, amit éppen megtanultak." „Theaitétos", a matematikus, pedig késő antik, neopythagoreus legenda.

De mit jelentett maga a *δύναμις* szó egyébként a görög nyelvben? S van-e ennek a jelentésnek jelentősége a görög matematika története szempontjából? Megengedi-e a *δύναμις* szó használata a „hatvány"-ként való fordítását és interpretációját, mint TANNERY tette volt? SZABÓ ÁRPÁD az ige, *δύνασθαι,* köznyelvben, gazdasági és politikai szóhasználatban való előfordulásait végigkövetve kimutatja, hogy mindig valamilyen értékegyenlőséget fejez ki. Geometriai szóhasználatban pedig négyzetérték szerinti egyenlőséget. Semmi értelme sincs tehát a „négyzetet létrehozó oldal", a „hatvány"-ként való TANNERY szerinti fordításnak.

*

Az EUKLIDÉS előtti matematika története a történetírás különleges, szélső esetét jelenti, ahol közvetlen források csaknem teljes hiányában, a primér forrásokról évszázadokkal később, sokszor több közvetítőn keresztül történt feljegyzések között kell haladni, feltevést feltevésre állítva és eldobva, óvatosan és merészen egy, legfeljebb részben helyes interpretáció felé.

(Beérkezett: 1962. XII. 9.)

[71] SZABÓ Á.: *„Der mathematische Begriff* δύναμις *und das sog. „geometrische Mittel."* (megjelenés alatt.)

# NÉHÁNY MEGJEGYZÉS A SZOBOLJEV-FÉLE DISZTRIBUCIÓ ELMÉLETHEZ

Írta: FRIVALDSZKY SÁNDOR

A jelen cikkben néhány kiegészítést teszünk a *Szoboljev*-féle disztribució elmélethez (l. [1]), illetve a legfontosabb *Szoboljev*-féle tételekhez, amelyekkel a [2] cikk is foglalkozik. Vezessük be a $W_p^{(k)}(\Omega)$ térben az alábbi normát:

$$\|\varphi\|_{W_p^{(k)}(\Omega)} = \{\|\varphi\|_{L_1(\Omega)}^p + \sum_{\Sigma k_i = k} \|D_{k_1 \dots k_n}^k \varphi\|_{L_p(\Omega)}^p\}^{1/p},$$

ahol $\Omega$ egy $n$-dimenziós tartomány, amelynek pontjai $x = (x_1, \dots, x_n)$ $(n \geqq 2)$.

Ez a kifejezés bármely $\Omega$ tartomány esetén véges és a $W_p^{(k)}(\Omega)$ tér *Banach*-teret alkot ezzel a normával. Végül, ha $\Omega$ csillagtartomány, akkor a fenti norma ekvivalens a *Szoboljev*-féle normával.

A szükséges alapfogalmak megtalálhatók a [2] cikkben. Ebben a csillagtartományokra, illetve véges számú ilyen tartomány alkalmas egyesítésére kimondott *Szoboljev*-féle tételek általánosítására a következő tétel található:

TÉTEL: *Legyen $\Omega$ tetszőleges tartomány, $\Omega^\circ$ pedig olyan, amelynek lezárása is még $\Omega$-ban van (azaz $\bar{\Omega}^\circ \subset \Omega$). Ekkor létezik olyan $M = M(\Omega^\circ)$ állandó, hogy bármely $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$ függvény esetén*

1) $\varphi \in L_p(\Omega^\circ)$,

2) $\varphi \in W_p^{(l)}(\Omega^\circ)$ $(l = 1, \dots, k-1)$,

3) *A $0 \leqq i \leqq k$ egész szám bármely $(i_1, \dots, i_n)$ felbontása esetén (ahol $i_1 + \dots + i_n = i$; $i_j \geqq 0$) fennáll, hogy*

$$\|D_{i_1 \dots i_n}^i \varphi\|_{L_p(\Omega^\circ)} \leqq M \|\varphi\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}.$$

*A $\varphi$ függvény és annak összes legfeljebb $(k-1)$-ed rendű Szoboljev-féle deriváltjai egy legfeljebb 0 (n-dimenziós) Lebesgue-mértékű halmazon megváltoztathatók úgy, hogy a $\varphi$ függvény és annak fenti deriváltjai már mindenütt értelmezettek legyenek az $\bar{\Omega}$ halmazon és az új $\varphi'$ függvényre és annak új, fenti deriváltjaira érvényesek legyenek az alábbi állítások:*

4) *Ha $k > n/p$ és $0 \leqq i < k - n/p$ egész szám, akkor $\varphi' \in C_i(\Omega)$, továbbá az $i$ szám bármely $(i_1, \dots, i_n)$ felbontására fennáll:*

$$\left\| \frac{\partial^i \varphi'}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right\|_{C_0(\bar{\Omega}^\circ)} \leqq M \|\varphi'\|_{W_p^{(k)}(\Omega)};$$

5) *Ha $D_{k_1 \dots k_n}^k \varphi' \in C_0(\bar{\Omega})$ a $k$ szám bármely $(k_1, \dots, k_n)$ felbontása esetén, vagy ez elérhető a $D_{k_1 \dots k_n}^k \varphi'$ függvényeknek 0 Lebesgue-mértékű halmazon való megváltoztatásával, akkor $\varphi' \in C_{k-1}(\Omega)$;*

6) *Ha $n'$ olyan pozitív egész szám, amelyre $n>n'>n-(k-i)p$, ahol $0 \leqq i<k$ egész szám, ha $S^*$ egy $(n'+1)$-dimenziós tartomány peremének egy darabja reguláris és $S^* \subset \bar{\Omega}^\circ$, és ha $(i_1, \ldots, i_n)$ az $i$ szám valamely felbontása, akkor $D^i_{i_1 \ldots i_n} \varphi' \in L_p(S^*)$ és*

$$\|D^i_{i_1 \ldots i_n} \varphi'\|_{L_p(S^*)} \leqq M \|\varphi'\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}.$$

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy erősíthetők-e a fenti tétel állításai. Nevezetesen, ha a 4. pont feltételei teljesülnek, akkor fennáll-e a $\varphi' \in C_i(\bar{\Omega})$ állítás, vagy legalább a $\varphi'$ függvény korlátos lesz-e az $\Omega$ halmazon (az $\bar{\Omega}-\Omega$ halmaz pontjaiban $\varphi' \equiv 0$); illetve, ha a 6) pont feltételei között az $S^* \subset \bar{\Omega}^\circ$ feltételt az $S^* \subset \bar{\Omega}$ feltétellel helyettesítjük, vajon igaz lesz-e a pont állítása. Mindkét kérdést negatív irányban fogjuk eldönteni egy-egy ellenpélda segítségével.

**A.** Képezzük az alábbi tartományt:

$$\Omega^m = \{x\ ;\ x_1>0;\ |x_2|<x_1^m;\ x_1^2+{}_2^2<2;\ -1<x_i<1 \qquad (i=3, \ldots, n)\},$$

ahol $m \geqq 2$. Legyen

$$r_{(l)} = \left\{ \sum_{i=1}^{l} x_i^2 \right\}^{1/2}$$

és számítsuk ki az

$$\int_{\Omega^m} \frac{dx}{r^\alpha_{(n)}} \tag{1}$$

integrált, ahol $\alpha>0$. A *Fubini*-tétel szerint

$$\int_{\Omega^m} \frac{dx}{r^\alpha_{(n)}} = 2 \underbrace{\int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1}}_{n-2} \int_0^{\pi/4} \int_{\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^m\varphi}\right)^{1/(m-1)}}^{\sqrt{2}} \frac{r_{(2)}}{r^\alpha_{(n)}}\, dr_{(2)}\, d\varphi\, dx_3 \ldots dx_n$$

a polár-tarszformáció értelmében.

Elvégezve a $t=x_n/r_{(n-1)}$ helyettesítést, kapjuk, hogy

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx_n}{r^\alpha_{(n)}} = \frac{1}{r^{\alpha-1}_{(n-1)}} \int_{-\frac{1}{r_{(n-1)}}}^{\frac{1}{r_{(n-1)}}} \frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha/2}}.$$

Az integrál tulajdonságai szerint ezért

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx_n}{r^\alpha_{(n)}} \leqq \frac{2}{r^\alpha_{(n-1)}},$$

mivel

$$\frac{1}{(1+t^2)^{\alpha/2}} \leqq 1.$$

Teljes indukcióval kapjuk, hogy

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1}}_{n-2} \frac{dx_3 \dots dx_n}{r_{(n)}^{\alpha}} \leqq \frac{2^{n-2}}{r_{(2)}^{\alpha}}.$$

Ezért (1) véges, ha az

$$\int_{0}^{\pi/4} \int_{\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^m\varphi}\right)^{1/(m-1)}}^{\sqrt{2}} \frac{dr_{(2)}}{r_{(2)}^{\alpha-1}} d\varphi$$

integrál véges. Ha $\alpha \neq 2$, akkor

$$\int_{0}^{\pi/4} \int_{\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^m\varphi}\right)^{1/(m-1)}}^{\sqrt{2}} \frac{dr_{(2)}}{r_{(2)}^{\alpha-1}} d\varphi = \frac{1}{-\alpha+2}\left[\frac{1}{2^{\frac{\alpha-2}{2}}} \frac{\pi}{4} - \int_{0}^{\pi/4} \left(\frac{\cos^m\varphi}{\sin\varphi}\right)^{\frac{\alpha-2}{m-1}} d\varphi\right]. \tag{2}$$

A $(0, \pi/4)$ intervallumban

$$\varphi \leqq \frac{\pi \sin\varphi}{2},$$

ezért ha $\alpha > 2$ és az

$$\int_{0}^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\varphi^{\frac{\alpha-2}{m-1}}}$$

integrál véges, akkor a (2) integrál is véges. Végül, ha

$$\frac{\alpha-2}{m-1} < 1.$$

azaz

$$\alpha < m+1,$$

és $\alpha > 2$, akkor az (1) integrál véges.

Legyen $n \geqq 2$, $k$ egész és a $p > 1$, $\beta > 2$ számok egyébként tetszőlegesek. Legyen $m$ olyan szám, amelyre

$$1 + m > (\beta + k)p; \qquad m \geqq 2. \tag{3}$$

Ekkor a

$$\varphi(x) = \varphi'(x) = \frac{1}{r_{(n)}^{\beta}}$$

függvényre $\varphi' \in C_\infty(\Omega^m)$; $\varphi' \in L_1(\Omega^m)$ és mivel

$$\left|\frac{\partial^k \varphi'(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right| \leqq M_0 \frac{1}{r_{(n)}^{\beta+k}},$$

azért $\partial^k\varphi'/\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}\in L_p(\Omega^m)$ a $k$ szám bármely $(k_1,\dots,k_n)$ felbontására. Ezért $\varphi'\in W_p^{(k)}(\Omega^m)$, mégis a $\varphi'$ függvény nem korlátos az $\Omega^m$ halmazon. (Ebből következik, hogy az $\Omega^m$ tartomány nem kvázi-csillagtartomány.)

**B.** A fenti $\Omega^m$ tartományban vizsgáljuk az alábbi halmazt

$$S^* = \{x: 0<x_1<a;\ x_i = 0 (i = 2,\dots,n-n'+1);$$
$$-x_1<x_j<x_1 (j = n-n'+2,\dots n)\}$$

ahol $0<n'<n$ egész és $0<a<1$.

Ez a halmaz egy $n'$-dimenziós hipersíkon fekszik, továbbá $S^*\subset\bar\Omega^m$ és $\bar S^*\cap(\bar\Omega^m-\Omega^m) = \{0\}$, azaz egyetlen pont. Számítsuk ki az alábbi integrált, ahol $\alpha>0$:

$$\int\limits_{S^*}\frac{dx^*}{r_{(n)}^{\alpha}} = \int\limits_0^a\underbrace{\int\limits_{-x_1}^{x_1}\dots\int\limits_{-x_1}^{x_1}}_{n'-1}\frac{1}{r_{(n')}^{\alpha}}\,dx_1\dots dx_{n'} \tag{4}$$

a *Fubini*-tétel szerint, ahol a változókat átindexeltük. A $t=x_{n'}/r_{(n'-1)}$ helyettesítéssel

$$\int\limits_{-x_1}^{x_1}\frac{dx_{n'}}{r_{(n')}^{\alpha}} = \frac{1}{r_{(n'-1)}^{\alpha-1}}\int\limits_{-\frac{x_1}{r_{(n'-1)}}}^{\frac{x_1}{r_{(n'-1)}}}\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha/2}}$$

adódik. Mivel $x_1/r_{(n'-1)}\leqq 1$ és

$$\frac{1}{2^{\alpha/2}}\leqq\frac{1}{(1+t^2)^{\alpha/2}}\leqq 1,\quad\text{ha}\quad -1\leqq t\leqq 1,$$

azért

$$\frac{2x_1}{2^{\alpha/2}}\frac{1}{r_{(n'-1)}^{\alpha}}\leqq\int\limits_{-x_1}^{x_1}\frac{dx_{n'}}{r_{(n')}^{\alpha}}\leqq 2x_1\frac{1}{r_{(n'-1)}^{\alpha}}.$$

Hasonlóan

$$\left(\frac{2x_1}{2^{\alpha/2}}\right)^{n'-1}\frac{1}{x_1^{\alpha}}\leqq\underbrace{\int\limits_{-x_1}^{x_1}\dots\int\limits_{-x_1}^{x_1}}_{n'-1}\frac{1}{r_{(n')}^{\alpha}}\,dx_2\dots dx_{n'}\leqq(2x_1)^{n'-1}\frac{1}{x_1^{\alpha}},$$

ezért a (4) integrál akkor és csakis akkor véges, ha az

$$\int\limits_0^a x_1^{n'-1-\alpha}\,dx_1$$

integrál véges, azaz, ha

$$n'-1-\alpha > -1,$$
$$\alpha<n'.$$

Legyen $n \geqq 2$, $k$ egész szám és a $p > 1$ szám egyébként tetszőleges. Legyen $n > n' > n - kp$ pozitív egész. Ha $\beta > \max(2, n')$ és

$$\varphi(x) = \varphi'(x) = \frac{1}{r_{(n)}^{\beta}},$$

akkor $\varphi' \notin L_1(S^*)$. Mégis, ha (3) fennáll az $m$ számra, akkor $\varphi' \in W_p^{(k)}(\Omega^m)$.

## IRODALOM

[1] С. Л. Соболев: Некоторые применения функционалного анализа в математической физике, Москва 1950.
[2] Frivaldszky S.: Általánosított deriváltakkal rendelkező függvények adott tartományról való kiterjesztésének kérdéséről, *Matematikai Lapok*, 14, (1963), 1–2. szám.

(Beérkezett: 1963. II. 25.)

# KVÁZI-KONKÁV PROGRAMOZÁSI FELADAT MEGOLDÁSA GRADIENS VETÍTÉSI MÓDSZERREL

Írta: KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA

## Bevezetés

Az utóbbi években a nemlineáris programozás az érdeklődés középpontjába került. A *lineáris programozás* alkalmazási köre korlátozott, sok esetben ugyanis a célfüggvény vagy a feltételek nem lineárisak, és lineárissal való helyettesítésük durva közelítés. A nemlineáris programozás körében jelentős helyet foglal el a konkáv programozás. A konkáv programozás újszerű feladatot jelent például azért is, mert egy konvex poliéderen egy konkáv függvény a maximumát általában nem csúcson éri el. Ebből következik az is, hogy a konkáv programozási eljárások általában nem végesek.

A *konkáv programozás* feladata a következő: Maximalizálandó egy $F(\mathbf{x})$ konkáv függvény $g_i(\mathbf{x}) \geqq 0$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ feltételek mellett, ahol $g_i(\mathbf{x})$ függvények is konkávok. Ha

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} c_i x_i$$

és

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} n_{ij} x_j - b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, k)$$

akkor lineáris programozási feladatot kapunk.

Az első konkáv programozásról szóló cikk, KUHN és TUCKER [6] dolgozata 1950-ben jelent meg. Ebben főleg exisztencia- és unicitástételek találhatók, valamint az ún. nyeregponttétel. Az ARROW, HURWITZ és UZAWA által kiadott [10] cikkgyűjteményben általános lineáris terekben való programozás (HURWITZ: Programming in Linear Spaces), továbbá főként konvergencia-, exisztencia- és unicitástételek találhatók. Egyben az optimumot is szolgáltató nyeregpont megkeresését differenciál- ill. differencia egyenletekre vezeti vissza, amelyek gyakorlati felhasználása azonban korlátozott. Erről a témáról lásd még KARLIN [5] munkáját.

Másik fontos nemlineáris programozási témakör a *kvadratikus programozás*. Ezen általában egy pozitív definit (vagy szemidefinit) kvadratikus függvény maximalizálását értik lineáris feltételek mellett. Minthogy egy pozitív definit (szemidefinit) kvadratikus függvény konvex, ez a függvény maximumát a feltételek által meghatározott konvex poliéder valamelyik csúcsán veszi fel. Ez az oka annak, hogy a kvadratikus programozás módszereinek kiindulópontja a szimplex módszer megfelelő módosítása. Lásd például WOLFE [11] dolgozatát. Amennyiben egy pozitív definit (szemidefinit) kvadratikus függvény minimumát keressük, akkor ez ekvivalens a függvény $(-1)$-szeresének, tehát egy konkáv függvénynek maximalizálásával, ami egy konkáv programozási probléma.

Az itt közölt dolgozatban a konkávnál általánosabb célfüggvény esetén vizsgáljuk a programozási feladatot, feltételi egyenleteink azonban lineárisak.

A kvázi-konkáv függvény fogalmát ARROW és ENTHOWEN vezette be az [1] cikkben, azonban itt csak exisztencia- és unicitástételek, valamint a problémának nyeregpont keresésére való visszavezetése található.

Nemrég jelent meg ROSEN [8] cikke, amelyben a konkáv programozási feladatot egy új módszerrel az ún. gradiens vetítéssel oldja meg. Ennek a cikknek a fő gondolatait használtuk fel és általánosítottuk a jelen dolgozatban, kiegészítve a kvázi-konkáv függvényekre vonatkozó lemmákkal, valamint néhány megjegyzéssel.

Az első §-ban a kvázi-konkáv függvényeknek a továbbiakhoz szükséges, eddig még nem tárgyalt tulajdonságait ismertetjük. A 2. §-ban megemlítünk néhány fontos fogalmat és lemmát, amelyre a módszerben támaszkodunk. A 3. § egy mátrixinvertálási módszerrel és a vetítőmátrixok tulajdonságaival foglalkozik. A dolgozat gerincét a 4. § alkotja. Ebben található a kvázi-konkáv programozási feladat megfogalmazása — kvázi-konkáv függvény maximalizálása és a maximum helyének megkeresése lineáris feltételek esetén — a feladat megoldását előkészítő tételek, valamint az eljárás konvergenciájának bizonyítása. Végül az 5. §-ban röviden összefoglaljuk az algoritmust, amely a 4. § tételein alapszik.

Ez úton köszönöm PRÉKOPA ANDRÁSnak, hogy dolgozatomat áttanulmányozta és hasznos tanácsokkal látott el.

## 1. §. Kvázi-konkáv függvény fogalma és tulajdonságai

1. DEFINÍCIÓ: Egy $m$-változós $f(\mathbf{x})$ függvényt $(\mathbf{x}=\{x_1, \ldots, x_m\})$ konkávnak nevezünk egy $R$ konvex tartományban, ha minden $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R$ esetén

$$f[\lambda \mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2] \geqq \lambda f(\mathbf{x}_1)+(1-\lambda) f(\mathbf{x}_2) \qquad (0<\lambda<1)$$

teljesül. (Ha a határozott egyenlőtlenség teljesül minden megengedett $\lambda$-ra, a függvényt szigorúan konkávnak nevezzük.)

2. DEFINÍCIÓ: Egy $m$-változós $f(\mathbf{x})$ függvényt kvázi-konkávnak nevezünk egy $R$ konvex tartományon, ha minden $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R$ esetén

$$f[\lambda \mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2] \geqq \min \{f(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_2)\} \qquad (0<\lambda<1)$$

teljesül. Ha a határozott egyenlőtlenség teljesül minden megengedett $\lambda$-ra, akkor a függvényt szigorúan kvázi-konkávnak nevezzük.

A fenti definícióból nyilvánvaló, hogy minden konkáv függvény egyben kvázi-konkáv is. Egy konkáv, de nem szigorúan konkáv függvény lehet szigorúan kvázi-konkáv. (Például: az $x$-tengellyel nem párhuzamos egyenes.)

A továbbiakban megvizsgáljuk a kvázi-konkáv függvények néhány tulajdonságát.

1. LEMMA: *Egy egyváltozós differenciálható $f(x)$ függvény akkor és csak akkor kvázi-konkáv egy $(a, b)$ intervallumon $x_1, x_2 \in (a, b)$ esetén, ha az*

$$f(x_1) \leqq f(x_2) \tag{1. 1}$$

*egyenlőtlenségből következik, hogy*

$$(x_2-x_1) f'(x_1) \geqq 0. \tag{1. 2}$$

BIZONYÍTÁS: A fenti feltétel *szükséges*. Legyen ugyanis az $f(x)$ függvény kvázi-konkáv. Azt kell igazolnunk, hogy (1. 1)-ből következik (1. 2). Tekintsük először az $x_2 > x_1$ esetet. Ekkor

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \geqq 0, \tag{1.3}$$

mert

$$f(x_1+h)-f(x_1) \geqq 0, \quad \text{hacsak} \quad x_1+h \leqq x_2$$

az $f(x)$ kvázi-konkávitása és (1. 1) miatt. Azonban $x_2 > x_1$ miatt (1. 3) ekvivalens (1. 2)-vel. $x_2 < x_1$ esetén a bizonyítás ugyanígy történik, míg $x_2 = x_1$ esetén (1. 2) triviálisan teljesül.

Az elégségesség igazolásához tegyük fel, hogy minden $x_1, x_2 \in (a, b)$-re (1. 1)-ből következik (1. 2). Igazolni fogjuk, hogy $f(x)$ az $(a, b)$ intervallumon kvázi-konkáv. Legyen $x_2 > x_1$ $x_1, x_2 \in (a, b)$ két olyan pont, amelyre (1. 1) fennáll. Belátjuk, hogy $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqq f(x_1)$ $(0 < \lambda < 1)$. A bizonyítás indirekt módon történik. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik egy $x_3$ $(x_1 < x_3 < x_2)$ pont, melyre $f(x_3) < f(x_1)$. Ekkor létezik egy $x_4 \in [x_1, x_3)$ pont, melyre $f(x_4) = f(x_1)$, de $f(x) < f(x_1)$ minden $x \in (x_4, x_3)$ esetén.[1] Mivel $f(x_4) > f(x_3)$ és $x_4 < x_3$ létezik oly $x_5 \in (x_4, x_3)$ melyre

$$f'(x_5) < 0. \tag{1.4}$$

Másrészt azonban

$$f(x_5) \leqq f(x_4) = f(x_1) \leqq f(x_2) \tag{1.5}$$

és

$$x_5 < x_2. \tag{1.6}$$

(1. 4), (1. 5), és (1. 6) együtt az (1. 2)-nek ellentmond. Teljesen hasonlóan igazolhatjuk a lemma elégséges részét, ha $x_2 < x_1$ esetén teljesül (1. 1), tehát a lemmát igazoltuk.

2. LEMMA: *Egy egyváltozós folytonos függvény akkor és csak akkor szigorúan kvázi-konkáv az $(a, b)$ intervallumon, ha kvázi-konkáv $(a, b)$-n és bármely $x_0$ pontnak létezik olyan $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ környezete, ahol*

$$f(x) \neq f(x_0) \quad (\textit{minden} \;\; x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \;\; x = x_0 \;\; \textit{esetén}). \tag{1.7}$$

BIZONYÍTÁS: Igazoljuk először a lemma szükségességét. A kvázi-konkávitás a definíció miatt szükséges. A másik feltétel is szükséges, ugyanis ha létezne egy $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ $x_0$-hoz torlódó pontsorozat, hogy $f(x_i) = f(x_0)$, akkor $f(x)$ folytonossága miatt egy $x_0$-ból kiinduló szakaszon a függvény értéke $f(x_0)$ volna, tehát nem volna szigorúan kvázi-konkáv.

Az elégségesség bizonyításához legyenek $x_1, x_2 \in (a, b)$ tetszőleges pontok, és $x_2 > x_1$, $f(x_2) \geqq f(x_1)$. (Az $x_2 < x_1$ eset teljesen hasonlóan tárgyalható.) Mivel a függvény kvázi-konkáv:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqq f(x_1) \qquad (0 < \lambda < 1). \tag{1.8}$$

[1] Azon $x_i$ pontok, melyekre $f(x_i) = f(x_1)$ nem torlódhatnak $x_3$-hoz, ekkor ugyanis az $f(x)$ folytonossága miatt $f(x_1) = f(x_3)$ volna a feltevéssel ellentétben.

Tudjuk azt is a második feltétel miatt, hogy létezik oly $\delta$ melyre

(1. 9) $$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]>f(x_2) \qquad (0<\lambda\leqq\delta)$$

teljesül. Tegyük fel a fenti állítással ellentétben, hogy létezik egy $x_3 \in (x_1, x_2)$, $(x_3 \neq x_1, x_3 \neq x_2)$ melyre

(1. 10) $$f(x_3)=f(x_1).$$

Alkalmazzuk a lemmában szereplő második feltételt az $x_3$ pontra. $x_3$-nak van olyan környezete, melyben $f(x) \neq f(x_3)$. Ezt összevetve (1. 8)-cal, kapjuk, hogy létezik egy oly $x_4 \in (x_3, x_2)$ pont, amelyre

(1. 11) $$f(x_4)>f(x_3).$$

(1. 9)-ből következik, hogy létezik egy $x_5 \in (x_1, x_3)$, melyre

(1. 12) $$f(x_5)>f(x_3).$$

Azonban (1. 11) és (1. 12) ellentmond a kvázi-konkávitásnak, amivel a lemmát igazoltuk.

*Megjegyzés:* Az 1. és 2. definícióból következik, hogy egy $n$ változós függvény egy $R$ konvex tartományban akkor és csak akkor kvázi-konkáv, ill. szigorúan kvázi-konkáv, ha a konvex tartomány bármely két pontját összekötő szakasza mentén kvázi-konkáv, ill. szigorúan kvázi-konkáv.

3. DEFINÍCIÓ: Adott $f(\mathbf{x})m$-változós függvény és egy $R$ konvex tartomány az $m$-dimenziós térben. Az $\mathbf{x}_0 \in R$ pontot az $f(\mathbf{x})$ függvény $R$ tartománybeli lokális maximumának nevezzük, ha létezik egy olyan $G(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ $\mathbf{x}_0$ pont körüli $\varepsilon$ sugarú gömb, melyre

$$f(\mathbf{x}_0)=\max_{\mathbf{x}\in R\cap G(\mathbf{x}_0,\varepsilon)} f(\mathbf{x})$$

3. LEMMA: *Egy m-változós, folytonos, kvázi-konkáv függvénynek egy zárt konvex R tartományban pontosan egy lokális maximuma van, amely természetesen az R-beli abszolút maximum is.*

BIZONYÍTÁS: A feltételekből következik, hogy létezik abszolút maximum, amely lokális maximum is. Azt kell csak belátni, hogy több nem lehet. Legyen ugyanis az $f(\mathbf{x})$ függvénynek $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ $R$-beli lokális maximuma, és legyen továbbá

(1. 13) $$f(\mathbf{x}_1) \leqq f(\mathbf{x}_2).$$

Ekkor az $f(\mathbf{x})$ szigorú kvázi-konkávitása miatt:

(1. 14) $$f(\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2) > f(\mathbf{x}_1) \qquad (0<\lambda<1).$$

Mivel azonban $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R$ és $R$ konvex, az egész $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ szakasz $R$-ben van, tehát ellentmondásra jutottunk azzal, hogy $\mathbf{x}_1$ $R$-beli lokális maximum, amivel igazoltuk a lemmát.

## 2. §. Néhány fontos fogalom és lemma

A továbbiakban az $\mathbf{x}$ vektort mindig oszlopvektornak tekintjük, a transzponáltját, a megfelelő sorvektort $\mathbf{x}^T$-vel jelöljük.

4. DEFINÍCIÓ: Az $m$ dimenziós euklidési tér egy $S$ halmazát *sokaságnak* nevezzük, ha előállítható a következő alakban

$$S = \{\mathbf{v}+\mathbf{x} \ : \ \mathbf{x} \in K\}, \tag{2.1}$$

ahol $K$ altér. A sokaság dimenzióján a definíciójában szereplő $K$ altér dimenzióját értjük.

Az $m$ dimenziós euklidesi térben az $m-1$ dimenziós sokaságot *hipersíknak* nevezzük.

Könnyen belátható, hogy adott $\mathbf{n}$ és $b$ esetén az

$$\sum_{j=1}^{m} n_j x_j - b = 0 \qquad \left(\sum_{j=1}^{m} n_j^2 = 1\right) \tag{2.2}$$

egyenletet kielégítő $\mathbf{x}$ vektorok hipersíkot alkotnak, és minden hipersík így állítható elő. Az $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$ vektort a *sík normálvektorának* nevezzük. Ismeretes továbbá, hogy a hipersík a teret két féltérre osztja. (A tér egy tetszőleges pontjáról úgy dönthető el, hogy melyik féltérben van, hogy a sík egy pontjából a kiválasztott pontba mutató vektornak a normálvektorral való skaláris szorzata pozitív vagy negatív; még egyszerűbben a (2. 2) egyenletbe való behelyettesítéskor pozitív vagy negatív számot kapunk.) Azon pontok halmazát, amelyekre a (2. 1) egyenlet pozitív vagy nulla értéket ad, nevezzük a sík pozitív félterének, a többi pont együttesét pedig a sík negatív félterének.

Tekintsük most $k$ számú hipersík pozitív félterének a közös részét. Ez egy konvex halmaz, jelöljük $R$-el. Azaz

$$\lambda_i(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^{m} n_{ij} x_j - b_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, k), \tag{2.3}$$

ahol

$$\sum_{j=1}^{m} n_{ij}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \dots k). \tag{2.4}$$

Másképpen, felhasználva, hogy $\mathbf{n}_i = (n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{im})$,

$$\lambda_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{n}_i^T \mathbf{x} - b_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots k). \tag{2.5}$$

Az $R$ zárt konvex halmaz tehát

$$R = \{\mathbf{x} \ : \ \lambda_i(\mathbf{x}) \geqq 0 \quad i = 1, 2, \dots k\}. \tag{2.6}$$

Az $R$ halmaz határa

$$B = \{\mathbf{x} : \lambda_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ valamilyen } i\text{-re és } \lambda_i(\mathbf{x}) \geqq 0 \text{ minden } i\text{-re}\} \tag{2.7}$$

Használni fogjuk még a további egyszerűsítő jelöléseket:

$$N_k = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_k], \tag{2.8}$$

$$\mathbf{b}_k = \{b_1, \dots, b_k\}. \tag{2.9}$$

$N_k$ $mxk$ méretű matrix, $\mathbf{b}_k$ pedig $k$ dimenziós vektor. Így az $R$ halmaz azon $\mathbf{x}$ pontokból áll, amelyekre az

$$N_k^T\mathbf{x} - \mathbf{b}_k \geqq \mathbf{O} \tag{2.10}$$

vektoregyenlőtlenség teljesül.

5. DEFINÍCIÓ: A (2. 8) típusú $N_q$ *matrix pszeudoinverzének* nevezzük az

$$(N_q^TN_q)^{-1}N_q^T \tag{2.11}$$

matrixot.

Könnyen igazolható az alábbi lemma.

4. LEMMA: *Az $N_q$ matrix pszeudoinverze akkor és csak akkor létezik, ha az $N_q$-t alkotó $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_q$ vektorok lineárisan függetlenek.*

Jelöljük $H_i$-vel az $i$-edik hipersík pontjainak halmazát, azaz azokat az $\mathbf{x}$ pontokat, melyekre $\lambda_i(\mathbf{x}) = 0$,

$$H_i = \{\mathbf{x} : \quad \lambda_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{n}_i^T\mathbf{x} - b_i = 0\}. \tag{2.16}$$

Tekintsünk most tetszőleges $q$ számú lineárisan független hipersíkot.[2] Legyen a közösrészük $Q$, tehát

$$Q = \bigcap_{i=1}^{q} H_i. \tag{2.17}$$

Jelöljük továbbá $H_i^\circ$-lal az $\mathbf{n}_i$ normálvektorú, origón átmenő síkot és $Q^\circ$-lal ezek közös részét:

$$H_i^0 = \{\mathbf{x} : \quad \mathbf{n}_i\mathbf{x} = 0\}, \tag{2.18}$$

$$Q^\circ = \bigcap_{i=1}^{q} H_i^\circ. \tag{2.19}$$

A $Q^\circ$ halmaz $q$ dimenziós altér. A $Q^\circ$ ortogonális kiegészítő alterét jelöljük $\tilde{Q}$-mal. Nyilvánvaló, hogy

$$\tilde{Q} = \left\{\mathbf{x} : \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i\mathbf{n}_i, \quad \lambda_i \text{ tetszőleges valós szám}\right\}. \tag{2.20}$$

Tekintsük most a következő $m \times m$-es matrixot:

$$\tilde{P}_q = N_q(N_q^TN_q)^{-1}N_q^T. \tag{2.21}$$

5. LEMMA: *$\tilde{P}_q$ egy vetítő matrix,[3] mely minden m dimenziós vektort $\tilde{Q}$-ba vetít.*

[2] Hipersíkokat lineárisan függetleneknek nevezünk, ha normálvektoraik lineárisan függetlenek.

[3] Vetítésen merőleges vetítést értünk, azaz olyat, hogy az eredeti és a vetített vektor különbsége merőleges arra az altérre vagy sokaságra, ahova vetítünk. Ez nyilvánvalóan egyértelmű. Ugyanis ha lenne kettő, azok különbsége merőleges lenne az altérre, de másrészt benne is van, tehát **0**. A tér egy pontját azonosnak tekintjük az origóból a pontba mutató vektorral, ezért pont vetítése és vektor vetítése között nem teszünk különbséget.

BIZONYÍTÁS: Mivel $E_m$, az $m$ dimenziós euklidési tér, $Q^\circ$ és $\tilde{Q}$ ortogonális összege, minden $E_m$-beli vektor egyértelműen állítható elő mint egy $Q^\circ$-beli és egy $\tilde{Q}$-beli vektor összege. Ezért elegendő igazolni, hogy

$$(2.22) \qquad \tilde{P}_q\mathbf{v} = \mathbf{O} \quad \text{ha} \quad \mathbf{v} \in Q^\circ$$

és

$$(2.23) \qquad \tilde{P}_q\mathbf{w} = \mathbf{w} \quad \text{ha} \quad \mathbf{w} \in \tilde{Q}.$$

Legyen $\mathbf{v} \in Q^\circ$. Ekkor $Q^\circ$ definíciója miatt

$$\mathbf{n}_i^T\mathbf{v} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

innen

$$N_q^T\mathbf{v} = \mathbf{O},$$

amiből $\tilde{P}_q$ definíciója miatt (2. 22) azonnal következik.

Legyen most $\mathbf{w} \in \tilde{Q}$, azaz

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{q} a_i\mathbf{n}_i = N_q\boldsymbol{a},$$

innen

$$\tilde{P}_q\mathbf{w} = N_q(N_q^TN_q)^{-1}N_q^TN_q\mathbf{a} = N_q\mathbf{a} = \mathbf{w}$$

Ezzel a lemma állítását igazoltuk.

Megjegyzendő, hogy ha $q = m$, $N_m$ négyzetes matrix és

$$(2.24) \qquad \tilde{P}_q = N_mN_m^{-1}(N_m^T)^{-1}N_m^T = I$$

egységmatrix, azaz minden vektort önmagába vetít, ahogy várható volt.

Tekintsük a következő $m \times m$-es matrixot:

$$(2.25) \qquad P_q^0 = I - \tilde{P}_q = I - N_q(N_q^TN_q)^{-1}N_q^T.$$

6. LEMMA: *$P_q^0$ vetítőoperátor, mely minden $m$ dimenziós vektort $Q^\circ$-ba vetít.*

BIZONYÍTÁS: Legyen ismét $\mathbf{v} \in Q^\circ$ és $\mathbf{w} \in \tilde{Q}$. Felhasználva az 5. lemmát, kapjuk, hogy

$$P_q^0\mathbf{v} = \mathbf{v} - \tilde{P}_q\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

és

$$P_q^0\mathbf{w} = \mathbf{w} - \tilde{P}_q\mathbf{w} = \mathbf{O}$$

amivel igazoltuk a lemmánkat.

Az eddigiekből következik az alábbi, vetítőmatrixok és lineáris függetlenség kapcsolatára vonatkozó állítás.

7. LEMMA: *Legyenek $\mathbf{n}_i$-k $(i = 1, 2, \ldots, k)$ lineárisan független vektorok és $P_q^0$ a fenti (2. 25) vetítőmatrix. Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy $\mathbf{y}$ vektor lineárisan független legyen $\mathbf{n}_i$-ktől, az, hogy*

$$(2.26) \qquad P_q^0\mathbf{y} \neq \mathbf{O}$$

*legyen.*

8. LEMMA: *Egy tetszőleges* $\mathbf{x}$ *vektor* $Q$*-beli vetülete*[4] *a következőképpen állítható elő:*

$$(2.27)\qquad P_q\mathbf{x} = \mathbf{x} - N_q(N_q^T N_q)^{-1}(N_q^T\mathbf{x} - \mathbf{b}_q).$$

BIZONYÍTÁS: Használjuk a következő jelöléseket

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_i^T\mathbf{x} - b_i$$

$$(2.28)\qquad \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1^T\mathbf{x} - b_1 \\ \mathbf{n}_2^T\mathbf{x} - b_2 \\ \vdots \\ \mathbf{n}_q\mathbf{x} - b_q \end{pmatrix} = N_q^T\mathbf{x} - \mathbf{b}_q.$$

Ekkor a $Q$ sokaság így írható:

$$(2.29)\qquad Q = \{\mathbf{x} : \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\}.$$

Azt kell tehát belátni, hogy minden $\mathbf{x}$-re

$$(2.30)\qquad \boldsymbol{\lambda}(P_q\mathbf{x}) = \mathbf{o},$$

továbbá, hogy a vetítés merőleges,[4] azaz

$$(2.31)\qquad P_q\mathbf{x} - \mathbf{x} \in \tilde{Q}.$$

Figyelembe véve (2. 27)-t és (2. 28)-t, valamint $\tilde{Q}$ definícióját,

$$\boldsymbol{\lambda}(P_q\mathbf{x}) = N_q^T\mathbf{x} - \mathbf{b}_q - N_q^T N_q(N_q^T N_q)^{-1}(N_q^T\mathbf{x} - \mathbf{b}_q) = \mathbf{O}.$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$(N_q^T N_q)^{-1}\,(N_q^T\mathbf{x} - \mathbf{b}_q) = \mathbf{u}.$$

Ekkor

$$P_q\mathbf{x} - \mathbf{x} = N_q\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{q} u_i\mathbf{n}_i,$$

amivel igazoltuk a lemmánkat.

*A vetítőmatrixok néhány egyszerű tulajdonsága*

Legyenek $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E_m$ tetszőleges vektorok. Bontsuk fel őket $\tilde{Q}$-beli, ill. $Q°$-beli összetevőikre:

$$(2.32)\qquad \mathbf{v} = \tilde{P}_q\mathbf{v} + P_q^0\mathbf{v} \qquad \mathbf{w} = \tilde{P}_q\mathbf{w} + P_q^0\mathbf{w}.$$

$\tilde{Q}$ és $Q°$ ortogonalitása miatt

$$(2.33)\qquad (\tilde{P}_q\mathbf{v})^T(P_q^0\mathbf{w}) = 0 \quad \text{és} \quad (P_q^0\mathbf{v})^T(\tilde{P}_q\mathbf{w}) = 0.$$

Ezért

$$(2.34)\qquad \mathbf{v}^T\mathbf{w} = (\tilde{P}_q\mathbf{v})^T(\tilde{P}_q\mathbf{w}) + (P_q^0\mathbf{v})^T(P_q^0\mathbf{w})$$

[4] Lásd a 3. lábjegyzetet.

és

$$\mathbf{v}^T(\overset{0}{P_q}\mathbf{w}) = (\overset{0}{P_q}\mathbf{v})^T(\overset{0}{P_q}\mathbf{w}) = (\overset{0}{P_q}\mathbf{v})^T\mathbf{w}. \tag{2.35}$$

Ezt alkalmazva $\mathbf{v}=\mathbf{w}$-re kapjuk, hogy

$$\mathbf{v}^T(\overset{0}{P_q}\mathbf{v}) = |\overset{0}{P_q}\mathbf{v}|^2. \tag{2.36}$$

Végül megjegyzendő, hogy (2. 24) és (2. 25) miatt, ha $q=m$

$$P_m\mathbf{v}=\mathbf{o} \quad (\text{minden } \mathbf{v}\in E_m \text{ esetén}). \tag{2.37}$$

## 3. §. Matrix inverzió. Vetítőmatrixok kiszámítása

A továbbiakban gyakran lesz szükségünk az $(N_q^T N_q)^{-1}$ típusú inverzek, valamint a $P_q$ és $\tilde{P}_q$ vetítőmatrixok kiszámítására, különböző $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_q$ esetén. Leggyakrabban úgy lép fel a probléma, hogy a szereplő $\mathbf{n}_i$-ből egyet elhagyunk, vagy egy újat hozzáveszünk. Ezért különösen hasznos lesz rekurziós formulák készítése. A most következő matrix inverziós módszer [7]-ben található meg.

Legyen $A$ egy négyzetes matrix. Végezzük el a következő particionálást:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

ahol $A_1$ és $A_4$ négyzetes matrixok, $A_2, A_3$ a megfelelő sorú, ill. oszlopú derékszögű matrixok. Legyen továbbá

$$A_0=A_4-A_3A_1^{-1}A_2. \tag{3.2}$$

Ha mind $A_1$, mind $A_0$ nemszinguláris, akkor $A$ inverze létezik és a következőképpen állítható elő:[5]

$$A^{-1}=B=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

ahol

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1^{-1}+A_1^{-1}A_2A_0^{-1}A_3A_1^{-1} \\ B_2 &= \quad -A_1^{-1}A_2A_0^{-1} \\ B_3 &= \quad -A_0^{-1}A_3A_1^{-1} \\ B_4 &= \quad A_0^{-1}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Az $A$ és $B$ matrixok összeszorzásával ellenőrizhető, hogy $B$ valóban inverz. (3. 4)-ből nyilvánvaló, hogy $B_i$ ugyanolyan méretű matrix, mint $A_i$ ($i=1, 2, 3, 4$), tehát, ha ismert $A^{-1}$, akkor a $B_i$ is az. Ugyancsak (3. 4)-ből következik, hogy

$$A_1^{-1}=B_1-B_2B_4^{-1}B_3, \tag{3.5}$$

[5] Természetesen ez az elégséges feltétel nem szükséges, azonban a mi esetünkben teljesülni fog.

Legyen most

$$A = N_q^T N_q \tag{3.6}$$

$$A_1 = N_{q-1}^T N_{q-1} \tag{3.7}$$

$$A_2 = A_3^T = N_{q-1}^T \mathbf{n}_q \tag{3.8}$$

$$A_4 = \mathbf{n}_q^T \mathbf{n}_q = 1. \tag{3.9}$$

Ha ismerjük $(N_q^T N_q)^{-1}$-et, akkor könnyen kiszámíthatjuk $(N_{q-1}^T N_{q-1})^{-1}$-et (3. 5) segítségével, ahol most $B_1, B_2, B_3, B_4$ az $(N_q^T N_q)^{-1}$ matrixnak a (3.6)—(3. 9)-nek megfelelő particionálásai, azaz $B_1$ a bal felső sarokban levő $(q-1)\times \times(q-1)$-es matrix, $B_4$ az utolsó sor eleme, $B_2$ és $B_3$ pedig az utolsó oszlop, ill. utolsó sorból elhagyva az utolsó elemet. (Ha nem az $\mathbf{n}_q$-t akarjuk elhagyni, hanem egy másik $\mathbf{n}_i$-t, $N_q^T N_q$-ban sor, ill. oszlopcserékkel elérhető, hogy $\mathbf{n}_i$ és $\mathbf{n}_q$ szerepet cseréljenek, ekkor természetesen az inverzen is végre kell hajtani a megfelelő oszlop-, ill. sorcserét.)

Ha ismerjük $(N_{q-1}^T N_{q-1})^{-1}$-et, $(N_q^T N_q)^{-1}$ a következőképpen számítható ki: felhasználva a $P_q^0$ vetítőoperátor (2. 25) előállítását és $A_0$ (3. 2) definícióját,

$$A_0 = \mathbf{n}_q^T [I - N_{q-1}(N_{q-1}^T N_{q-1})^{-1} N_{q-1}^T] \mathbf{n}_q = \mathbf{n}_q^T P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q, \tag{3.10}$$

azaz felhasználva (2. 36)-ot,

$$A_0 = \mathbf{n}_q^T P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q = (N_{q-1}^0 \mathbf{n}_q)^T (P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q) = |P_{q-1}^0 n_q|^2$$

$$A_0 = |P_{q-1}^0 n_q|^2. \tag{3.11}$$

A 7. lemma szerint annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy $A_0 > 0$ legyen, az, hogy $\mathbf{n}_q$ lineárisan független legyen $\mathbf{n}_i$-ktől $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$. Ezt feltéve (ekkor $A_0^{-1} = \frac{1}{A_0}$, mert $A_0$ egyelemű matrix):

$$\begin{aligned} B_1 &= (N_{q-1}^T N_{q-1})^{-1} + A_0^{-1} \gamma_{q-1} \gamma_{q-1}^T \\ B_2 &= B_3^T = -A_0^{-1} \gamma_{q-1} \\ B_4 &= \quad A_0^{-1}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

ahol

$$\gamma_{q-1} = (N_{q-1}^T N_{q-1})^{-1} (N_{q-1}^T \mathbf{n}_q). \tag{3.13}$$

Ekkor $(N_q^T N_q)^{-1}$-et a következőképpen állíthatjuk elő:

$$(N_q^T N_q)^{-1} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

ahol $B_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ a (3. 12)-ben definiált matrix.

Az eddigiek segítségével könnyen adhatunk egy rekurziós formulát a $\tilde{P}_q$ és a $P_q^0$ vetítőoperátorokra. Felhasználva a (2. 21), (3. 12) és (3. 14) képleteket,

$$\tilde{P}_q = [N_{q-1} \mathbf{n}_q] \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{q-1}^T \\ \mathbf{n}_q^T \end{bmatrix} = \tilde{P}_{q-1} + A_0^{-1} (P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q)(P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q)^T. \tag{3.15}$$

Jelöljük $\mathbf{u}_q$-val a $P_{q-1}\mathbf{n}_q$ irányú egységvektort:

$$\mathbf{u}_q = \frac{P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q}{|P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q|}. \tag{3. 16}$$

Mivel $P_q^0 = I - \tilde{P}_q$,

$$P_q^0 = P_{q-1}^0 - \mathbf{u}_q \mathbf{u}_q^T. \tag{3. 17}$$

Alkalmazzuk a $P_q^0$ operátort egy tetszőleges $\mathbf{y} \in E_m$ vektorra:

$$P_q^0 \mathbf{y} = P_{q-1}^0 \mathbf{y} - (\mathbf{u}_q^T \mathbf{u})\mathbf{u}_q. \tag{3. 18}$$

Továbbá, mivel $|\mathbf{u}_q| = 1$, tehát

$$|P_q^0 \mathbf{y}|^2 = |P_{q-1}\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{u}_q^T \mathbf{y}|^2 - 2(\mathbf{u}_q^T \mathbf{y})\mathbf{u}_q(P_{q-1}^0 \mathbf{y}). \tag{3. 19}$$

Alkalmazzuk most a (2. 35) összefüggést:

$$\mathbf{u}_q^T (P_{q-1}^0 \mathbf{y}) = (P_{q-1}^0 \mathbf{u}_q)^T \mathbf{y} = \mathbf{u}_q^T \mathbf{y}. \tag{3.20}$$

Használjuk fel ezt (3. 19)-ben:

$$|P_q^0 \mathbf{y}|^2 = |P_{q-1}^0 \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{u}_q^T \mathbf{y}|^2. \tag{3.21}$$

Ebből következik, hogy

$$|P_q^0 \mathbf{y}| \leqq |P_{q-1}^0 \mathbf{y}| \leqq |\mathbf{y}|. \tag{3.22}$$

Tekintsük adottnak az $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_l$ normálvektorokat. Kiszámítandó $P_l^0$, az az operátor, amely a

$$Q_l = \{\mathbf{x} : \mathbf{n}_i^T \mathbf{x} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, l\}$$

altérbe vetít. A (2. 25) előállításból $P_1^0$-t azaz az első hipersíkba vetítő operátort megkaphatjuk. Most vesszük a megmaradt normálvektorok közül az elsőt, amely lineárisan független $\mathbf{n}_1$-től, és a (3. 17) rekurzióval képezzük $P_2^0$-t. A most fennmaradó normálvektorok közül veszünk egyet, amely az első két normálvektortól lineárisan független, és ismét alkalmazzuk az említett rekurziót. Az eljárást addig folytatjuk, amíg a lehető legtöbb lineárisan független normálvektort kiválasztottuk. Ekkor eljutottunk egy $P_{l'}^0$ vetítőoperátorhoz, amely tehát $l'$ számú hipersík közös részébe vetít. Be fogjuk bizonyítani, hogy ez az operátor egyben az összes említett hipersík közös részébe vetít.

9. LEMMA: *Legyen az $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_l$ normálvektorok közül az első $l'$ számú lineárisan független, de bármelyik további már legyen lineárisan összefüggő velük. Legyen továbbá $P_{l'}^0$ az első $l'$ számú hipersík közös részébe vetítő operátor és $\mathbf{y} \in E_m$ tetszőleges vektor. Ekkor*

$$\mathbf{n}_q^T (P_{l'}^0 \mathbf{y}) = 0 \qquad (q = 1, 2, \dots l', l'+1, \dots l). \tag{3.23}$$

BIZONYÍTÁS: $q = 1, 2, \dots, l'$-re $P_{l'}^0$ definíciójából következik az állítás. Legyen most $q > l'$. A 7. lemma miatt

$$|P_{l'}^0 \mathbf{n}_q| = 0.$$

Felhasználva (2. 35)-t,

$$\mathbf{n}_q^T(P_{l'}^0\mathbf{y})=(P_{l'}\mathbf{n}_q)^T(P_{l'}\mathbf{y})=0,$$

ami bizonyítandó volt.

Szükségünk lesz még a továbbiakban néhány egyszerű összefüggésre és lemmára. Elsőnek vizsgáljuk meg a többváltozós *Taylor*-formulát.

Legyen

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

olyan $m$ változós függvény egy $R$ konvex tartományban, amely minden $x_i$ szerint kétszer folytonosan differenciálható, és amelynek a parciális deriváltjai $R$-ben korlátosak. Ekkor felírhatjuk a *Taylor*-formulát:

$$F(\mathbf{x})=F(\mathbf{x}_0)+(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)+(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T C(x')(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \tag{3.24}$$

ahol

$\mathbf{x}_0 \in R$ tetszőleges pont,

$$g(\mathbf{x})=\nabla F(\mathbf{x})=\left\{\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_m}\right\},$$

és

$$C=\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}\right\}_{i,j=1,2,\ldots,m} \quad \text{matrix,} \quad \mathbf{x}'\in(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}).$$

Minthogy $F(\mathbf{x})$ második parciális deriváltjai korlátosak,

$$-\gamma|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2 \leqq (x-x_0)^T C(x')(x-x_0). \tag{3.25}$$

Legyen $\gamma=\gamma_m$ a legkisebb, amelyre a (3. 25) még teljesül.

6. DEFINÍCIÓ: Ha $A$ egy skalármatrix, akkor $A$ *normáján* a következőt értjük:

$$\|A\|=\max_{\mathbf{x}}\frac{|A\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}.\text{[6]}$$

Legyenek $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_q$ lineárisan függetlenek, ekkor $N_q^T N_q$ nemszinguláris, normája létezik, tehát van olyan $\gamma_v > 0$, melyre

$$\|(N_q^T N_q)^{-1}\| \leqq \gamma_v. \tag{3.26}$$

10. LEMMA: *A* (3. 26)-*t teljesítő* $\gamma_v$-*re fennáll a*

$$|P_{q-1}\mathbf{n}_q| \geqq \gamma_v^{-1/2} \tag{3.27}$$

*egyenlőtlenség.*

BIZONYÍTÁS: Ha $C$ egy tetszőleges matrix és $c_{ij}$ egyik eleme, akkor

$$|c_{ij}| \leqq \|C\|. \tag{3.28}$$

Tekintsük ugyanis azt az $\mathbf{x}_1$ vektort, amelynek $j$-edik koordinátája 1, a többi 0.

[6] Az $A$ matrix így definiált normája az egység hosszúságú vektorok képei közül a leghosszabb nagyságúval egyenlő. Ha $A$ valós szimmetrikus matrix, akkor $\|A\|$ nem más, mint a legnagyobb abszolút értékű sajátérték abszolút értéke.

Mivel $|\mathbf{x}_1|=1$, tehát

$$\|C\| \geqq |C\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_{kj}^2} \geqq \sqrt{c_{ij}^2} = |c_{ij}|.$$

Ezzel (3. 28)-at beláttuk. Legyenek $A$ és $A_1$ mint (3. 6) és (3. 7)-ben. $A^{-1}=(N_q^T N_q)^{-1}$-t particionáljuk úgy, mint (3. 3)-ban. Ekkor $A_0=|P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q|^2$. Mivel $B_4=A_0^{-1}$ eleme az $A^{-1}$ matrixnak, (3. 28) szerint és (3. 26) miatt

$$|A_0^{-1}| = \|A^{-1}\| \leqq \gamma_\nu,$$

azaz

$$[|P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q|^2]^{-1} \leqq \gamma_\nu,$$

amit átrendezve, azt kapjuk, hogy

$$|P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q| \geqq \gamma_\nu^{-1/2}.$$

Felhasználva (2. 25)-öt és (2. 27)-et,

$$|P_{q-1}\mathbf{n}_q| \geqq |P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q|,$$

s ezzel a lemma állítását igazoltuk.

11. LEMMA: *Legyen $Q$ a $\lambda_i(\mathbf{x})=\mathbf{n}_i^T\mathbf{x}-b_i=0$ $(i=1, 2, ..., q)$ hipersíkok közös része, és legyen $\mathbf{x}_0 \in Q$. Ekkor annak szükséges feltétele, hogy az*

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{z} \tag{3.29}$$

*pont benne legyen az*

$$R = \{\mathbf{x} : \lambda_i(\mathbf{x}) \geqq 0 \quad i=1, 2, \dots q, \dots, k\} \tag{3.30}$$

*tartományban, az, hogy*

$$N_q^T \mathbf{z} \geqq \mathbf{0} \tag{3.31}$$

*legyen.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel ugyanis, hogy ez nem teljesül. Ekkor legalább egy $i$-re $\mathbf{n}_i^T\mathbf{z}<0$, például $i=1$-re. Ekkor azonban

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_1^T(\mathbf{x}_0+\mathbf{z})-b_1=\mathbf{n}_1^T\mathbf{z}<0,$$

mivel

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_1^T\mathbf{x}_0-b_1=0,$$

a feltevés szerint ezzel igazoltuk a lemmát.

## 4. §. A kvázi-konkáv programozási feladat lineáris feltételek esetére

Legyen $R$ tartomány a (2. 5)-ben definiált félterek közös része, azaz

$$R=\{\mathbf{x} : \lambda_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{n}_i^T\mathbf{x}-b_i \geqq 0 \qquad i=1, 2, \dots k\}. \tag{4.1}$$

$R$ zárt és konvex tartomány, a határa

(4. 2) $\quad B = \{\mathbf{x}: \lambda_i(\mathbf{x}) = 0$ valamilyen $i$-re és $\lambda_i(\mathbf{x}) \geqq 0$ minden $i$-re$\}$.

Legyen továbbá

(4. 3) $$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

$m$-változós szigorúan kvázi-konkáv függvény, és jelöljük a gradiensét $g(\mathbf{x})$-el:

(4. 4) $$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv \nabla F(\mathbf{x}) = \left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_m}\right\}.$$

*Feladat:* Keresendő az $F(\mathbf{x})$ szigorúan kvázi-konkáv függvény maximuma az $R$ zárt konvex tartományban, és keresendő az az $x_0 \in R$ amelyre

(4. 5) $$F(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in R} F(\mathbf{x}).$$

A továbbiakban feltesszük, hogy ismerünk egy $\mathbf{x}_1 \in R$ [7] pontot, és ebből konstruálunk egy olyan konvergens $\mathbf{x}_i$ sorozatot, melyre

(4. 6) $$F(\mathbf{x}_1) < F(\mathbf{x}_2) < \ldots < F(x_n) < \ldots$$

kimutatjuk továbbá, hogy $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$, és erre az $x_0$-ra (4. 5) teljesül, azaz $\mathbf{x}_0$ pont optimális a feladatra nézve.

1. TÉTEL: *Legyen $\mathbf{x}_0$ pont az $R$ tartomány határán. $\mathbf{x}_0$ pontosan $q$ hipersíkon van rajta ($1 \leqq q \leqq m$), amelyekről feltesszük, hogy lineárisan függetlenek. (Normálvektoraik lineárisan függetlenek.) Nevezzük ezen síkok közös részét $Q$-nak, amely tehát a síkok lineáris függetlensége miatt $m-q$ dimenziós sokaság. Legyen továbbá $F(\mathbf{x})$ szigorúan kvázi-konkáv függvény, amelynek második parciális deriváltjai korlátosak $R$-ben. Ezenkívül $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$ esetén $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}_0 \neq 0$ legyen*[8]. *Ekkor annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az $F(\mathbf{x})$ függvény az $R$ tartománybeli maximumát az $\mathbf{x}_0$ pontban érje el, azaz, hogy az*

$$F(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in R} F(\mathbf{x})$$

*egyenlet teljesüljön, az hogy*

(4. 7) $$P_q^0 \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = 0$$

*és*

(4. 8) $$(N_q^T N_q)^{-1} N_q \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \leqq 0$$

*legyen.*

BIZONYÍTÁS: *Elégségesség.* (4. 7)-ből következik, $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ megadható a $Q$-t alkotó síkok normálvektorainak lineáris kombinációjaként. (Ugyanis $E_k = Q^\circ + \tilde{Q}$

[7] Sok esetben a gazdasági feladatnak ismerjük egy megoldását, ui. a jelenleg használatos program ilyen. Más esetekben $\mathbf{x}_1 = o$, megfelelő, ez ui. megfelel annak, hogy semmit sem termelünk. Ha nem ismeretes induló program, a lineáris programozásban ismert eljárással nyerhetünk egyet, ugyanis a feltételek itt is lineárisak.

[8] Ezt a kényelmetlen feltételt, valamint azt, hogy az $\mathbf{x}_0$-t tartalmazó síkok legyenek lineárisan függetlenek, ki fogjuk küszöbölni a módszer használata során.

ortogonális összeg, tehát $P_q^0 \mathbf{g}_0 = \mathbf{0}$ miatt $\mathbf{g}_0 \in \tilde{Q}$, $\tilde{Q}$ pedig az $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_q$ vektorok által kifeszített altér) azaz

(4. 9) $$\mathbf{g}_0 = \sum_{i=1}^{q} r_i \mathbf{n}_i = N_q \mathbf{r}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots r_q).$$

Mindkét oldalra alkalmazva az $(N_q^T N_q)^{-1} N_q^T$ operátort,

(4. 10) $$\mathbf{r} = (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T \mathbf{g}_0,$$

azaz (4. 8) miatt

(4. 11) $$\mathbf{r} \leqq \mathbf{0}.$$

Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}_0$ nem maximális pontja $F(\mathbf{x})$-nek $R$-ben, azaz létezik olyan $\mathbf{x}_1 \in R$, amelyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$. Most igazolni fogjuk, hogy ekkor

(4. 12) $$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}_0 > 0.$$

Avégből, hogy ezt belássuk, tekintsük az $F(\mathbf{x})$ függvényt az $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ vektor irányában, mint egydimenziós függvényt, azaz az

$$f(t) = F(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0))$$

függvényt mint $t$ függvényét. A 2. lemma után levő megjegyzés értelmében ez is kvázi-konkáv függvény. Mivel $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$, tehát $f(1) > f(0)$, következésképpen $f(t) > f(0)$ $(0 < t < 1)$, innen $f'(0) \geqq 0$, azaz $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}_0 \geqq 0$, ami összevetve a tétel feltevésével, mely szerint $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}_0 \neq 0$, a kívánt (4. 12)-t kapjuk.

Felhasználva $\mathbf{g}_0$ (4. 9) alakját, (4. 12)-ből következik, hogy

(4. 13) $$0 < \sum_{i=1}^{q} r_i [(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{n}_i].$$

A (3. 23) egyenlőtlenségből, mivel annak feltétele teljesül ($\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{z} \in R$) : $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{n}_i \geqq 0$ $(i = 1, \dots, q)$, innen és (4. 13)-ból kapjuk, hogy legalább egy $r_i > 0$, ami ellentmond (4. 11)-nek, tehát a tétel feltevése elégséges.

*Szükségesség.* Belátjuk, hogy a (4. 7) és (4. 8) feltételek szükségesek is. Legyen $q$ a (4. 10)-beli $\mathbf{r}$ vektor komponenseinek a száma. Tegyük fel egyszerűség kedvéért, hogy $r_q \geqq r_i$ $(i = 1, 2, \dots, q-1)$. Ha (4. 7) és (4. 8) közül nem mind a kettő teljesül, akkor két esetet különböztetünk meg:

I.

(4. 14) $$|P_q^0 \mathbf{g}_0| > \max \left\{0; \frac{1}{2} r_q \gamma_v^{-1/2}\right\}^9$$

[9] A tétel szükségesség részében nyilvánvaló, hogy az 1. és 2. alternatíva minden esetet tartalmaz, amikor a (4. 7) és (4. 8) nem mindegyike teljesül. Az 1. alternatívával az egész $|P_q^0 \mathbf{g}_0| < 0$ eset tárgyalható volna akkor is, ha $r_q > 0$ és $|P_q^0 \mathbf{g}_0| < \frac{1}{2} r_q \gamma_v^{-1/2}$. Ez utóbbi eset azonban a 2. alternatívába is beletartozik, és mivel ez kevesebb megszorítással dolgozik, ezzel célszerű számolni, amikor csak lehet. (A másik esetben $Q$ dimenziója változatlan vagy csökken; itt pedig növekszik.)

Mivel $|P_q^0 \mathbf{g}_0|>0$, $\mathbf{x}_0$ nem csúcs[10] ($R$-ben), azaz $q \leqq m \in 1$, tehát $Q$ legalább egydimenziós sokaság. Tekintsük a következő egységvektort:

$$\mathbf{z}=\frac{P_q^0 \mathbf{g}_0}{|P_q^0 \mathbf{g}_0|}. \tag{4.15}$$

Ekkor $N_q^T \mathbf{z}=\mathbf{0}$, mert $\mathbf{n}_i^T \mathbf{z}=0$ $(i=1, 2, \ldots, q)$, ugyanis $\mathbf{z} \in Q^\circ$, $\mathbf{n}_i \in \tilde{Q}$ és $Q^\circ+\tilde{Q}=E_m$. Az

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\tau \mathbf{z} \tag{4.16}$$

vektor minden $\tau$-ra $Q$-ban van, mert $\mathbf{x}_0$ és $\mathbf{z}$ $Q$-beliek, $Q$ pedig sokaság. Azonban $\mathbf{x}_0$ csak a $Q$-t létrehozó $q$ számú hipersíkban ($H_i$, $i=1, 2, \ldots, q$) van a feltétel szerint, és mivel lehetséges pont, $\lambda_i(\mathbf{x}_0) \geqq \delta>0$ $i=q+1, \ldots, k$. Ekkor a fennmaradó $k-q$ hipersík mindegyikére ($H_i$, $i=q+1, \ldots, k$) vagy létezik egy $\tau=\tau_i$, amellyel képezett (4. 16)-beli $\mathbf{x}$-re $\lambda_i(\mathbf{x})=0$, vagy az $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\tau \mathbf{z}$ minden $\tau$ esetére $\lambda_i(\mathbf{x})>0$. Azonban mivel $R$ korlátos, legalább egy pozitív és egy negatív $\tau_i$ létezik. A $\lambda_i(\mathbf{x}_0+\tau \mathbf{z})=0$ egyenletből

$$\tau_i=\frac{\lambda_i(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{z}^T \mathbf{n}_i}. \tag{4.17}$$

Mivel $|\mathbf{z}^T \mathbf{n}_i| \leqq 1$, $|\tau_i| \geqq \lambda_i(\mathbf{x}_0) \geqq \delta>0$ $(i=q+1, \ldots, k)$. Legyen $\tau_m$ a legkisebb pozitív $\tau_i$, azaz

$$\tau_m=\min\{\tau_i \geqq \delta\} \quad (i=q+1, \ldots, k). \tag{4.18}$$

Ez a $\tau_m$ reprezentálja azt a legnagyobb lépést, amit $\mathbf{x}_0$-ból $\mathbf{z}$ irányába tehetünk anélkül, hogy $R$-et elhagynánk. Innen bármely $\tau$-ra, melyre $0 \leqq \tau \leqq \tau_m$, $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\tau \mathbf{z} \in R$.

Avégből, hogy megmutassuk $F(\mathbf{x})>F(\mathbf{x}_0)$ teljesülését elég kicsiny $\tau$-ra tekintsük a következő egyenlőtlenséget, melyet (3. 24)-, (3. 25)- és (4. 16)-ból kaptunk:

$$\tau(\mathbf{z}^T \mathbf{g}_0)-\gamma \tau^2 \leqq F(\mathbf{x})-F(\mathbf{x}_0). \tag{4.19}$$

Tehát (2. 36), (4. 14) és (4. 15) figyelembevételével

$$\mathbf{z}^T \mathbf{g}_0=|P_q^0 g_0|. \tag{4.20}$$

Ezt visszaírva (4. 18)-ba,

$$\tau[|P_q^0 \mathbf{g}_0|-\gamma \tau] \leqq F(\mathbf{x})-F(\mathbf{x}_0). \tag{4.21}$$

Az $F$ függvény növekedésére vonatkozó alsó korlát a legnagyobb, ha $\tau=|P_q^0 \mathbf{g}_0|/2\gamma$:

$$\frac{|P_q \mathbf{g}^0|^2}{4\gamma} \leqq F(\mathbf{x})-F(\mathbf{x}_0). \tag{4.21'}$$

Legyen

$$\tau'=\min\{\tau_m, |P_q^0 \mathbf{g}_0|/2\gamma\} \geqq \min\{\delta, |P_q^0 \mathbf{g}_0|/2\gamma\}. \tag{4.22}$$

[10] Ugyanis $P_q^0$ $Q^0$-ba vetít, ha pedig $q=m$ volna, akkor az $m$ dimenziós térben $m$ számú lineárisan föggetlen sík közös része $Q^0$ csak egy pont. Bármely vektor vetítése $Q^0$-ba tehát null vektor, $|P_q^0 \mathbf{g}_0|>0$ lehetetlen volna.

Ekkor

$$(4.23)\qquad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \tau'\mathbf{z} \in R,$$

és

$$(4.24)\qquad \frac{1}{2}\tau' |P_q^0 \mathbf{g}_0| \leqq F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0).$$

II. Most tekintsük a második alternatívát: $r_q > 0$ $(r_q \geqq r_i,\ i = 1, \ldots, q-1)$,

$$(4.25)\qquad |P_q^0 \mathbf{g}_0| \leqq \frac{1}{2} r_q \gamma_v^{-1/2}.$$

Kimutatjuk, hogy található egy $R$-beli $\mathbf{x}_1$ pont, úgyhogy

$$(4.26)\qquad \frac{1}{4}\tau' r_q \gamma_v^{-1/2} \leqq F(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_0),$$

ahol

$$\tau' \geqq \min\left\{\delta, \frac{r_q}{4\gamma\, \gamma_v^{1/2}}\right\}.$$

Hogy ezt kimutassuk, hagyjuk el az $N_q$ matrixból $\mathbf{n}_q$-t. Így az $N_{q-1} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_{q-1}]$ $m \times (q-1)$-es matrixhoz jutunk. A megfelelő vetítőmatrixot jelöljük $P_{q-1}$-gyel. Tudjuk, hogy $P_{q-1}\mathbf{n}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$. Amint azt a 10. lemmában kimutattuk, a (3. 27) egyenlőtlenség teljesül $P_{q-1}\mathbf{n}_q$-ra. (2. 32)-ből, és abból a tényből, hogy $\mathbf{n}_i - \mathrm{k}$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ kifeszíti $\tilde{Q}$-ot következik, hogy

$$(4.27)\qquad \mathbf{g}_0 = \sum_{i=1}^{q} r_i \mathbf{n}_i + P_q^0 \mathbf{g}_0.$$

$Q$-t tartalmazza az az altér, amibe $P_q$ vetít, ezért

$$P_{q-1}^0 P_q^0 \mathbf{g}_0 = P_q^0 \mathbf{g}_0,$$

és (4. 27)-ből következőleg

$$P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0 = r_q P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q + P_q^0 \mathbf{g}_0.$$

A $|P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0|$ alsó korlátját megkapjuk (3. 27) és (4. 25) segítségével:

$$(4.28)\qquad |P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0| \geqq r_q |P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q| - |P_q^0 \mathbf{g}_0| \geqq \frac{1}{2} r_q \gamma_v^{-1/2}.$$

Továbbá, mivel $\mathbf{n}_q^T P_q^0 \mathbf{g}_0 = 0$ és $\mathbf{n}_q^T P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q = |P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q|^2$ (lásd (2. 36)) következik, hogy

$$\mathbf{n}_q^T P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0 = r_q |P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q|^2 > 0.$$

Legyen

$$(4.29)\qquad \mathbf{z} = \frac{P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0}{|P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0|}.$$

Ekkor $N_{q-1}^T \mathbf{z} = \mathbf{0}$ és $n_q^T \mathbf{z} > 0$, ezért az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \tau \mathbf{z}$ pont minden $\tau > 0$ esetén $H_i$-ben fekszik $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$ de nincsen $H_q$-ban.

Így a kívánt $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \tau' \mathbf{z} \in R$, teljesül, ahol

$$\tau' = \min \{\tau_m, |P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0|/2\gamma\}.$$

Itt természetesen $\tau_m = \min \{\tau_i > 0\}$ $(i = q, q+1, \ldots, k)$. Ennek belátása pontosan úgy történik, mint az I. részben. A kívánt (4. 26) azonnal következik (4. 24)-ből (4. 28) miatt. Természetesen (4. 24)-ben is $|P_q \mathbf{g}_0|$ helyett $|P_{q-1} \mathbf{g}_0|$-t kell vennünk.

2. TÉTEL: *Legyen* $\mathbf{x}_0$ *pont az* $R$ *tartomány belsejében és teljesüljenek az előző tétel feltevései. Ekkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az* $F(\mathbf{x})$ *függvény az* $R$ *tartománybeli maximumát* $\mathbf{x}_0$ *pontban érje el, az hogy*

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \tag{4. 30}$$

*legyen.*

BIZONYÍTÁS: Az *elégségesség* igazolásához tegyük fel, hogy (4. 30) teljesül, de mégis létezik olyan $\mathbf{x}_1 \in R$, amelyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$. Ekkor szó szerint megismételhető (4. 12) igazolása, ez azonban ellentmondás, mert $\mathbf{g}_0 = \mathbf{0}$ esetén $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}_0 = 0$.

A *szükségesség* bizonyítása ugyanúgy történik, mint az 1. tétel bizonyításában a szükségességnél található I. esetben, ugyanis ekkor $q = 0$, $P_q = I$ és $P_q^0 \mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_0$. Ha tehát $\mathbf{g}_0 \neq \mathbf{0}$, akkor $|\mathbf{g}_0| > 0$, tehát az ottani konstruktív bizonyítás egy olyan $\mathbf{x}_1$ pontot is szolgáltat, melyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$.

Az 1. és 2. tétel szerint egy tetszőleges $\mathbf{x}_0 \in R$ vagy optimális pont, azaz az $F(\mathbf{x})$ függvény az $\mathbf{x}_0$ pontban veszi fel az $R$-beli maximumát — ekkor megoldottuk feladatunkat — vagy található egy $\mathbf{x}_1 \in R$ pont, amelyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$. A tételek bizonyításai konstruktívak, tehát egyben módszert is szolgáltatnak egyre jobb program keresésére. Igazolni kell még, hogy az eljárás konvergens, ezenkívül a 1. tételben szereplő kényelmetlen feltételektől is meg akarunk szabadulni. Erre szolgál az alábbi tétel, és az azt követő megjegyzések.

3. TÉTEL: *Legyen* $\mathbf{x}_0$ *tetszőleges pont R-ben és legyen az* $\{\mathbf{x}_i\}$ *sorozat a következőképpen definiálva:*

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \tau_i' \mathbf{z}_i \qquad (i = 0, 1, \ldots),$$

*ahol* $\mathbf{z}_i$ *és* $\tau_i'$ *az* 1. *és* 2. *tétel bizonyításának „szükségesség" részéből az i-edik lépésben kapott* $\mathbf{z}$ *és* $\tau_i$.

*Ekkor az* $\{\mathbf{x}_i\}$ *sorozathoz tartozó* $\{F(\mathbf{x}_i)\} \equiv \{F_i\}$ *sorozat szigorúan növekedő, és*

a) *vagy véges sok tagból áll, véget ér* $F_N$*-nél, ekkor* $\mathbf{x}_N$ *optimális pont, azaz* $F(\mathbf{x})$*-nek az R-beli maximuma* $F_N$,

b) *vagy az* $\{F_i\}$ *sorozat végtelen, ekkor konvergens sorozatot alkot, melynek határértéke,* $F_{\max}$, *egyben* $F(\mathbf{x})$*-nek az R-ben felvett legnagyobb értéke, és a megfelelő* $\{\mathbf{x}_i\}$ *sorozat is konvergens. Az* $\{x_i\}$ *sorozat határértékét* $\mathbf{x}^*$*-gal jelölve igaz az, hogy*

$$F_{\max} = F(\mathbf{x}^*).$$

BIZONYÍTÁS: A következő jelöléseket fogjuk használni $\varrho = \max \{0, r_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$, ahol $r_j$ a (4. 9) -ben szereplő $\mathbf{r}$ komponensei, $P^\circ \mathbf{g}_i = P_q^0 \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)$, $\delta$ pedig a (4. 18)-ban is szereplő alsó korlát.

$$(4.31)\qquad \psi_i = \max\left\{\min\left[\frac{|P^0 g_i|^2}{4\gamma}, \frac{\delta|P^0 g_i|}{2}\right], \min\left[\frac{\varrho_i^2}{16\gamma\,\gamma_\nu}, \frac{\delta\varrho_i}{4\sqrt{\gamma_\nu}}\right]\right\} \geqq 0.$$

Az 1. tétel miatt

$$(4.32)\qquad F_{i+1} - F_i \geqq \psi_i \qquad (i=0, 1, \ldots).$$

A $\{F_i\}$ sorozat tehát valóban szigorúan növekedő, mert $\psi_i \geqq 0$ és $\psi_N = 0$ esetén $F_N$ az $F(\mathbf{x})$ függvény $R$-beli maximuma, ugyanis ekkor $P^0_{g_N} = \varrho_N = 0$. Azonban $i < N$ esetén $\psi_i > 0$, mert ha valamely $k < N$ esetén $\psi_k = 0$ volna, akkor már $F_k$-val véget érne a sorozat. A tétel állításának a) részét és a sorozat szigorú növekedését ezzel beláttuk.

Ha az $\{F_i\}$ sorozat végtelen, létezik határértéke — jelöljük $F_{\max}$-al — mert egy monoton növekedő korlátos sorozatnak mindig van határértéke. A (4. 32) egyenlőtlenségeket összeadva,

$$(4.33)\qquad F_{\max} - F_0 \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i .$$

Ebből következik, hogy $\lim\limits_{i\to\infty} \psi_i = 0$, azaz, hogy az $F_{\max}$-hoz tartozó $\psi$ — a $\{\psi_i\}$ sorozat határértéke — 0, tehát a 1. tétel szerint $F_{\max}$ az $F(\mathbf{x})$ függvény $R$-beli maximuma ahogy állítottuk. Azt kell még igazolnunk, hogy az $F_i$-hez tartozó $\{\mathbf{x}_i\}$ sorozat konvergens. Mivel az $R$ halmaz korlátos, ez csak úgy lehetséges, hogy az $\{\mathbf{x}_i\}$ sorozatnak legalább két torlódási pontja van: $\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{**}$. Válasszunk ki az $\{\mathbf{x}_i\}$ sorozatból egy $\mathbf{x}^*$-hoz és egy $\mathbf{x}^{**}$-hoz konvergáló részsorozatot:

$$\lim_{\nu\to\infty} x_{i_\nu} = \mathbf{x}^* \qquad \lim_{\mu\to\infty} x_{j_\mu} = x^{**}.$$

Mivel az $\{F_i\}$ sorozat monoton növekedő, konvergens és határértéke $F_{\max}$, következőleg

$$F(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}^{**}) = F_{\max}.$$

Azonban $F(\mathbf{x})$ a feltevés szerint szigorúan kvázi-konkáv függvény, tehát az $F(\mathbf{x})$ függvény az $R$-beli maximumát csak egy helyen érheti el, (lásd: 3. lemma), tehát $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{**}$ azaz az $\{\mathbf{x}_i\}$ sorozat konvergens és $F(\mathbf{x}^*) = F_{\max}$, amivel a tétel minden állítását igazoltuk.

*Megjegyzések:*

1. Az 1. tételben szerepel az a feltétel, hogy az $\mathbf{x}_0 \in R$ pontot tartalmazó síkok lineárisan függetlenek legyenek. Ettől a feltételtől könnyen megszabadulhatunk. Tegyük fel ugyanis, hogy az $\mathbf{x}_0$ pontot a $q$ lineárisan független síkon kívül még $p$ ezektől lineárisan függő sík is tartalmazza. A (4. 7) és (4. 8) feltételek változatlanul elégségesek, ha ezek bármely $\mathbf{x}_0$-t tartalmazó lineárisan független síkrendszerre teljesülnek — csak ezt használtuk ki — akkor $\mathbf{x}_0$ pont optimális.

A (4. 7) és (4. 8) szükségességének vizsgálatakor két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha $|P^0_q \mathbf{g}_0| > 0$, akkor a (4. 15)-beli $\mathbf{z}$ megfelelő, mert $\mathbf{x}_0$ benne van mind a $p+q$ hipersíkban, tehát $N^T_{q+p}\mathbf{z} = \mathbf{0}$ mint a „szükségesség" I. részében, tehát a további következtetések is érvényesek, található $\mathbf{x}_1$ melyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$. Nehezebb a helyzet a másik esetben, amikor $|P^0_q \mathbf{g}_0| = 0$ és legalább egy $r_i > 0$. Legyen pl. $i = q$, azaz

$r_q > 0$. Számítsuk ki ekkor a (4. 29)-beli $\mathbf{z}$-t. Erre adódik ugyanúgy mint ott, hogy $N_{q-1}^T \mathbf{z} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{n}_q^T \mathbf{z} > 0$. A legtöbb esetben teljesül, hogy

$$\mathbf{n}_i^T \mathbf{z} \geqq 0 \qquad (i = q+1, \ldots q+p), \tag{4. 34}$$

amikor is $\mathbf{z}$ ismét megfelelő. Előfordul azonban, hogy a (4. 34) szorzatok közül valamelyik negatív (azaz $\mathbf{z}$ nem lehetséges pont, mert a megfelelő $\mathbf{n}_i$ normálvektorú sík kívánt félterében nincs benne, így az $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \tau \mathbf{z}$ pont sem lehetséges pont). Ekkor az eljárást a következőképpen módosíthatjuk:

Egy egyszerű lineáris programozási problémát kell megoldanunk $q$ változóval és $q+p$ megszorítással. A $H_{q+1}$ síkbeli $b_{q+1}$-et helyettesítsük $b'_{q+1} = b_{q+1} + \varepsilon$-nal, hasonlóan a $b_{q+2}$-t. $b'_{q+2} = b_{q+2} + \varepsilon^2$-tel stb., ahol $\varepsilon$ tetszőleges kicsi pozitív szám. A $q+p$ számú hipersík meghatároz egy $R^*$ konvex poliédert, melynek $\mathbf{x}_0$ egy csúcsa. $\mathbf{g}_0$ egy konstans vektor. Valamilyen lineáris programozási eljárással (vagy a gradiens vetítési módszerrel), vagy meghatározható oly $\mathbf{z}$, amelyre $N_{q+p}^T \mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{z}'\mathbf{g} > 0$ ekkor $\varepsilon \to 0$ segítségével egy megfelelő $\mathbf{z}$-hez jutunk, vagy kimutatjuk, hogy ilyen $\mathbf{z}$ nincs, azaz $\mathbf{x}_0$ optimális pont.

(Ha a fenti $\mathbf{z}$ kereséskor $\max \mathbf{z}^T g_0$-t határozzuk meg, akkor az eljárás teljes. Elég azonban egy olyan $\mathbf{z}$ is — ha van ilyen — amelyre kimutathatjuk, hogy $\mathbf{z}^T \mathbf{g}_0 > 0$ minden $\varepsilon$-ra, és még az $\varepsilon \to 0$ esetben vett határértéke is pozitív.)

2. A 1. tételben szerepel az a feltevés, hogy $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$ esetén $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \neq 0$, azaz ha $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = 0$ (az $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ iránymenti derivált) akkor az $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ irányban nincs olyan $\mathbf{x}'_1$ pont, amelyre $F(\mathbf{x}'_1) > F(\mathbf{x}_0)$ volna. (Természetesen ez a $-(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$ irányban is igaz.)

Ha ez a feltétel nem teljesül, az szemléletesen azt jelenti, hogy van olyan irány, amely mentén haladva egy olyan egydimenziós inflexiós pont van, ahol az első iránymenti derivált zérus. Ekkor a fent leírt eljárást módosítani kell, ugyanis ekkor a (4. 7) és (4. 8) feltételek már nem elégségesek $\mathbf{x}_0$ optimalitásához. (Természetesen továbbra is szükségesek.) Ha a feltételek nem teljesülnek, az eljárás továbbra is szolgáltat egy pontot, amelyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$. Ha azonban teljesülnek a feltételek egy $\mathbf{x}_0$ pontra, abból még nem következik $\mathbf{x}_0$ optimalitása. Ekkor tehát találnunk kell valamilyen eljárást, amelynek segítségével vagy egy olyan $\mathbf{x}_1$ ponthoz jutunk, amelyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_2)$, vagy kitűnik, hogy $\mathbf{x}_0$ optimális. Az alábbiakban vázolva megemlítünk néhány ilyen módszert, egy későbbi cikkben erre még részletesen visszatérek.

a) Kérdés, hogy az $\mathbf{x}_0$ pont tetszőleges kicsi környezetében ($R$-ben) van-e olyan $\mathbf{z}$ pont, amelyben a $\mathbf{z} - \mathbf{x}_0$ irányba vett iránymenti derivált nem negatív. Ha nincs, akkor $\mathbf{x}_0$ optimális. Ha van, akkor $F(\mathbf{z}) > F(\mathbf{x}_0)$. Ha $\mathbf{x}_0$ $R$ határán van, akkor csak $R$-beli $\mathbf{z}$-kre végezzük a fenti eljárást, azaz olyanokra, melyekre $(\mathbf{z} - \mathbf{x}_0)\mathbf{n}_i \geqq 0$, ha $\mathbf{n}_i \in \tilde{Q}$. (Ez a feltevés azért elegendő, mert ha egy $\mathbf{z}$-re teljesül a fenti kritérium, akkor $F(\mathbf{x})$ kvázi-konkávitása miatt az egész $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z})$ intervallum minden pontjára is teljesül.)

b) Ha van olyan $\alpha$ irány, amelyben az első nem zérus iránymenti derivált páratlan rendű, akkor vagy $\alpha$ vagy $-\alpha$ irányban a függvény növekszik, ellenkező esetben $\mathbf{x}_0$ optimális. Ha $\mathbf{x}_0$ a határon van, akkor csak azon $\alpha$ irányokat vesszük számításba, amelyek $R$-be mutatnak, azaz $\alpha \mathbf{n}_i \geqq 0$, ha $\mathbf{n}_i \in \tilde{Q}$. Ekkor azonban azt kell megkívánnunk, hogy az $\alpha$ iránymenti első nem zérus derivált páratlan rendű és pozitív legyen. Ha ilyen $\alpha$ nincs, az optimumnál vagyunk, ha van, elég kis $\alpha$ irányba való elmozdulással eljutunk egy olyan $\mathbf{x}_1$ ponthoz, melyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$.

c) Módosíthatjuk az $F(\mathbf{x})$ függvényt oly módon, hogy a zérus iránymenti deriváltak pozitívba menjenek át, pl. a $\Sigma \varepsilon^i x_i$ hozzáadásával, vagy más módon. Itt azonban több probléma lép fel. Állandó jellegű módosítást nem tehetünk, mert ekkor elromolhat a kvázi-konkávitás, és a konvergencia. A változtatás csak arra szolgál, hogy keressünk egy olyan pontot, ahol a függvényérték nagyobb, vagy igazoljuk, hogy ilyen nincs. Ez a módszer egydimenziós vizsgálatokra vezethető vissza ismét az iránymenti deriváltak segítségével.

3. A (4. 22)-ben leírt $\tau'$ nem biztos, hogy a legjobb; előfordulhat, hogy a $\mathbf{z}$ irányban más távolságban elmenve nagyobb függvényértékhez jutunk. Meg kell tehát határoznunk az $F(\mathbf{x}_0 + \tau\mathbf{z})$ függvény, mint $\tau$ függvényének maximumát a $0 < \tau \leqq \tau_m$ intervallumban. Ez a sokszor könnyen megoldható javítás erősen meggyorsíthatja a konvergenciát.

## 5. §. Algoritmus a feladat megoldására

A 4. §. elején leírt feladat megoldására egy olyan algoritmust adunk, amely felhasználja a 4. §-beli tételek eredményeit, sőt több helyen a közbülső lépéseket is.

Az algoritmusban használt $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ definíciója (4. 4)-ben, a $P_q^0$ vetítőmatrix előállítása pedig (2. 21)-ben található.

Ha ismeretes egy $\mathbf{x}_0$ lehetséges pont, akkor $\mathbf{x}_\nu = \mathbf{x}_0$-val kezdve az alábbi iteratív eljárás alkalmazható:

1. Számítsuk ki $\mathbf{g}_\nu = \mathbf{g}(\mathbf{x}_\nu)$-t és $P_q^0\mathbf{g}(\mathbf{x}_\nu)$-t. Ha $P_q^0\mathbf{g}_\nu = 0$ és $\mathbf{r} \leqq \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{r}$ a (4. 10)-beli vektor, akkor $\mathbf{x}_\nu$ optimális (1. tétel).

2. Ha $|P_q^0\mathbf{g}_\nu|$ kielégíti (4. 14)-et, számítsuk ki $\mathbf{z}$-t (4. 15)-ből. Ha $|P_q^0\mathbf{g}_\nu|$ kielégíti (4. 25)-öt, ahol $r_q = \max\{r_i\} > 0$, hagyjuk el $H_q$-t $Q$-ból, vegyük most $N_{q-1}$-et és a megfelelő $P_{q-1}$-et. Számítsuk ki $\mathbf{z}$-t (4. 29)-ből.

3. Számítsuk ki $\tau_m$-t (4. 17)- és (4. 18)-ból, felhasználva a 2-ben kapott $\mathbf{z}$-t. Legyen $\mathbf{x}'_{\nu+1} = \mathbf{x}_\nu + \tau_m\mathbf{z}$.

4. Számítsuk ki $g_{\nu+1}' = g(x'_{\nu+1})$-et. Ha $z^T g'_{\nu+1} \geqq 0$, akkor legyen $x_{\nu+1} = x'_{\nu+1}$ és $Q$-hoz vegyük hozzá a (4. 18)-beli $\min \tau_i$-nek megfelelő $H_i$-t.

5. Ha $z^T g'_{\nu+1} < 0$ [11], legyen

$$\varrho = \mathbf{z}^T\mathbf{g}_\nu / (\mathbf{z}^T\mathbf{g}_\nu - \mathbf{z}^T\mathbf{g}'_{\nu+1}) \tag{5. 1}$$

és

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \varrho\mathbf{x}'_{\nu+1} + (1-\varrho)\mathbf{x}_\nu . \tag{5.2}$$

A síkok közös része $Q$ ekkor változatlan marad.

Ez az algoritmus egy $\mathbf{x}_\nu \in R$ ponthoz, ha az nem optimális megad egy olyan $\mathbf{x}_{\nu+1}$ pontot, amelyben az $F(\mathbf{x})$ értéke nagyobb, mint $\mathbf{x}_\nu$-ben. Ez az eljárás vagy végetér egy $\mathbf{x}_0$ pontnál, akkor $\mathbf{x}_0$ pont optimális, $F(\mathbf{x}_0)$ az $F(\mathbf{x})$ függvény $R$-beli maximuma,vagy egy konvergens $\{\mathbf{x}_\nu\}$ sorozatot szolgáltat, melynek határértéke a kívánt $\mathbf{x}_0$ optimális pont. (3. tétel.)

[11] $\mathbf{x}_\nu$-ből, ahol pozitív volt az iránymenti derivált, eljutottunk egy olyan $\mathbf{x}'_{\nu+1}$ pontba, ahol már negatív az iránymenti derivált, tehát közben valahol nulla is. Ezt a pontot $\mathbf{x}_{\nu+1}$-gyel jelöltük. $\mathbf{x}_\nu$ és $\mathbf{x}_{\nu+1}$ között $F(\mathbf{x})$ iránymenti deriváltja $(\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu$ irányban) pozitív $F(\mathbf{x})$ konkávitása miatt, tehát $F(\mathbf{x}_{\nu+1}) > F(\mathbf{x}_\nu)$.

## IRODALOM


[1] K. J. ARROW—A. C. ENTHOVEN: Qusai-Concave programming, *Econometrica* **29** (1961) 778—800.

[2] K. J. ARROW—L. HURWITZ—H. UZAWA: Constraint Qalifications in Maximization Problems, *Naval Research Logistics Quarterly* **8** (1961) 175—191.

[3] E. BODEWIG: *Matrix Calculus*, New York, 1956., 36—38. o.

[4] T. N. E. GREVILLE: Some Applications of the pseudoinverse of a matrix, *Siam Review*, 1960, No 2. 15—22.

[5] KARLIN: *Mathematical methods and Theory in Games, Programming and Economics*, Oxford, 1959., Nonlinear Programming, 199—242. o.

[6] H. W. KUHN—A. W. TUCKER: Nonlinear programming, *Proceedings of Second Berkeley Symposium*, 1950, 481—492. o.

[7] M. LOTKIN—R. REMAGE: Scaling and error analysis for matrix inversion by partitioning, *Ann. Math. Statist.* **24** (1953) 428—439.

[8] J. B. ROSEN: The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Part I., Linear Contrains. *J. Soc. Indust: Appl. Math.* **8** (1960) 181—217.

[9] J. B. ROSEN: The Gradient Projection Method for Nonlinear programming. Part II. Nonlinear Costrains., *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **9** (1961) 514—532.

[10] K. J. ARROW, L. HURWITZ, H. UZAWA: *Studies in Linear and Nonlinear Programming*. Stanford, California, 1958.

[11] P. WOLFE: The simplex method for quadratic programming. *Econometrica* **27** (1959) 382—398. o. (magyar fordítása: MTA III. Oszt. Közl. **10** (1960) 373—391).


(Beérkezett: 1963. III. 1.)

# A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

## KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEKRŐL (III)*

Írta: A. Sz. KRONROD

### III. fejezet

### SÍKBELI VARIÁCIÓ

A variáció fogalmának jelentős számú különböző általánosítása ismeretes a kétváltozós folytonos függvények esetére; ezek alapjában véve megtartják a variációfunkcionált mint teljesen additív halmazfüggvényt jellemző tulajdonságokat. A legelfogadottabb, úgy látszik, a következő, TONELLItől származó definíció (lásd [6]).

21. definíció. Legyen $f(x, y)$ az $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ téglalapon értelmezett kétváltozós függvény. Jelentse $f_{x_0}(y)$ és $f_{y_0}(x)$ az

$$f_{x_0}(y) = f(x_0, y), \qquad f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$$

egyváltozós függvényeket. Legyen

$$V_T(f) = \int_a^b V_y(f_{x_0}) dx_0 + \int_c^d V_x(f_{y_0}) dy_0,$$

ahol $V_y(f_{x_0})$ és $V_x(f_{y_0})$ az $f_{x_0}(y), f_{y_0}(x)$ egyváltozós függvényeknek a $[c, d]$, ill. $[a, b]$ szakaszon vett közönséges variációját jelenti.

A $V_T(f)$ számot az *$f(x, y)$ függvény Tonelli-féle variációjának* nevezzük.

*A Tonelli-féle variáció korlátossága maga után vonja az $f(x, y)$ függvény approximatív teljes differenciáljának majdnem mindenütt való létezését.*

A $V_T(f)$ funkcionál félig additív:

$$V_T(f + \varphi) \leqq V_T(f) + V_T(\varphi).$$

A *Tonelli*-féle variációfogalom hiányosságai elég nyilvánvalók. Véleményem szerint a legfontosabb az, hogy a *Tonelli*-féle variációnak nincs közvetlen geometriai jelentése; ez a körülmény többek között abban nyilvánul meg, hogy a *Tonelli*-féle variáció nem invariáns a koordinátatengelyek megváltoztatásával szemben, ami megnehezíti a variációnak mint halmazfüggvénynek fogalmára való áttérést. Másrészt lehetetlenné válik a variáció átvitele felületeken értelmezett függvényekre.

Ebben a fejezetben bevezetjük a *síkbeli variáció* fogalmát. Ez a függvénynek általában véve ugyanazokat a tulajdonságait tükrözi vissza, mint a *Tonelli*-féle

* Успехи Математических Наук, Том V, Выпуск 1 (35), 24—134. A fordítás első része az *MTA III. Osztály Közleményei* **12** (1962) 361—386. oldalán, a második része ugyane lap **13** (1963) 65—104. oldalán jelent meg.

A most közölt rész a cikk még hátralevő III. és IV. fejezetét tartalmazza. A Függelék című fejezet és az irodalomjegyzék a fordítás első részében található.

variáció, de már invariáns a koordinátatengelyek megváltoztatásával szemben. *Folytonosan differenciálható függvény esetében a síkbeli variáció egyszerűen kifejezhető analitikusan: egyenlő a gradiens abszolút értékének kettős integráljával.*

Ugyanakkor a síkbeli variáció fogalma változtatás nélkül alkalmazható olyan függvényekre, amelyek tetszés szerinti felületen vannak értelmezve. A síkbeli variáció egyúttal hasznos eszköznek bizonyul a korlátos felszínű felületek szerkezetének tanulmányozásánál.

## 1. §. A síkbeli variáció definíciója. A síkbeli variációnak mint teljesen additív halmazfüggvénynek tulajdonságai

Legyen $F(\eta)$ a $J$ tartományon értelmezett, folytonos függvény.

Nevezzük *az $F(\eta)$ függvény $W(F)$ síkbeli variációjának a*

$$W(F)=\int_{-\infty}^{+\infty} v(E_t)\,dt$$

*számot*, ahol $v(S)$ az $S$ halmaz *Hausdorff*-féle lineáris mértéke (lásd I. fej. 4. §), $E_t$ pedig nívóhalmaz. Az integrál mint *Lebesgue*-féle külső integrál képezendő. A továbbiakban (45. segédtétel) be fogjuk bizonyítani, hogy $v(E_t)$ mint $t$ függvénye mérhető és így a külső integrált majd egyszerűen *Lebesgue*-integrállal helyettesíthetjük.

Értelmezzük továbbá a $J$ tartományon folytonos $F(\eta)$ függvény tetszés szerinti, $J$-ben fekvő $M$ *Borel*-halmazon vett $W(F, M)$ síkbeli variációját a következőképpen:

$$W(F, M)=\int_{-\infty}^{+\infty} v(E_t\cap M)\,dt,$$

ahol az integrál az előbbiekhez hasonlóan mint *Lebesgue*-féle külső integrál képezendő. Meg fogjuk mutatni, hogy a) $v(E_t)$ mint $t$ függvénye mérhető b) ha $W(F)<+\infty$, akkor bármely $M$ *Borel*-halmazra $v(E_t\cap M)$ mint $t$ függvénye mérhető és a $W(F, M)$ függvény teljesen additív a *Borel*-halmazok osztályán.

43. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $R_1, \dots, R_n, \dots$ $J$-ben fekvő halmazoknak egy sorozata, és $S, d$ pozitív számok. Tegyük fel, hogy bármely, $d$-nél nem kisebb átmérőjű nyílt körlemezekből álló $\sigma_n$ rendszerre, amely befedi az $R_n$ halmazt, az átmérők összege legalább $S$. Legyen továbbá $R=\bigcap_n R_n$. Akkor bármely, nyílt körlemezekből álló és az $R$ halmazt befedő $\sigma$ rendszer körei átmérőinek összege legalább $S$, ha mindegyik kör átmérője legalább $d$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\sigma$ nyílt és $d$-nél nem kisebb átmérőjű körlemezekből álló rendszer, amely befedi az $R$ halmazt. Akkor elég nagy $n$-re a $\sigma$ kör-rendszer az $R_n$ halmazt is befedi. Ebből következik a segédtétel állítása.

44. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ valamely négyzeten értelmezett folytonos függvény. Legyen $D\subset J$ tetszés szerinti zárt halmaz. Akkor a $v(E_t\cap D)$ függvény Borel-mérhető és így Lebesgue szerint is mérhető.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $A \geqq 0$ tetszés szerinti szám. Vezessük be a $T_A = \underset{t}{E}\{v(E_t \cap D) \geqq A\}$ jelölést és vizsgáljuk meg e halmaz deskriptív természetét. E célból képezzük azoknak a $t$ pontoknak a $T(\varrho, A)$ halmazát, amelyekre $E_t$ olyan tulajdonságú, hogy az $E_t \cap D$ halmaz bármely, $\varrho$-nál nem kisebb átmérőjű körökkel való befedésénél az átmérők összege legalább $A$. Megmutatjuk, hogy a $T(\varrho, A)$ halmaz zárt. Valóban, legyen $\{t_n\}$ a $T(\varrho, A)$ halmazhoz tartozó pontokból álló konvergens sorozat és $t_0 = \lim_n t_n$. Tekintsük az $\overline{\mathrm{lt}}_n (E_{t_n} \cap D) = E^*$ halmazt.

Minthogy a $D$ halmaz zárt és az $F$ függvény folytonos, fennáll $E^* \subset E_{t_0} \cap D$. De a 43. segédtétel szerint az $E^*$ halmaz $\varrho$-nál nem kisebb átmérőjű körökkel való bármely lefedésénél az átmérők hosszúságának összege legalább $A$. Következésképpen ez még inkább fennáll az $E_{t_0} \cap D$ halmazra, tehát $t_0 \in T(\varrho, A)$.

De

$$T_A = \prod_r \prod_k T\left(\frac{1}{k}, A - \frac{1}{r}\right),$$

amivel a $v(E_t)$ függvény *Borel*-mérhetőségét bebizonyítottuk.

A 44. segédtételből kapjuk a következőt.

45. SEGÉDTÉTEL *(a $v(E_t)$ függvény mérhetőségéről). Legyen $F(\eta)$ a $J$ tartományon folytonos függvény. Akkor az a $v(t)$ függvény, amely minden $t$ pontban az $E_t$ halmaz Hausdorff-féle lineáris mértékével egyenlő, Borel-mérhető és így Lebesgue szerint is mérhető.*

A 44. segédtétel felhasználásával nehézség nélkül bebizonyíthatjuk a $v(E_t \cap M)$ függvény mérhetőségét tetszés szerinti *Borel*-halmaz esetén, fel kell azonban tenni, hogy $W(F) < +\infty$.

24. TÉTEL *(a $v(E_t \cap M)$ függvény mérhetőségéről). Legyen $F(\eta)$ a szokásos $J$ tartományon értelmezett folytonos függvény, $M \subset J$ tetszés szerinti Borel-halmaz és $W(F) < +\infty$. Akkor a $v(E_t \cap M)$ függvény mint $t$ függvénye Borel-mérhető.*

BIZONYÍTÁS. A bizonyítást arra az esetre végezzük el, amikor $J$ négyzet. A gömbfelület esetére való áttérés triviális.

1°. Megmutatjuk, hogy ha $R$ valamely szakasz, akkor $v(E_t \cap R) = 0$ majdnem minden $t$-re. Ez abból következik, hogy szakaszon elhelyezkedő halmaz *Hausdorff*-féle lineáris mértéke megegyezik a közönséges *Lebesgue*-mértékkel, és így az $R$ szakaszon az egymást nem metsző $E_t \cap R$ halmazok közül legfeljebb megszámlálhatóan soknak lehet pozitív mértéke.

2°. Ha $G$ *nyílt halmaz*, akkor $v(E_t \cap G)$ *Borel-mérhető függvény*. Valóban, $G$ előállítható megszámlálhatóan sok $G_n$ négyzet összegeként, amelyek csak megszámlálhatóan sok $R_m$ szakaszban metszik egymást. Akkor a lineáris mértéknek a *Borel*-halmazok osztályán való teljes additivitásáról szóló tétel szerint

$$v(E_t \cap G) = \sum_n v(E_t \cap G_n) - v(E_t \cap \sum_m R_m),$$

vagyis mivel $v(E_t \cap \sum_m R_m) \neq 0$ legfeljebb megszámlálhatóan sok $t$ értékre áll fenn, a $v(E_t \cap G)$ függvény legfeljebb megszámlálhatóan sok $t$-re különbözik a $\sum_n v(E_t \cap G_n)$ *Borel*-mérhető függvénytől, tehát maga is *Borel*-mérhető.

Megjegyezzük, hogy $\nu(E_t \cap G)$ mérhetőségének bizonyításához sehol sem használtuk fel a $W(F)$ variáció korlátosságát.

3°. Tegyük fel, hogy a $\nu(E_t \cap M)$ függvény *Borel*-mérhetőségét bebizonyítottuk minden $\beta < \alpha$ osztályú $M$ *Borel*-halmazra. Megmutatjuk, hogy az $\alpha$-dik osztályba tartozó $M$ *Borel*-halmazra is $\nu(E_t \cap M)$ *Borel*-mérhető.

Legyen $M = \sum_n M_n$, ahol az $M_n$ halmazok $\alpha$-nál kisebb indexű *Borel*-osztályokhoz tartoznak. Elég azt az esetet tekintenünk, amikor az $M_i \cap M_j$ halmazok $\alpha$-nál kisebb indexű *Borel*-osztályokhoz tartoznak. Mindegyik $\nu[E_t \cap (M_n - M_{n-1})]$ függvény mérhető. Valóban, $M_n - M_{n-1} = M_n - M_n \cap M_{n-1}$. Minthogy a $\nu(E_t \cap M_n)$, $\nu(E_t \cap M_{n-1})$ függvények mérhetők és majdnem mindenütt végesek, a $\nu[E_t \cap (M_n - M_{n-1})] = \nu(E_t \cap M_n) - \nu(E_t \cap M_{n-1})$ függvény mérhető, ennélfogva mérhető a $\nu(E_t \cap M) = \sum_n \nu[E_t \cap (M_n - M_{n-1})]$ függvény is. Most tegyük fel, hogy $M = \prod_n M_n$, ahol az $M_n$ halmazok $\alpha$-nál kisebb indexű *Borel*-osztályokhoz tartoznak. Vezessük be az $N = CM$, $N_n = CM_n$ jelöléseket. Mindegyik $N_n$ halmaz $\alpha$-nál kisebb indexű *Borel*-osztályhoz tartozik, következésképpen a $\nu(E_t \cap N) = \sum_n \nu[E_t \cap (N_n - N_{n-1})]$ függvény mérhető. De $\nu(E_t \cap M) = \nu(E_t) - \nu(E_t \cap N)$ majdnem mindenütt (mindenütt, ahol $\nu(E_t)$ véges) és ily módon $\nu(E_t \cap M)$ mérhető függvény.

Minthogy $\nu(E_t \cap M)$ mérhetőségét arra az esetre, amikor az $M$ halmaz nyílt vagy zárt, bebizonyítottuk (a 44. segédtételben és a 2° pontban), tételünket bebizonyítottuk.

A 45. segédtétel alapján a

$$W(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(t)\,dt$$

definícióban az integrálon most közönséges *Lebesgue*-integrált érthetünk; ugyanez vonatkozik $W(F, M)$-re is abban az esetben, amikor az $F(\eta)$ függvény síkbeli variációja korlátos, vagyis $W(F) < +\infty$.

Felhasználva $\nu(E_t \cap M)$-nek mint $t$ függvényének bizonyított mérhetőségét minden $M$ *Borel*-halmazra, triviális módon be fogjuk bizonyítani a $W(F, M)$ variációnak mint az $M$ *Borel*-halmaz függvényének teljes additivitását.

25. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a $J$ tartományon folytonos, korlátos síkbeli variációjú függvény. Akkor $W(F, M)$ mint az $M$ Borel-halmaz függvénye teljesen additív.*

A bizonyítás azonnal adódik abból, hogy a *Hausdorff*-féle lineáris mérték a *Borel*-halmazokon teljesen additív.

Valóban, legyenek $M_1, M_2, \ldots$ egymást nem metsző *Borel*-halmazok és $M = \sum_n M_n$. Akkor $M \cap E_t = \sum_n (M_n \cap E_t)$, tehát tekintettel arra, hogy a jobb oldalon álló összeadandók nem metszik egymást, és hogy a $\nu(M_n \cap E_t)$ függvények mérhetők, fennáll

$$W(F, M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(M \cap E_t)\,dt = \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(M_n \cap E_t)\,dt = \sum_n W(F, M_n),$$

és ezt kellett bebizonyítani.

Most felsoroljuk a síkbeli variációnak mint teljesen additív halmazfüggvényt szolgáltató funkcionálnak a tulajdonságait.

1. *$W(F, M)$ nemnegatív funkcionál,* amely a *Borel*-halmazok osztályán és a folytonos $F(\eta)$ függvények osztályán van értelmezve.

2. *$W(F, M)$ teljesen additív halmazfüggvény* tetszés szerinti rögzített, korlátos síkbeli variációjú, folytonos $F(\eta)$ függvény esetén.

3. $W(C \cdot F, M) = |C| \cdot W(F, M)$, ahol $C$ tetszés szerinti állandó.

4. Ha $\tau$ valamely mozgás az értelmezési tartományban és $F^*[\tau(\eta)] = F(\eta)$, akkor $W[F^*, \tau(M)] = W(F, M)$.

5. *$W(F)$ felülről félig folytonos funkcionál,* vagyis ha a folytonos $F_n(\eta)$ függvények sorozata egyenletesen tart $F(\eta)$-hoz, akkor $W(F) \leqq \underline{\lim}_n W(F_n)$.

6. Az $F^*(\eta) = F(\eta) + C$ függvényre $W(F^*) = W(F)$.

7. Ha $F(x, y) = y$ az egységnégyzetben, akkor $W(F) = 1$.

Az 1., 3., 4., 6. és 7. tulajdonság közvetlenül következik a síkbeli variáció definíciójából. A 2. tulajdonságot a 25. tételben bizonyítottuk be.

Be kell még bizonyítanunk, hogy a síkbeli variáció felülről félig folytonos (5. tulajdonság).

46. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $\varepsilon > 0$ tetszés szerinti szám és $0 < d < \varepsilon$. Akkor bármely $s$ hosszúságú $L$ egyszerű ívhez vagy topologikus körhöz található $L$-nek legfeljebb $d$ és legalább $\frac{d}{2}$ átmérőjű körökkel való $\{\sigma_n\}$ befedése úgy, hogy az átmérők összege nem nagyobb, mint $s + \varepsilon$.*

BIZONYÍTÁS. Vezessük be az $a$, $b$ végpontokkal rendelkező, $s$ hosszúságú $L$ egyszerű íven $\tau(c)$ paraméter gyanánt az $a$-tól $c$-ig mért ívhosszúságot. Legyen $C_m$ az a pont, ahol $\tau(C_m) = \frac{d}{2} + (m-1)d$ $\left(m = 0, 1, \ldots, \left[\frac{s}{d} - \frac{1}{2}\right]\right)$. Rajzoljunk mindegyik $C_m$ pont és a $b$ pont mint középpont körül egy-egy $\frac{d}{2}$ sugarú $\sigma_m$ kört. A megszerkesztett zárt körlemezek összege befedi az $L$ ívet, és az átmérők összege $\leqq s + d < s + \varepsilon$. Mindegyik $\sigma_m$ kör sugarát tetszés szerinti kis értékkel megnövelve, kapjuk $L$ egy keresett befedését nyílt körlemezekkel.

Arra az esetre, amikor $L$ topologikus kör, a bizonyítás analóg módon történik, csak az $a$ és $b$ pont egybeesik.

47. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $K_1, \ldots, K_n, \ldots,$ egyszerű ívek vagy topologikus körök valamely sorozata és $K = \underline{\mathrm{lt}}_n K_n$. Akkor $v(K) \leqq \underline{\lim}_n v(K_n)$.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy ez nincs így és $v(K) > A + \delta$, ahol $\delta > 0$ és $A = \underline{\lim}_n v(K_n)$. (Ha $\underline{\lim}_n v(K_n) = \infty$, akkor a segédtétel állítása triviális.) Legyen $\varepsilon_1 > 0$ olyan kicsi, hogy $v_{\varepsilon_1}(K) > A + \frac{\delta}{2}$. Válasszunk ki egy $\{K_{n_m}\}$ részsorozatot, amelyre $\underset{m}{\mathrm{lim}}\, v(K_{n_m}) = A$. Feltehetjük, hogy maga a $\{K_n\}$ sorozat már ilyen. Legyen az $N > 0$ szám olyan, hogy $n \geqq N$ esetén $\frac{A}{2} < v(K_n) < A + \frac{\delta}{4}$.

Elhagyva az első $N-1$ számú $K_1, \ldots, K_{N-1}$ kontinuumot, feltehetjük, hogy az egész $K_1, K_2, \ldots$ sorozatnak megvan ez a tulajdonsága. Legyen a 46. segédtételben $\varepsilon = \frac{6\varepsilon_1}{7}$ és $d = \min\left(\frac{\delta}{8}, \frac{6\varepsilon}{7}\right)$. Mindegyik $K_n$ ívet fedjük be legfeljebb $d$ és legalább $\frac{d}{2}$ sugarú körök olyan $\{\sigma_m^{(n)}\}$ rendszerével, hogy a rendszerbeli körök átmérőinek összege $\leqq A + \frac{3\delta}{8}$. Legyen $\{\tilde{\sigma}_m^{(n)}\}$ az a kör-rendszer, amelyet $\{\sigma_m^{(n)}\}$ köreinek

$$\alpha = \frac{A + \frac{7\delta}{16}}{A + \frac{3\delta}{8}}$$

arányú megnagyításával kapunk. Nyilvánvaló, hogy $1 < \alpha < \frac{7}{6}$. Minthogy $K = \underset{n}{\mathrm{lt}}\, K_n$, van olyan $n > N$ szám, hogy $\varrho(\eta, K_n) < \frac{\alpha - 1}{2} d$ bármely $\eta \in K$ pontra. Akkor a $\{\tilde{\sigma}_m^{(n)}\}$ kör-rendszer befedi a $K$ halmazt. Továbbá a $\{\tilde{\sigma}_m^{(n)}\}$ rendszerhez tartozó körök átmérőinek összege nem haladja meg az

$$\left(A + \frac{3\delta}{8}\right)\alpha \leqq \left(A + \frac{3\delta}{8}\right) \cdot \frac{A + \frac{7\delta}{16}}{A + \frac{3\delta}{8}} = A + \frac{7\delta}{16}$$

értéket és mindegyik $\tilde{\sigma}_m^{(n)}$ kör átmérője legfeljebb $d \cdot \alpha \leqq \frac{6\varepsilon}{7} \cdot \frac{7}{6} = \varepsilon_1$. Ellentmondásra jutottunk a $\nu_{\varepsilon_1}(K) > A + \frac{\delta}{2}$ feltevéssel és ezzel bebizonyítottuk a segédtételt.

48. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $K$ teljesen reguláris komponens (lásd a definíciót az első közleményben, a 372. oldalon) és $J_1$, $J_2$ azok a tartományok, amelyekre $K$ felosztja a $J$ tartományt. Legyen $\nu(K) \geqq A$. Akkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta > 0$, hogy ha az $L$ topologikus kör vagy egyszerű ív elválasztja a $J_1 - \delta(K)$, $J_2 - \delta(K)$ halmazokat, ahol $\delta(K)$ a $K$ halmaz $\delta$-sugarú környezete, akkor $\nu(L) \geqq A - \varepsilon$.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy ez nincs így. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszés szerinti szám. Legyen $\delta_1 > \delta_2 > \ldots$, $\lim\limits_n \delta_n = 0$ és $L_1, \ldots, L_n, \ldots$ topologikus körök vagy egyszerű ívek olyan sorozata, hogy $L_n$ elválasztja a $J_1 - \delta_n(K)$, $J_2 - \delta_n(K)$ halmazokat, azonkívül $\nu(L_n) < A - \varepsilon$. Megmutatjuk, hogy $\underset{n}{\mathrm{lt}}\, L_n \supset K$.

Legyen $\zeta \in K$. Akkor, mivel $K$ teljesen reguláris komponens, $\zeta \in \bar{J}_1 \cap \bar{J}_2$. Legyen $U$ a $\zeta$ pont tetszés szerinti környezete. Legyen $\alpha_1 \in U \cap J_1$ és $\alpha_2 \in U \cap J_2$. Legyen $\delta = \min\left[|\alpha_1, K|; |\alpha_2, K|\right]$. Nyilvánvaló, hogy mindazon $n$ indexekre, amelyekre $\delta_n < \delta$, $L_n$ elválasztja az $\alpha_1, \alpha_2$ pontokat és így metszi az $U$ környezetet. Tehát $\zeta \in \underset{n}{\mathrm{lt}}\, L_n$, és minthogy $\zeta$ a $K$ halmaz tetszés szerinti pontja, $K \subset \underset{n}{\mathrm{lt}}\, L_n$. A 47. segédtétel szerint

$$v(K) \leqq v(\overline{\mathrm{lt}}_n\, L_n) \leqq \lim_n v(L_n) \leqq A - \varepsilon.$$

A kapott ellentmondás bizonyítja segédtételünket.

A 48. segédtétel felhasználásával most bebizonyítjuk a síkbeli variáció felülről félig folytonos voltát.

26. TÉTEL *(a síkbeli variáció felülről félig folytonos voltáról). Tegyük fel, hogy a J-n értelmezett, folytonos $F_n(\eta)$ függvények sorozata egyenletesen tart $F(\eta)$-hoz. Akkor $W(F) \leqq \underline{\lim}_n W(F_n)$.*

BIZONYÍTÁS. Minthogy

$$W(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,dt, \quad W(F_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_n(t)\,dt,$$

elég megmutatnunk, hogy $v(t) \leqq \underline{\lim}_n v_n(t)$ majdnem minden $t$-re. Megemlítjük még, hogy ha $W(F_n) = \infty$ minden $F_n$-re, akkor a tétel állítása triviális. Ezért előre feltehetjük, hogy majdnem minden $t$-re és minden $n$-re $v_n(t) < +\infty$. Hagyjuk figyelmen kívül mindazokat a nívókat, amelyekre az $F(\eta)$, $F_n(\eta)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ függvényeknek csak egyike is tartalmaz reguláris, de nem teljesen reguláris komponenseket. A 3. tétel szerint (lásd I. fej. 1. §) ilyen nívó legfeljebb megszámlálhatóan sok van. Zárjuk ki azokat a nívókat is, amelyek tartalmaznak (az $F(\eta)$ függvényre nézve) kvázi-extrémális komponenst. Elhagyva továbbá azokat a nívókat, amelyeknek a reguláris komponensei *véges* összhosszúságúak és a nem reguláris komponenshez tartozó pontjaiból álló halmaz *Hausdorff*-féle lineáris mértéke nullától különböző, a 10. tétel értelmében szintén legfeljebb megszámlálhatóan sok nívót hanyagolunk el. Legyen most $T$ az összes megmaradt $t$ értékek halmaza. A $T$ halmaz teljes mértékű.

1°. Legyen $K$ az $F(\eta)$ függvény $t_0 \in T$ nívójának reguláris komponense. Legyen $J_1$ és $J_2$ az a két tartomány, amelyre $K$ felosztja $J$-t. Legyen $U(K)$ a $K$ komponens tetszés szerinti környezete. *Akkor található olyan $\delta_0 > 0$, hogy bármely pozitív $\delta < \delta_0$ számra vagy a $t - \delta$ nívó valamely komponense elválasztja a $K$, $\overline{J_1 - U(K)}$ halmazokat és a $t + \delta$ nívó valamely komponense elválasztja a $K$, $\overline{J_2 - U(K)}$ halmazokat, vagy a $t + \delta$ nívó valamely komponense elválasztja a $K$, $\overline{J_1 - U(K)}$ halmazokat és a $t - \delta$ nívó valamely komponense elválasztja a $K$, $\overline{J_2 - U(K)}$ halmazokat.*

1° BIZONYÍTÁSA. Legyen $T_F$ az $F(\eta)$ függvény egydimenziós fája. Legyen $\xi \in J_1 - U(K)$ és $\zeta \in J_2 - U(K)$. Akkor az $l_0 = \tau_F(K)$ pont az $\overset{\frown}{l_\xi, l_\zeta}$ végpontokkal rendelkező $\sigma$ egyszerű ív belső pontja. Megmutatjuk, hogy az $\overset{\frown}{l_\xi l_0}$ ív bármely, $l_0$-hoz elég közeli $l'$ pontjának $K' = \tau_F^{-1}(l')$ inverz képe elválasztja a $K$, $J_1 - U(K)$ halmazokat. Valóban, ellenkező esetben található lenne olyan $\{\zeta_s\}$, $\zeta_s \in J_1 - U(K)$ és $\{l_s\}$, $l_s \in \overset{\frown}{l_\xi l_0}$ pontsorozat, hogy $l_s \to l_0$ ha $s \to \infty$, és $\tau_F^{-1}(l_s)$ nem választja el a $\zeta_s$ pontot $K$-tól.

$J$ kompaktsága miatt feltehetjük, hogy a $\{\zeta_s\}$ sorozat konvergál egy $\zeta_0 \in J_1 - U(K)$ ponthoz. De az $\tilde{l} = \tau_F(\zeta_0)$ pont összeköthető $l_0$-lal egy $\sigma'$ minimális egyszerű ív segítségével. A $\sigma'$ ívnek nem lehetnek más közös pontjai $\sigma$-val, mint $l_0$. Valóban, ha $l^* \in \overset{\frown}{l_\xi l_0} \cap \sigma'$ és $l^* \neq l_0$, akkor $\tau_F^{-1}(l^*)$ elválasztja $K$-t $\zeta_0$-tól és még inkább rendelkezik ezzel a tulajdonsággal minden elég nagy $s$ indexű $\tau_F^{-1}(l_s)$, ugyanis az $l^*$-tól $l_0$-ig terjedő darabon a $\sigma$, $\sigma'$ íveknek egybe kell esniük tekintettel arra, hogy mindkettő minimális. Továbbá ha $l^* \in \overset{\frown}{l_0 l_\xi} \cap \sigma'$, akkor $\tau_F^{-1}(l^*)$ elválasztja a $K$ komponenst a $\zeta \in J_2$ ponttól, és így $\tau_F^{-1}(l^*)$ nem választja el a $K$ komponenst a $\zeta_0 \in J_1$ ponttól. Tehát $l_0$ a $\sigma$, $\sigma'$ ívek egyetlen közös pontja, méghozzá $\sigma$-nak belső pontja. Következésképpen $l$ elágazási pont, ami az 5. tétel szerint lehetetlen. Ennélfogva az $\overset{\frown}{l_\xi l_0}$ ív minden, $l_0$-hoz elég közeli $l'$ pontjának $\tau_F^{-1}(l')$ inverz képe elválasztja a $J_1 - U(K)$ és a $K$ halmazt. Analóg módon az $\overset{\frown}{l_0 l_\zeta}$ ív minden, $l_0$-hoz elég közeli $l''$ pontjának inverz képe elválasztja egymástól a $K$ és a $J_2 - U(K)$ halmazt. Az $\overset{\frown}{l_\xi l_0}$ és az $\overset{\frown}{l_0 l_\zeta}$ íven is $l_0$-hoz bármilyen közel találhatók olyan pontok, ahol $F(^*l) \neq t$. Ha $l_0$ környezetében az $\overset{\frown}{l_\xi l_0}$ íven az $F^*(l)-t$ különbség nem vált jelet, akkor ennek a különbségnek az $\overset{\frown}{l_0 l_\zeta}$ íven $l_0$-hoz bármilyen közeli pontokban ellenkező előjelet kell felvennie, mert különben $K = \tau_F^{-1}(l_0)$ kvázi-extrémális komponens lenne. Következésképpen található olyan $l'$, $l''$ pontpár, hogy vagy $F^*(l') > t > F^*(l'')$, vagy $F^*(l') < t < F^*(l'')$ és a $K_1 = \tau_F^{-1}(l')$, $K_2 = \tau_F^{-1}(l'')$ komponensek a $K$ komponenst elválasztják a $J_1 - U(K)$ ill. $J_2 - U(K)$ halmaztól. Az 1° állítást bebizonyítottuk: $\delta_0$ gyanánt választhatjuk a $\min\{|F^*(l')-t|, |F^*(l'')-t|\}$ értéket.

2°. Legyen $K$ a $t_0 \in T$ nívó reguláris komponense és $\theta > 0$ tetszés szerinti szám. Legyen $v(K) > A + d$, ahol $d > 0$. Akkor *található olyan $N$, hogy $n > N$ esetén a $K$ komponens $\theta$-sugarú környezete tartalmazza az $F_n(\eta)$ függvény $E_{t_0}^{(n)}$ nívójának valamely, legalább $A$ hosszúságú komponensét.*

2° BIZONYÍTÁSA. A 48. segédtétel alapján válasszuk a $\delta > 0$ számot olyan kicsinek, hogy a $J_1 - \delta(K)$, $J_2 - \delta(K)$ halmazokat elválasztó bármely topologikus kör vagy egyszerű ív legalább $A$ hosszúságú. Legyen továbbá $\delta \leqq \theta$. Akkor 1° értelmében találhatók olyan $K_1 \subset E_{t \pm \tau_1}$, $K_2 \subset E_{t \pm \tau_1}$ $(\tau_1 > 0)$ komponensek, amelyek elválsztják egymástól a $K$, $J_1 - \delta(K)$, ill. $K$, $J_2 - \delta(K)$ halmazokat. Meghatározottság kedvéért legyen $K_1 \subset E_{t+\tau_1}$, $K_2 \subset E_{t-\tau_1}$. Elég nagy $n$ indexekre $\eta \in K_1$ esetén $F_n(\eta) \geqq t + \frac{\tau_1}{2}$, $\eta \in K_2$ esetén pedig $F_n(\eta) \leqq t - \frac{\tau_1}{2}$. De akkor az $F_n(\eta)$ függvény $t$ nívójának valamely $\tilde{K}_n$ komponense elválasztja a $K_1$, $K_2$ és így a $J_1 - \delta(K)$, $J_2 - \delta(K)$ halmazokat is. A $t_0$-ra tett megszorítások következtében $K$ topologikus kör vagy olyan egyszerű ív, amelynek végpontjai $J$ határán fekszenek, és $\delta$ megválasztása folytán $v(K) \geqq A$. Továbbá $K_1$ és $K_2$ elválasztja a $\tilde{K}_n$ komponenst a $J_1 - \delta(K)$ illetve a $J_2 - \delta(K)$ halmaztól, tehát $\tilde{K}_n \subset \theta(K)$. A 2° állítást bebizonyítottuk.

3°. *Legyen $t_0 \in T$ és $v(E_{t_0}) \geqq A + \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$. Akkor $\varliminf_n v(E_{t_0}^{(n)}) \geqq A$.*

3°. BIZONYÍTÁSA. Minthogy $t_0 \in T$, található véges számú $K^{(1)}, \ldots, K^{(m)}$ reguláris komponens $E_{t_0}$-ban úgy, hogy $\sum_{r=1}^{m} v(K^{(r)}) \geqq A + \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen a $\theta > 0$ szám olyan kicsi, hogy ezeknek a komponenseknek a $\theta$-sugarú környezetei ne messék egymást. Legyen $d = \frac{\varepsilon}{2m}$ és alkalmazzuk a 2° pontot. Azt kapjuk, hogy minden elég nagy $n$ indexre az $F_n(\eta)$ függvény $t$ nívója tartalmaz legalább $m$ számú $\{K_n^{(j)}\}$ $(j=1, \ldots, m)$ komponenst, amelyre $K_n^{(j)} \subset \theta(K^{(j)})$ és $v(K_n^{(j)}) \geqq v(K^{(j)}) - \frac{\varepsilon}{2m}$. Akkor

$$v\left(\sum_{j=1}^{m} K_n^{(j)}\right) > \sum_{j=1}^{n} v(K^{(j)}) - \frac{\varepsilon}{2} \geqq A,$$

amiből a 3° állítás következik.

3°-ból közvetlenül következik a tétel állítása, mert az $\varepsilon > 0$ szám tetszés szerinti lévén, $\varliminf_n v(E_{t_0}^{(n)}) \geqq v(E_{t_0})$ minden $t_0 \in T$ nívóra. A 26. tételt bebizonyítottuk.

Következmény. Legyen $\{F_n(\eta)\}$ folytonos függvényekből álló sorozat, amely egyenletesen tart $F(\eta)$-hoz. Legyen $G$ valamely tartomány. Akkor $W(F, G) \leqq \leqq \varliminf_n W(F_n, G)$.

Megjegyzés. Zárt $D$ halmazra a $W(F, D) \leqq \varliminf_n W(F_n, D)$ egyenlőtlenség már nem mindig teljesül, amint ezt a következő példa mutatja. Legyen $D_1$ a *Cantor*-féle perfekt halmaz az $x$ tengely valamely szakaszán és $D$ valamely $D_1$ feletti „fésű" $J$-ben. Legyen $f(x)$ a „*Cantor*-féle lépcső" a $[0, 1]$ szakaszon: $f(x) = \frac{1}{2}$ ha $\frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{2}{3}$; $f(x) = \frac{1}{4}$ ha $\frac{1}{9} \leqq x \leqq \frac{2}{9}$; $f(x) = \frac{3}{4}$ ha $\frac{7}{9} \leqq x \leqq \frac{8}{9}$ stb. Legyenek $b_0; a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_m, b_m; a_{m+1}$ a szomszédos intervallumok végpontjai az $n$-edrangúakig bezárólag, balról jobbra számozva ($b_0$ és $a_{m+1}$ a $[0, 1]$ szakasz végpontjait jelenti). Legyen $f_n(a_s) = f(b_{s-1})$; $f_n(b_s) = f(b_s)$ és az $[a_s, b_s]$, $[b_{s-1}, a_s]$ szakaszokon értelmezzük az $f_n(x)$ függvényt lineárisan. Legyen $F(x, y) = f(y)$ és $F_n(x, y) = f_n(y)$ $(0 \leqq x \leqq 1;$ $0 \leqq y \leqq 1)$. Nyilvánvaló, hogy $W(F, D) = 1$; $W(F_n, D) = 0$ és az $F_n(\eta)$ függvények sorozata egyenletesen tart $F(\eta)$-hoz.

A paragrafus befejezéséül megemlítjük még, hogy bármely rögzített, korlátos síkbeli variációjú, folytonos $F(\eta)$ függvény esetén maga a $W(F)$ variáció a $J$ tartományon egy *Carathéodory*-féle mértéket értelmez: minden $E$ halmaznak feleltessük meg a $W(F, E) = \inf_{M \supset E} W(F, M)$ számot, ahol az infimum az $E$-t tartalmazó összes $M$ *Borel*-halmazra képezendő. Nyilván $W(F, E) \geqq 0$. Továbbá ha $E_1, E_2$ egymástól pozitív távolságra levő halmazok, akkor $W(F, E_1 + E_2) = W(F, E_1) + + W(F, E_2)$. Végül bármilyen $E_1, E_2, \ldots$ halmazokra $W(F, \sum_n E_n) \leqq \sum_n W(F, E_n)$. Ily módon $W(F, E)$ eleget tesz a *Carathéodory*-féle mérték összes axiómáinak. Ebből speciálisan következik az alábbi.

27. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ korlátos síkbeli variációjú, folytonos függvény és $M$ tetszés szerinti Borel-halmaz $J$-ben. Akkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $D \subset M$ zárt halmaz, hogy $W(F, D) > W(F, M) - \varepsilon$.*

## 2. §. A síkbeli variáció félig additív. A síkbeli variáció értelmezése vetületek segítségével

Ebben a paragrafusban megmutatjuk, hogy a síkbeli variáció felülről félig additív, vagyis hogy ha $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$ folytonos függvények és $F(\eta) = \varphi(\eta)+\psi(\eta)$, akkor $W(F) \leqq W(\varphi)+W(\psi)$.

Ezzel kapcsolatban a variáció új, a korábbival egyenértékű definícióját kapjuk, amely talán önmagában is érdekes.

49. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $M$ valamely Borel-halmaz az $x, y, t$ térben, és legyen az $x_0, y_0$ változók $\Phi_{\bar{x},\bar{y}}(x_0, y_0)$ függvénye egyenlő az $M$ halmaz $x=x_0$, $y=y_0$ egyenesen fekvő pontjainak számával. A $\Phi_{\bar{x},\bar{y}}(x_0, y_0)$ függvény mérhető.*

BIZONYÍTÁS. Amint a deskriptív halmazelméletből ismeretes, az $x$, $y$ sík azon pontjainak halmaza, amelyekben $\Phi_{\bar{x},\bar{y}}(x_0, y_0)=n$, két $A$-halmaz különbsége (sőt, $CA$-halmaz). Ebből következik a segédtétel állítása.

50. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $M$ síkbeli, zárt halmaz és $l$ tetszés szerinti egyenes, amely ugyanabban a síkban fekszik, mint $M$. Legyen továbbá $\eta \in l$ esetén $\Phi_l(\eta)$ az $M$ halmaz azon pontjainak száma, amelyek az $M$ halmaz $l$-re való merőleges vetítése során az $\eta$ pontba mennek át. Akkor*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_l(\eta)\,d\eta \leqq v(M),$$

*ahol $v(M)$ a Hausdorff-féle lineáris mérték.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $S$ lineáris zárt halmaz. Jelentse $T_\varepsilon(S)$ az $S$ halmaz olyan pontjainak maximális számát, amelyek közül bármely kettőnek a távolsága legalább $\varepsilon$. Most legyen $\Phi_{\varepsilon,l}(\eta)=T_\varepsilon(m_\eta \cap M)$, ahol $m_\xi$ az $l$ egyenesre a $\xi$ pontban emelt merőleges. Könnyen belátható, hogy a $\Phi_{\varepsilon,l}(\eta)$ függvény alulról félig folytonos és így *Borel*-mérhető. Továbbá

$$\Phi_l(\eta)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_{\varepsilon,l}(\eta) \quad \text{és} \quad \varepsilon_2<\varepsilon_1 \quad \text{esetén} \quad \Phi_{\varepsilon_1,l}(\eta)\leqq\Phi_{\varepsilon_2,l}(\eta).$$

Végül nyilvánvaló, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varepsilon,l}(\eta)\,d\eta \leqq v(M).$$

Valóban, legyen $\sigma_{\frac{\varepsilon}{4}}$ az $M$ halmazt befedő kör-rendszer, amely $\frac{\varepsilon}{4}$-nél nem nagyobb átmérőjű körökből áll. Akkor a $\sigma_{\frac{\varepsilon}{4}}$ rendszerhez tartozó körök átmérőinek összege nem lehet kisebb, mint

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varepsilon,l}(\eta)\,d\eta.$$

Valóban, rajzoljuk meg $\sigma_{\frac{\varepsilon}{4}}$ mindegyik körében az $l$ egyenessel párhuzamos átmérőt.

Minden, az $l$ egyenesre merőleges és a $\xi$ ponton átmenő egyenest legalább $\Phi_{\varepsilon,l}(\xi)$ ilyen átmérő metsz. Ebből állításunk következik. Tehát

$$\nu(M) \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varepsilon,l}(\eta)d\eta \quad \text{és} \quad \Phi_l(\eta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Phi_{\varepsilon,l}(\eta),$$

továbbá $\Phi_{\varepsilon_1,l}(\eta) \leqq \Phi_{\varepsilon_2,l}(\eta) \leqq \Phi_l(\eta)$, ha $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Ebből következik $\Phi_l(\eta)$ mérhetősége és a

$$\nu(M) \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_l(\eta)d\eta$$

egyenlőtlenség. A segédtételt bebizonyítottuk.

Legyen $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ tetszés szerinti szám. Jelentse $I^{(\varepsilon,d)}_{i,j,k,m}$ azt az $\frac{1}{2^m}$ hosszúságú szakaszt, amelynek egyik végpontjának koordinátái $x = \frac{\varepsilon \cdot i}{2^m}$, $y = \frac{\varepsilon \cdot j}{2^m}$, és amely az $x$ tengellyel $\frac{\varepsilon \cdot k}{2^m}\pi$ nagyságú szöget alkot $\left(i, j, k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{2^m}{\varepsilon}\right] + 1;\; m = \left[\frac{1}{d}\right] + 1, \left[\frac{1}{d}\right] + 2, \ldots\right)$. Rendezzük ezeket a szakaszokat közönséges $\Sigma^{(\varepsilon,d)} = \{I_n\}$ sorozatba oly módon, hogy $r < s$ esetén $|I_r| \geqq |I_s|$ legyen ($|I|$ az $I$ szakasz hosszúsága).

Legyen $C \subset J$ rektifikálható egyszerű ív vagy topologikus kör és $d > 0$ tetszés szerinti szám. Legyen $\{I_k^{(C,d)}\}$ a $J$ tartományban fekvő szakaszok sorozata, amelyet a következőképpen definiálunk.

Jelentse $\Sigma^*$ azon $\frac{d}{2}$-nél nem hosszabb $I \subset J$ szakaszok összességét, amelyeknek végpontjai $C$-n fekszenek és amelyek mindegyikéhez található olyan $I_{k_I} \in \Sigma^{(\varepsilon,d)}$ szakasz, hogy $\delta(I, I_{k_I}) < \varepsilon \cdot |I_{k_I}|$, ahol $\delta(A, B)$ a *Hausdorff*-féle távolság (lásd I. fej. 4. §). Jelöljük továbbá $I \in \Sigma^*$ esetén $C_I$-vel a $C$ ívnek az $I$ húr által meghatározott szakaszát. Válasszuk $I_1^{(C,d)}$ gyanánt azt az $I \in \Sigma^*$ szakaszt, amelynek minimális indexű $I_{k_I}$ felel meg. Tegyük fel, hogy az $I_1^{(C,d)}, \ldots, I_{k-1}^{(C,d)}$ szakaszokat már megszerkesztettük. Tekintsük mindazokat az $I \in \Sigma^*$ szakaszokat, amelyekre $C_I$ nem metszi a $\sum_{i=1}^{k-1} C_{I_i^{(C,d)}}$ halmazt. Válasszuk ki közülük azt az $I$ szakaszt, amelynek minimális indexű $I_{k_I}$ felel meg és ezt vegyük $I_k^{(C,d)}$-nek.

51. SEGÉDTÉTEL. *Legyen a $C \subset J$ rektifikálható ív hosszúsága $S$ és $d > 0$ olyan szám, hogy bármely $C$-be írt poligon hosszúsága nagyobb, mint $S - \varepsilon$, hacsak a maximális élhosszúság $d$-nél kisebb. Akkor*

$$\sum_k |I_k^{(C,d)}| \geqq S - 2\varepsilon.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\sum_{k=1}^{N} I_k^{(C,d)} = L_N$. Található olyan $N_1$, hogy $L_N$-hez hozzávéve bizonyos (általában nem az $\{I_k^{(C,d)}\}$ sorozathoz tartozó) $I^*_{N+1}, \ldots, I^*_{N_1}$ szakaszokat, amelyekre $|I^*_{N+s}| \leqq 5|I^{(C,d)}_{N+s}|$, $C$-be írt poligont kapunk. De ebből következik, hogy $C - \sum_{k=1}^{N} C_{I_k^{(C,d)}}$ hosszúsága $N$ növekedtével egy $\varepsilon$-nál nem nagyobb számhoz tart, vagyis $\sum_k |I_k^{(C,d)}| \geqq S - 2\varepsilon$. A segédtételt bebizonyítottuk.

Legyen $R \subset J$ valamely kontinuum és $d > 0$. Legyen $\{I_k^{(R,d)}\}$ olyan szakaszokból álló sorozat, amelyeknek végpontjai $R$-ben fekszenek és amelyeket a következőképpen definiálunk: jelentse $\Sigma^*$ mindazon szakaszok összességét, amelyeknek végpontjai $R$ olyan részkontinuumához tartoznak, amely teljesen a szakasz egyik végpontja mint középpont körül a szakasz hosszúságával mint sugárral rajzolt zárt körlemezben fekszik. Minden ilyen $I$ szakaszra a neki megfelelő kört $Q_I$-vel fogjuk jelölni. Legyen $\Sigma^{**}$ azoknak a $\Sigma^*$-hoz tartozó, $\frac{d}{2}$-nél kisebb hosszúságú szakaszoknak az összessége, amelyekre $I \in \Sigma^{**}$ esetén található $I_{k_I} \in \Sigma^{(\varepsilon,d)}$ szakasz úgy, hogy $\delta(I, I_{k_I}) < \varepsilon \cdot |I_{k_I}|$. Válasszuk $I_1^{(R,d)}$ gyanánt azt a $\Sigma^{**}$-beli szakaszt, amelyre a megfelelő $\Sigma^{(\varepsilon,d)}$-beli szakasz indexe minimális. Tegyük fel, hogy az $I_1^{(R,d)}, \ldots, I_{k-1}^{(R,d)}$ szakaszokat már megszerkesztettük. Tekintsük azon $\Sigma^{**}$-beli szakaszokat, amelyeknek megfelelő körök nem metszik a $\sum_{i=1}^{k-1} Q_{I_i^{(R,d)}}$ halmazt, és válasszuk ki közülük azt a szakaszt, amelyre a megfelelő $\Sigma^{(\varepsilon,d)}$-beli szakasz minimális indexű. Éppen ezt a szakaszt vesszük $I_k^{(R,d)}$-nek.

52. SEGÉDTÉTEL. *Legyen* $R \subset J$ *valamely kontinuum,* $v(R) > A$ *és* $d > 0$ *olyan, hogy* $v_d(R) > A$. *Akkor* $\sum_k |I_k^{(R,d)}| > \frac{A}{6}$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $N$ olyan nagy, hogy $k > N$ esetén $I_k^{(R,d)} < \frac{d}{6}$. Akkor a $Q_{I_k^{(R,d)}}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ körökével megegyező középpontú és azoknál háromszor nagyobb sugarú körlemezek összessége befedi $R$-t, ebből pedig következik, hogy $\sum_{k=1}^{N} |I_k^{(R,d)}| > \frac{A}{6}$, tehát még inkább $\sum_k |I_k^{(R,d)}| > \frac{A}{6}$.

28. TÉTEL. *Legyen* $F(\eta)$ *folytonos függvény. Legyen* $\tilde{F}(E)$ *az* $E$ *halmazon tekintett* $F(\eta)$ *függvény grafikonja. Legyen továbbá* $\{R_n\}$ *az* $xyt$ *tér* $xy$ *síkra merőleges síkjaiból álló sorozat,* $\pi_{R_i}(D)$ *jelentse a térbeli* $D$ *halmaz* $R_i$*-re való merőleges vetületét, végül* $\{M_n\}$ *legyen* $J$*-beli, egymást páronkint nem metsző Borel-halmazokból álló sorozat. Akkor*

$$W^*(F) \equiv \sup \sum_s \mathrm{mes}_2 [\pi_{R_s}(\tilde{F}(M_s))] = W(F),$$

*ahol* $\mathrm{mes}_2$ *a síkbeli Lebesgue-mérték és a felső határ az összes lehetséges* $\{R_n\}$ *és* $\{M_n\}$ *sorozatokra képezendő.*

BIZONYÍTÁS. 1. Bebizonyítjuk, hogy $W(F) \geqq W^*(F)$. Nyilvánvalóan elég azt az esetet tekinteni, amikor $W(F) < +\infty$. Ebben az esetben a $W(F) \geqq W^*(F)$ egyenlőtlenség közvetlenül következik az 50. segédtételből.

2. Bebizonyítjuk, hogy $W(F) \leqq W^*(F)$. Különböztessünk meg két esetet.

*a)* Legyen $W(F) < +\infty$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszés szerinti. A 10. tétel szerint a $t$ értékeknek van olyan zárt $D$ halmaza, hogy $t \in D$ esetén a $t$ nívó bármely, több pontból álló komponense rektifikálható ív vagy rektifikálható topologikus kör és

$$\int_D L(t)\,dt > W(F) - \varepsilon,$$

ahol $L(t)$ az $E_t$ halmaz rektifikálható komponenseinek összhosszúsága. Minden $t \in D$ értékhez található $E_t$-nek véges számú rektifikálható $K_1^{(t)}, \ldots, K_{n_t}^{(t)}$ komponense úgy, hogy ha $L^*(t)$-vel jelöljük ezen véges számú komponens hosszúságának az összegét, akkor

$$\int_D L^*(t)\,dt > W(F) - 2\varepsilon,$$

ahol az integrál mint *Lebesgue*-féle külső integrál képezendő. Továbbá minden $t \in D$ értékhez található olyan $\varrho_t > 0$ és $0 < \delta_t < \frac{\varrho_t}{4}$, hogy $\varrho(K_i^{(t)}, K_j^{(t)})_{i \neq j} > \varrho_t$, és ha mindegyik $K_i^{(t)}$-be beírunk egy tetszés szerinti poligont, amelynek maximális élhosszúsága kisebb, mint $\delta_t$, akkor ennek a poligonnak a hosszúsága nagyobb, mint $v(K_i^{(t)}) - \frac{\varepsilon}{n_t \cdot T}$, ahol $T > 2 \sup_{\eta \in J} |F(\eta)|$.

Található olyan $\varrho > 0$ és $0 < \delta < \frac{\varrho}{4}$, hogy, $D_{\varrho,\delta}$-val jelölve azon $t$ értékek halmazát, amelyekre $\varrho_t > \varrho$ és $\delta_t > \delta$, fennáll az

$$\int_{D_{\varrho,\delta}} L^*(t)\,dt > W(F) - 3\varepsilon$$

egyenlőtlenség. Itt az integrál ismét külső *Lebesgue*-integrál.

Jelöljük $P_i$-vel az $E_t$, $t \in D$ nívóhalmazok komponenseiben foglalt azon egyszerű ívek pontjainak a halmazát, amelyeknek a két végpontját összekötő szakaszok az $I_i \in \Sigma^{(\varepsilon,d)}$ szakasztól *Hausdorff*-féle értelemben legfeljebb $\varepsilon \cdot |I_i|$ távolságra vannak. A $P_i$ halmazok nyilván zártak. Vezessük be az $M_1 = P_1$, $M_i = P_i - \sum_{k=1}^{i-1} P_k$ jelölést. Legyen $R_i$ az $xy$ síkra merőleges és az $I_i$ szakasszal párhuzamos sík. Akkor az 51. segédtétel szerint $t \in D_{\varrho,\delta}$ esetén

$$\sum_i \mathrm{mes}_1[\pi_{R_i}(E_t \cap M_i)] > L^*(t) - \frac{2\varepsilon}{T}$$

és így

$$\sum_i \int_{D_{\varrho,\delta}} \mathrm{mes}_1[\pi_{R_i}(E_t \cap M_i)]\,dt > W(F) - 4\varepsilon$$

(ahol az integrálon külső *Lebesgue*-integrál értendő).

A $\pi_{R_i}(\tilde{F}(M_i))$ halmazok térbeli *Borel*-halmazok vetületei, tehát síkbeli $A$-halmazok, vagyis *Lebesgue* szerint mérhetők, és *Fubini* tétele alapján fennáll

$$\sum_i \mathrm{mes}_2[\pi_{R_i}(\tilde{F}(M_i))] > W(F) - 4\varepsilon,$$

minthogy pedig $\varepsilon$ tetszés szerinti, $\sum_i \mathrm{mes}_2[\pi_{R_i}(\tilde{F}(M_i))] \geqq W(F)$.

*b)* Legyen $W(F)=\infty$. Adjunk meg bármilyen $N$ számot. Akkor található olyan $n$ természetes szám, pozitív $d$ szám és a $t$ értékek olyan $T^*$ halmaza, hogy $t\in T^*$ esetén mindegyik $E_t$-ben található $l(t)\leqq n$ számú $K_1, \ldots, K_{l(t)}$ komponens, amelyekre

$$\int_{T^*} v_d^*(t)\,dt > N, \quad \text{ahol} \quad v_d^*(t)=\sum_{i=1}^{l(t)} v_d(K_i)$$

és az integrál mint *Lebesgue*-féle külső integrál képezendő.

Legyen $I_i\in\Sigma^{(\varepsilon,d)}$. Minden $t$-re tekintsük mindazokat az $I$ szakaszokat, amelyekre $\delta(I, I_i)<\varepsilon\cdot|I_i|$ és $I$ végpontjai $E_t$-nek és az $I$ egyik végpontja mint középpont körül $|I|$ sugárral rajzolt $Q_I^t$ körnek metszési komponenséhez tartoznak. Legyen $P_i=$ $=\sum Q_I^t\cap E_t$, ahol az összegezés adott $t$ mellett minden lehetséges $Q_I^t$-re, továbbá minden lehetséges $t$ értékre történik. A $P_i$ halmazok nyilván zártak.

Vezessük be az $M_1=P_1$, $M_i = P_i-\sum_{k=1}^{i-1} P_k$ jelöléseket. Az 52. segédtétel értelmében

$$\sum_i \int_{T^*} \operatorname{mes}_1 \pi_{R_i}(E_t\cap M_i)\,dt > \frac{N}{12},$$

ahonnan *Fubini* tétele alapján (és megjegyezve, hogy a $\pi_{R_i}(\tilde F(M_i))$ halmazok, éppúgy mint az *a)* pontban, mérhetők) kapjuk:

$$\sum_i \operatorname{mes}_2 \left[\pi_{R_i}(\tilde F(M_i))\right] > \frac{N}{12},$$

és minthogy $N$ tetszés szerinti,

$$W^*(F)=\infty.$$

A tételt teljesen bebizonyítottuk.

1. megjegyzés. A 28. tétel *a $W(F)$ síkbeli variáció új, a korábbival ekvivalens definícióját adja vetületek segítségével. A tétel megfogalmazásában fel lehetne tenni, hogy az $M_s$ halmazok nem Borel-félék, hanem zártak.*

Valóban, a

$$W(F)\geqq \sum_{s=1}^{n} \operatorname{mes}_2 \left[\pi_{R_s}(\tilde F(M_s))\right]$$

egyenlőtlenség érvényes lévén tetszés szerinti $M_s$ *Borel*-halmazokra, annál inkább igaz zárt halmazokra.

Bizonyítsuk be a fordított egyenlőtlenséget. Ennek érdekében megjegyezzük, hogy azok az $M_s$ halmazok, amelyeket a tétel 2. pontjának bizonyítása során szerkesztettünk meg, két-két zárt halmaz különbségeként álltak elő, tehát $F_\sigma$ típusúak. Legyen $M_s=\sum_n F_{s,n}$, ahol $F_{s,n}$ zárt halmazok, és legyen

$$M_{s,k}=\sum_{n=1}^{k} F_{s,n}.$$

Az $R_{s,k}=R_s$ jelöléssel kapjuk:

$$\lim_k \sum_s \mathrm{mes}_2\,[\pi_{R_{s,k}}(\tilde{F}(M_{s,k}))]=\sum_s \mathrm{mes}_2\,[\pi_{R_s}(\tilde{F}(M_s))],$$

amiből állításunk következik.

2. megjegyzés. *A 28. tételben az $\{M_s\}$ halmazrendszerek és az $\{R_s\}$ síkrendszerek egyaránt lehetnek végesek vagy megszámlálhatók.*

Az új definíció segítségével be fogjuk bizonyítani, hogy a síkbeli variáció félig additív.

A továbbiakban alkalmasabb lesz számunkra, ha ennek a tételnek egy kissé más alakját használjuk. Vezessük be a következő definíciót.

22. definíció. Legyen $F(\eta)$ az $xy$ síkon értelmezett függvény és legyen $R$ az $xyt$ térben az $xy$ sík $b$ egyenesét és a $t$ tengelyt tartalmazó sík.

Legyen M valamely halmaz az $xy$ síkban.

Jelentse $\Phi_R(F, M, l_0, t_0)$ az $F(x, y)$ függvény grafikonja azon pontjainak a számát, amelyek $M$ fölött fekszenek és amelyeknek $R$-re való merőleges vetülete az $(l_0, t_0)$ pont. Néha rövidség kedvéért a $\Phi_R(F, \mathrm{M}, l_0, t_0)$ jelölésben az $F$ betűt el fogjuk hagyni.

29. TÉTEL. *Legyen $F(x, y)$ az $xy$ sík egységnégyzetén értelmezett folytonos függvény. Legyen $R_1, \ldots, R_n, \ldots$ tetszés szerinti, az $xy$ síkra merőleges síkokból álló rendszer az $xyt$ térben, $M_1, \ldots, M_n, \ldots$ pedig az $xy$ sík tetszés szerinti, egymást páronkint nem metsző Borel-halmazaiból álló rendszer. Akkor*

$$W(F)=\sup \sum_n \iint_{R_n} \Phi_{R_n}(F, M_n, l, t)\,dl\,dt,$$

*ahol a felső határ az összes lehetséges $\{R_n\}$ és $\{M_n\}$ rendszerekre képezendő.*

Ez a tétel az 50. segédtétel és a 28. tétel közvetlen következménye. A 29. tételre is érvényes az 1. és a 2. megjegyzés.

53. SEGÉDTÉTEL. *Legyenek $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ a $[0, 1]$ szakaszon értelmezett folytonos, korlátos variációjú függvények. Legyen továbbá $P$ zárt halmaz. Jelölje $E_y(f, P)$ az $f$ függvénynek a $P$ halmazon felvett értékkészletét, és $\Phi_{f,P}(y)$ az $y$ változónak azt a függvényét, amely mindegyik $y_0$ pontban egyenlő az $y_0$ pont $P$-ben fekvő inverz képeinek számával, ha az $f$ függvény segítségével leképezzük az $x$ tengelyt az $y$ tengelyre. Akkor*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi+\psi,P}(y)\,dy \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi,P}(y)\,dy+\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\psi,P}(y)\,dy.$$

*Ha $\varphi$ is, $\psi$ is egyrétű függvény, akkor*

$$\mathrm{mes}_1[E_y(\varphi, P)]+\mathrm{mes}_1[E_y(\psi, P)] \geqq \mathrm{mes}_1[E_y(\varphi+\psi, P)],$$

*ahol* $\mathrm{mes}_1$ *a Lebesgue-mérték. Könnyen belátható, hogy az $E_y(\varphi)$, $E_y(\psi)$, $E_y(\varphi+\psi)$ függvények a segédtétel feltevései mellett mérhetők.*

BIZONYÍTÁS. Legyen az $f(x)$ folytonos függvény korlátos variációjú, $V(f) < +\infty$. Akkor, mint ismeretes (lásd pl. a 17. tételt),

$$V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f,M}(y)\,dy,$$

ahol $M$ az $f$ függvény értelmezési intervalluma.

Legyen $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ két korlátos variációjú, folytonos függvény:

$$V(\varphi) = A, \quad V(\psi) = B, \quad V(\varphi+\psi) = C \leqq A+B.$$

Legyen $P$ valamely zárt halmaz. A $P$-vel határos intervallumok legyenek $I_1, \ldots, I_n, \ldots$, végpontjaik $\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n, \ldots$. Helyettesítsük a $\varphi$, $\psi$ függvényeket azokkal a $\varphi^*$, $\psi^*$ függvényekkel, amelyekre $\varphi^* = \varphi$, $\psi^* = \psi$ a $P$ halmaz pontjaiban és amelyek az $I_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$ intervallumokon lineárisak. Nyilvánvaló, hogy

$$V(\varphi^*) = A^* \leqq A = V(\varphi), \quad V(\psi^*) = B^* \leqq B = V(\psi).$$

Az előbbi megjegyzés alapján

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi^*,M}(y)\,dy = A^*, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\psi^*,M}(y)\,dy = B^*.$$

Továbbá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi^*,M}(y)\,dy = \sum_k |\varphi(\alpha_k) - \varphi(\beta_k)| + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi^*,P}(y)\,dy$$

és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\psi^*,M}(y)\,dy = \sum_k |\psi(\alpha_k) - \psi(\beta_k)| + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\psi^*,P}(y)\,dy.$$

Válasszuk az $N$ számot olyan nagynak, hogy

$$\sum_{k=N}^{\infty} |\varphi(\alpha_k) - \varphi(\beta_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{k=N}^{\infty} |\psi(\alpha_k) - \psi(\beta_k)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ahol $\varepsilon > 0$ valamilyen rögzített szám. Tekintsük az $M$-ből az $I_1, \ldots, I_N$ szomszédos intervallumok elhagyása útján keletkező $P_N^*$ halmazt. A $P_N^*$ halmaz $N+1$ számú $P_1, \ldots, P_{N+1}$ szakaszból áll. Érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$V_{P_k}(\varphi^* + \psi^*) \leqq V_{P_k}(\varphi^*) + V_{P_k}(\psi^*),$$

vagy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi^*+\psi^*,P_k}(y)\,dy \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi^*,P_k}(y)\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\psi^*,P_k}(y)\,dy.$$

De

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi^*+\psi^*, P}(y)\,dy \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi^*+\psi^*, P_N^*}(y)\,dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi^*+\psi^*, P_k}(y)\,dy \leqq \sum_{k=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi^*, P_k}(y)\,dy + \sum_{k=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\psi^*, P_k}(y)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi^*, P}(y)\,dy + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\varphi^*(\alpha_k) - \varphi^*(\beta_k)| + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\psi^*, P}(y)\,dy +$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi^*(\alpha_k) - \psi^*(\beta_k)| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi^*, P}(y)\,dy + \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\psi^*, P}(y)\,dy + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tehát bármely $\varepsilon > 0$ számra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi^*+\psi^*, P}(y)\,dy \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi^*, P}(y)\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\psi^*, P}(y)\,dy + \varepsilon.$$

Az $\varepsilon > 0$ szám, tetszés szerinti lévén, elhagyható, és felhasználva, hogy

$$\Phi_{\varphi^*, P}(y) \equiv \Phi_{\varphi, P}(y); \quad \Phi_{\psi^*, P}(y) \equiv \Phi_{\psi, P}(y); \quad \Phi_{\varphi^*+\psi^*, P}(y) \equiv \Phi_{\varphi+\psi, P}(y),$$

végül a következőt kapjuk:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi+\psi, P}(y)\,dy \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi, P}(y)\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\psi, P}(y)\,dy.$$

Abban az esetben, amikor $\varphi$ és $\psi$ a $P$ halmazon egyrétű függvény, fennáll

$$\operatorname{mes}_1 [E_y(\varphi, P)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varphi, P}(y)\,dy$$

és a $\psi$-re vonatkozó analóg egyenlőség, ebből pedig következik a segédtétel második állítása.

30. TÉTEL *(a síkbeli variáció félig additív voltáról). Legyenek $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ az egységnégyzeten értelmezett, korlátos síkbeli variációjú, folytonos függvények. Akkor $F(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y)$ szintén korlátos síkbeli variációjú függvény és $W(F) \leqq W(\varphi) + W(\psi)$.*

BIZONYÍTÁS. Különböztessünk meg két esetet.

1°. $W(F) < +\infty$. A 29. tételhez fűzött 1. és 2. megjegyzés értelmében bármely $\varepsilon > 0$ számhoz találhatók olyan, az $xy$ síkra merőleges $R_1, \ldots, R_n$ síkok és egymást páronkint nem metsző $D_1, \ldots, D_n$ zárt halmazok, hogy

$$\sum_n \iint_{R_n} \Phi_{R_n}(F, D_n, l, t)\,dl\,dt > W(F) - \varepsilon.$$

Legyen $R_s$ e síkok közül bármelyik, $l$ az $R_s$ sík és az $xy$ sík metszésvonala, $m$ az $l$ egyenesre merőleges egyenes az $xy$ síkban és $t$ az $xy$ síkra merőleges, $R_s$-ben fekvő egyenes. Minthogy az $y=f(x)$ egyváltozós függvényre teljesül

$$V(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_f(y)\,dy,$$

a $\varphi$, $\psi$ függvények síkbeli variációjának korlátossága miatt és tekintetbe véve a 17. és 29. tételt, továbbá *Fubini* tételét, azt kapjuk, hogy majdnem minden $l_0$-ra $\varphi(l_0, m)$ és $\psi(l_0, m)$ mint az egyetlen $m$ változó függvényei korlátos variációjúak, és így az 53. segédtétel alapján

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(F, D_s, l_0, t)\,dt \leqq \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\varphi, D_s, l_0, t)\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\psi, D_s, l_0, t)\,dt.$$

De mindhárom integrálandó függvény $CA$-mérhető (sőt, *Borel*-mérhető) és nemnegatív. Mindegyikükre alkalmazható *Fubini* tétele, ennélfogva

$$\iint_{R_s}\Phi(F, D_s, l, t)\,dt\,dl \leqq$$

$$\leqq \iint_{R_s}\Phi(\varphi, D_s, l, t)\,dt\,dl+\iint_{R_s}\Phi(\psi, D_s, l, t)\,dt\,dl \leqq W(\varphi, D_s)+W(\psi, D_s).$$

Az utolsó egyenlőtlenség fennállása az 53. segédtételből következik.

A kapott $W(F, D_s) \geqq W(\varphi, D_s)+W(\psi, D_s)$ egyenlőtlenségeket minden $s$-re összegezve nyerjük, hogy

$$W(F)<\varepsilon+\sum_{s=1}^{n}\iint_{R_s}\Phi(F, D_s, l, t)\,dl\,dt \leqq$$

$$\leqq \sum_s W(\varphi, D_s)+\sum_s W(\psi, D_s)+\varepsilon \leqq W(\varphi)+W(\psi)+\varepsilon.$$

Minthogy az $\varepsilon>0$ szám tetszés szerinti lehet, ebből következik a bizonyítandó $W(F) \leqq W(\varphi)+W(\psi)$ egyenlőtlenség.

2°. $W(F)=\infty$. Ekkor bármely $N$-hez találhatók olyan $R_1, \dots, R_n$ síkok és $D_1, \dots, D_n$ zárt halmazok, hogy

$$\sum_{s=1}^{n}\iint_{R_s}\Phi_{R_s}(F, D_s, l, t)\,dl\,dt>N.$$

De a korábbiak szerint

$$\iint_{R_s}\Phi_{R_s}(F, D_s, l, t)\,dl\,dt \leqq \iint_{R_s}\Phi_{R_s}(\varphi, D_s, l, t)\,dl\,dt+\iint_{R_s}\Phi_{R_s}(\psi, D_s, l, t)\,dl\,dt,$$

és így, összegezve ezeket az egyenlőtlenségeket $s=1$-től $s=n$-ig, nyerjük:

$$W(\varphi)+W(\psi) \geqq \sum_{s=1}^{n}\left\{\iint_{R_s}\Phi_{R_s}(\varphi, D_s, l, t)\,dl\,dt+\iint_{R_s}\Phi_{R_s}(\psi, D_s, l, t)\,dl\,dt\right\} \geqq$$

$$\geqq \sum_{s=1}^{n}\iint_{R_s}\Phi_{R_s}(F, D_s, l, t)\,dl\,dt \geqq N.$$

Minthogy $N$ tetszés szerinti, a feltevéssel ellentétben az adódik, hogy $W(\varphi)+ + W(\psi) = \infty$.

A tételt bebizonyítottuk.

Lényegében már megmutattuk, milyen kapcsolat van az $F(\eta)$ folytonos függvény $W(F)$ síkbeli variációjának és $V_T(F)$ *Tonelli*-féle variációjának korlátossága között. Emlékezzünk vissza, hogy jelöléseinkkel

$$V_T(F) = \iint_{R_x} \Phi_{R_x}(F, J, l, t)\,dl\,dt + \iint_{R_y} \Phi_{R_y}(F, J, l, t)\,dl\,dt,$$

ahol $R_x$ és $R_y$ az $xyt$ térben fekvő, az $xy$ síkra merőleges, az $x$, ill. $y$ tengelyt tartalmazó síkok. Ezért *a* 29. *tételből következik a* $V_T(F) \leqq 2W(F)$ *egyenlőtlenség.* Ki lehetne mutatni, hogy *érvényes egy fordított irányú becslés is,* nevezetesen *bármely folytonos függvényre* $V_T(F) \geqq W(F)$. Minthogy ezt az egyenlőtlenséget a továbbiakban sehol sem fogjuk felhasználni, bizonyítását nem ismertetjük.*

Foglaljuk össze az e paragrafusban nyert eredményeket.

Először is *új eljárást adtunk a síkbeli variáció megszerkesztésére.* A bizonyításokat mindvégig arra az esetre végeztük, amikor az értelmezési tartomány a sík. Ez az eljárás nyilvánvaló módon átvihető arra az esetre, amikor $J$ gömbfelület. Ilyenkor az $R_s$ síkok szerepét a $J$ középpontján átmenő síkok játsszák, a vetítés pedig az $R_s$ síkra merőleges főkörív mentén történik. A megfelelő bizonyításokat elhagyjuk.

Másodszor *bebizonyítottuk a síkbeli variáció félig-additivitását,* ami teljes analógiában van az egyváltozós függvények variációjának félig-additivitásával. Ez a tulajdonság szintén átvihető arra az esetre, amikor az értelmezési tartomány gömbfelület; ennek bizonyítását szintén nem részletezzük.

## 3. §. A korlátos síkbeli variációjú függvények approximatív differenciálhatósága. Abszolút folytonos függvények

Az egyváltozós függvények esetében a variáció korlátossága maga után vonja a függvény deriváltjának majdnem mindenütt való létezését. Kétváltozós függvényeknél a síkbeli variációs korlátossága egymagában nem elegendő a teljes differenciál majdnem mindenütt való létezéséhez. (A következő paragrafusban meg fogom mutatni, hogy a síkbeli és a lineáris variáció egyidejű korlátossága már elegendő.) A síkbeli variáció korlátosságából mégis következik az approximatív teljes differenciál majdnem mindenütt való létezése (az approximatív teljes differenciál definícióját lásd pl. a [6] munkában). Ezt közvetlenül is be lehetne bizonyítani, egyszerűbb azonban arra a kész tételre hivatkozni, amely szerint korlátos *Tonelli*-féle variációval rendelkező függvénynek majdnem mindenütt van approximatív teljes differenciálja. Az előző paragrafusban megmutattuk, hogy a síkbeli variáció korlátosságából következik a *Tonelli*-féle variáció korlátossága. Ezek szerint igaz az alábbi tétel.

31. TÉTEL. *Korlátos síkbeli variációjú, folytonos függvénynek (a síkbeli Lebesgue-mértékre nézve) majdnem mindenütt létezik approximatív teljes differenciálja.*

* Azt, hogy $V_T(F)$ és $W(F)$ egyszerre véges, a szerzőtől függetlenül GEHÉR ISTVÁN is felismerte és bebizonyította (Egy integráltranszformációról, *I. Magy. Mat. Kongr. Közl.* (1950), 507—518). (*Szerk.*).

Most bevezetjük a kétváltozós függvények *abszolút folytonosságának* fogalmát.

23. definíció. A $J$ tartományon értelmezett, korlátos síkbeli variációjú, folytonos $F(\eta)$ függvényt *abszolút folytonosnak mondjuk, ha e függvény síkbeli variációja halmazfüggvényként tekintve abszolút folytonos, vagyis ha bármely* $\varepsilon > 0$ *számhoz található olyan* $\delta > 0$ *szám, hogy amennyiben az* $E \subset J$ *Borel-halmaz síkbeli mértéke nem nagyobb* $\delta$*-nál, az* $F(\eta)$ *függvény síkbeli variációja az* $E$ *halmazon legfeljebb* $\varepsilon$.

Kimutattuk, hogy a korlátos síkbeli variációjú függvényeknek majdnem mindenütt van approximatív teljes differenciáljuk. Előfordulhat, hogy az approximatív gradiens abszolút értékének síkbeli integrálja kisebb, mint a síkbeli variáció. Példa erre az $F(x, y) = F(x)$ hengerfüggvény, ahol $F(x)$ folytonos szinguláris függvény. Abszolút folytonos függvényeknél azonban az approximatív gradiens abszolút értékének síkbeli integrálja egyenlő a síkbeli variációval, hasonlóan ahhoz, ahogy az egyváltozós abszolút folytonos függvények variációja egyenlő a derivált abszolút értékének integráljával. Áttérünk ennek a bebizonyítására.

54. SEGÉDTÉTEL. *Legyen* $F(\eta)$ *az egységnégyzeten értelmezett folytonos függvény. Az* $F(\eta)$ *függvény approximatív gradiense abszolút értékének síkbeli Lebesgue-integrálja azon a halmazon, ahol ez a gradiens létezik, nem haladja meg* $F(\eta)$ *síkbeli variációját.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $E$ azon pontok halmaza, amelyekben az $F(\eta)$ függvény approximatív teljes differenciálja létezik. Osszuk fel az $E$ halmazt $E(\alpha, \beta, m, n)$ halmazokra oly módon, hogy álljon az $E(\alpha, \beta, m, n)$ halmaz $E$ mindazon pontjaiból, amelyekben az approximatív gradiens nagyobb, mint $m$, de nem nagyobb, mint $n$ és e gradiens irányának az $x$ tengellyel bezárt szöge nagyobb, mint $\alpha$, de nem nagyobb, mint $\beta$. Az $E$ halmaz és az $E(\alpha, \beta, m, n)$ halmazok *Borel*-mérhetők. Tekintsük $F(\eta)$ approximatív gradiense abszolút értékének integrálját valamely $E(\alpha, \beta, m, n)$ Borel-halmazon és $F(\eta)$ síkbeli variációját ugyanezen a halmazon. Fel fogjuk tenni, hogy a $\beta - \alpha$ szög és az $n - m$ különbség elég kicsi. Legyen az $\alpha$ és a $\beta$ irány által bezárt szög felezőjének iránya $\gamma$. Ismert tétel szerint (lásd pl. [6]) azon pontok $E_\gamma^*(\alpha, \beta, m, n) \subset E(\alpha, \beta, m, n)$ halmaza, amelyekben az $F(\eta)$ függvénynek van a $\gamma$ irány mentén approximatív deriváltja (egyébként ennek értéke $F_x \cos \gamma + F_y \sin \gamma$, ahol $F_x$ és $F_y$ az approximatív gradiens két komponense), ugyanakkora mértékkel rendelkezik, mint $E(\alpha, \beta, m, n)$. Azonkívül az $E_\gamma^*(\alpha, \beta, m, n)$ halmaz *Borel*-mérhető. Vezessünk be az $xy$ síkon új, $l\gamma$ derékszögű koordinátákat. Jelölje $E_{l_0}$ az $l\gamma$ sík $l = l_0$ egyenesének az $E_\gamma^*(\alpha, \beta, m, n)$ halmazzal közös részét. Tekintsük továbbá ezen az egyenesen az $F(\eta) = F(l_0, \gamma)$ függvényt mint egyváltozós függvényt és értelmezzük az $l\gamma$ sík $l = l_0$ egyenesén a $\Phi_F(l_0, t)$ „multiplicitásfüggvényt" úgy, hogy $\Phi_F(l_0, t)$ minden $t$ helyen egyenlő azon pontok számával, ahol $F(l_0, \gamma) = t$. Azt állítom, hogy az $lt$ sík bármely $l = l_0$ egyenese mentén a multiplicitásfüggvény integrálja nagyobb vagy egyenlő, mint $m \cdot \mathrm{mes}_1 E_{l_0}$. Ennek a bizonyítása teljesen analóg annak az ismert tételnek a bizonyításával (lásd pl. [6]), amely szerint a multiplicitásfüggvény integrálja nagyobb vagy egyenlő, mint a derivált abszolút értékének integrálja. Továbbá, *Fubini* tételét alkalmazva az $xy$ sík $E_\gamma^*(\alpha, \beta, m, n)$ halmazára és az $lt$ síkban e halmazra vonatkozó multiplicitásfüggvényre, azt kapjuk, hogy az említett multiplicitásfüggvény síkbeli integrálja nem kisebb, mint

$m \cdot \text{mes}_2\, E_\gamma^*(\alpha, \beta, m, n)$. Tekintsük most az $F(\eta)$ függvény síkbeli variációját az $E_\gamma^*(\alpha, \beta, m, n)$ halmazon. Az 50. segédtétel értelmében $F(\eta)$ síkbeli variációja az $E_\gamma^*(\alpha, \beta, m, n)$ halmazon nem kisebb, mint a multiplicitásfüggvény integrálja. Továbbá összegezve minden $E_\gamma^*(\alpha, \beta, m, n)$ halmazra (a variáció teljesen additív halmazfüggvény) és tekintetbe véve, hogy $|\alpha-\beta|$ és $|m-n|$ tetszés szerinti kicsi, kapjuk a segédtétel állítását.

55. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $y=f(x)$ az $[a, b]$ szakaszon abszolút folytonos, egyváltozós függvény. Legyen $M$ az $[a, b]$ szakaszon fekvő Borel-halmaz és $\Phi_{f,P}(y)$ a $P$ halmazon tekintett $f(x)$ függvény multiplicitásfüggvénye. Akkor*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f,M}(y)\,dy = \int_M |f'_{ap}(x)|\,dx,$$

*ahol $f'_{ap}$ az approximatív derivált.*

BIZONYÍTÁS. 1°. Legyen $M$ zárt halmaz. Jelölje $f_M(x)$ azt a függvényt, amely az $M$ halmazon $f(x)$-szel egyenlő és a közbenső intervallumokon lineáris. Az $f_M(x)$ függvény abszolút folytonos és ezért teljesül rá az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f_M,[a,b]}(y)\,dy = \int_a^b |f'_M(x)|\,dx$$

egyenlőség. De

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f_M,[a,b]}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f_M,M}(y)\,dy + \sum_i \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f_M,I_i}(y)\,dy,$$

ahol $\{I_i\}$ az $M$ halmazzal szomszédos intervallumok sorozata. Másrészt

$$\int_a^b |f'_M(x)|\,dx = \int_M |f'_M(x)|\,dx + \sum_i \int_{I_i} |f'_M(x)|\,dx,$$

és minthogy minden $i$-re

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f_M,I_i}(y)\,dy = \int_{I_i} |f'_M(x)|\,dx$$

és $f'_M = f'_{ap}$ majdnem mindenütt, azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f_M,M}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f,M}(y)\,dy = \int_M |f'_{ap}(x)|\,dx.$$

2°. Legyen $M$ tetszés szerinti *Borel*-halmaz. Legyen $\varepsilon>0$ tetszés szerinti. Adjunk meg egy olyan $\delta>0$ számot, hogy ha az egymást nem metsző intervallumokból álló $\{I_i\}$ rendszerre $\sum_i |I_i|<\delta$, akkor az $f$ függvénynek az $I_i$ intervallumokon vett variációinak összege legfeljebb $\varepsilon$. Válasszunk olyan $P \subset M$ zárt halmazt, amelyre

$\text{mes}_1\,(M-P)<\delta$. Akkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f,M-P}(y)\,dy<\varepsilon$$

és

$$\int_{M-P} |f'_{ap}(x)|\,dx<\varepsilon,$$

amiből következik az állítás helyessége a 2° esetben.

56. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(x, y)$ a 23. definícióban megadott értelemben abszolút folytonos függvény a $J$ tartományon. Akkor $F(x, y_0)$ mint az egyetlen $x$ változó függvénye majdnem minden $y_0$-ra abszolút folytonos.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy az $y_0$ értékeknek egy pozitív külső mértékű $Y$ halmazára $F(x, y)$ az $x$ változónak nem abszolút folytonos függvénye. Akkor található olyan $\varepsilon_0>0$ szám és pozitív külső mértékű $Y_1\subset Y$ halmaz, hogy bármekkora legyen is a $\delta>0$ szám, minden $y_0\in Y_1$ értékhez van egymást át nem fedő szakaszokból álló $\{[a^i_{\delta,y_0}, b^i_{\delta,y_0}]\}$ véges sorozat, amelyre

$$\sum_i |a^i_{\delta,y_0}, b^i_{\delta,y_0}|<\delta$$

és

$$\sum_i |F(b^i_{\delta,y_0})-F(a^i_{\delta,y_0})|>\varepsilon_0.$$

Legyen $\varepsilon_1=\overline{\text{mes}}_1(Y_1)\cdot\varepsilon_0$ és válasszunk olyan $\delta_1$ számot, hogy bármely, $\delta_1$-nél kisebb síkbeli mértékkel rendelkező síkbeli $M$ *Borel*-halmazra $W(F, M)<\frac{\varepsilon_1}{2}$. Minden $y_0\in Y_1$ ponthoz található az $y$ tengelynek tetszőlegesen kis hosszúságú $\Delta_{y_0}$ nyílt intervalluma úgy, hogy bármely $y_1\in\Delta_{y_0}$ pontra

$$\sum_i |F(b^i_{\delta,y_0}, y_1)-F(a^i_{\delta,y_0}, y_1)|>\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Ezek a $\Delta$ intervallumok az $Y_1$ halmazt a *Vitali*-féle értelemben befedik. *Vitali* tétele alapján válasszunk ki közülük egy egymást nem metsző és együttvéve majdnem az egész $Y_1$ halmazt befedő megszámlálható sorozatot. E sorozat mindegyik $\Delta=\Delta_{y_0}$ intervallumához képezzük azon $(x, y)$ pontok $G_i$ halmazát, amelyekre $x\in\sum_i[a^i_{\delta,y_0}, b^i_{\delta,y_0}]$ és $y\in\Delta_{y_0}$. Mindegyik ilyen halmaz nyílt és mértéke legfeljebb $\delta\cdot\text{mes}_1\,\Delta_{y_0}$. A $G_i$ halmazok páronkint nem metszik egymást és a $G=\sum_i G_i$ halmaz síkbeli mértéke legfeljebb $\delta$. Legyen $\delta<\delta_1$. Az 54. segédtétel szerint

$$W(F, G)\geqq \iint_{R_y} \Phi_{R_y}(F, G, x, t)\,dx\,dt\geqq\varepsilon_0\,\text{mes}_1\,(Y_1),$$

ahol $R_y$ az $yt$ sík. Ellentmondásra jutottunk.

32. TÉTEL. *Legyen $F(x, y)$ folytonos függvény a $J$ tartományon. Legyen $F(x, y)$ abszolút folytonos a 23. definícióban megadott értelemben. Akkor $F(x, y)$ approxima-*

*tív gradiense abszolút értékének az integrálja azon pontok halmazán, ahol az approximatív gradiens létezik, egyenlő az $F(x, y)$ függvény síkbeli variációjával.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszés szerinti. A 29. tétel értelmében található egymást nem metsző *Borel*-halmazokból álló $\{M_n\}$ sorozat és az $xyt$ térben fekvő, az $xy$ síkra merőleges síkokból álló $\{R_n\}$ sorozat úgy, hogy

$$\sum_s \iint_{R_s} \Phi_{R_s}(F, M_s, l, t)\,dl\,dt > W(F) - \varepsilon.$$

Legyen $l_s$ az $R_s$ sík és az $xy$ sík metszésvonala és $m_s$ a rá merőleges egyenes az $xy$ síkban. A már idézett tétel értelmében azon $\eta \in M_s$ pontok $M_s^*$ halmaza, ahol az $m_s$ irány szerinti approximatív derivált létezik és $F'_{m_s} = F_x \cos\gamma + F_y \sin\gamma$ (itt $F'_{m_s}$ az $m_s$ irány menti approximatív derivált, $\gamma$ az $\eta$ pontbeli approximatív gradiensnek az $x$ tengellyel bezárt szöge és $F_x$, $F_y$ a gradiens komponensei), *Borel*-halmaz és síkbeli mértéke megegyezik $M_s$ síkbeli mértékével.

Becsüljük meg az

$$\iint_{M_s^*} |\mathrm{grad}_A\, F(\eta)|\,dS$$

mennyiséget, ahol $\mathrm{grad}_A F(\eta)$ az $F(\eta)$ függvény approximatív gradiensét jelenti. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy $M_s^*$ definíciója értelmében $M_s^*$ bármelyik $\eta$ pontjában $|\mathrm{grad}_A F(\eta)| \geqq |F'_{m_s}(\eta)|$. Ily módon az *alulról* történő becsléshez elég az $|F'_{m_s}(\eta)|$ mennyiséget megbecsülni.

Az 55. segédtétel és *Fubini* tétele szerint

$$\iint_{R_s} \Phi_{R_s}(F, M_s^*, l, t)\,dl\,dt = \iint_{M_s^*} |F'_{m_s}|\,dx\,dy.$$

Másrészt

$$\iint_{R_s} \Phi(F, M_s - M_s^*, l, t)\,dl\,dt \leqq W(F, M_s - M_s^*) = 0,$$

ahonnan

$$\sum_s \iint_{M_s^*} |F'_{m_s}|\,dx\,dy \geqq W(F) - \varepsilon,$$

és ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Ha az egyváltozós $f(x)$ függvénynek az $[a, b]$ szakasz mindegyik pontjában van *véges* deriváltja, akkor $f(x)$ variációja az $[a, b]$ szakaszon egyenlő a derivált abszolút értékének e szakaszon vett integráljával, feltéve hogy ez az integrál véges. Bebizonyítjuk a kétváltozós függvényekre vonatkozó analóg tételt.

33. TÉTEL. *Legyen $F(x, y)$ a $J$ egységnégyzeten értelmezett, annak minden pontjában véges parciális deriváltakkal rendelkező és totálisan differenciálható függvény, és legyen a $|\mathrm{grad}\, F(x, y)|$ függvény integrálható:*

$$\iint_J |\mathrm{grad}\, F(x, y)|\,dx\,dy < +\infty.$$

*Akkor $F(x, y)$ abszolút folytonos függvény és, speciálisan,*

$$W(F) = \iint_J |\text{grad } F(x, y)| dx\, dy.$$

BIZONYÍTÁS. Ha az egyváltozós $f(x)$ függvény deriváltja minden pontban létezik és integrálható, akkor $f(x)$ abszolút folytonos. Ennélfogva ha $lm$ az $xy$ sík tetszés szerinti derékszögű koordinátarendszere, az $F(l, m)$ függvény $l$ szerint abszolút folytonos majdnem minden $m$-re és viszont.

Legyen most $\{R_s\}$ tetszés szerinti, az $xyt$ térben fekvő és az $xy$ síkra merőleges síkokból álló rendszer, és $\{M_s\}$ egymást páronkint nem metsző *Borel*-halmazokból álló rendszer. Legyen $R_s$ és $J$ metszésvonala $l_s$, és az $xy$ sík $l_s$-re merőleges egyenese $m_s$. Jelentse $F'_{m_s}(\eta)$ az $F(x, y)$ függvény $m_s$ irány szerinti deriváltját az $\eta$ pontban. Akkor

$$\iint_{M_s} |F'_{m_s}| dS \leqq \iint_{M_s} |\text{grad } F(\eta)| dS.$$

Minthogy $F(\eta)$ majdnem minden $l_s = l_s^0$ egyenesen abszolút folytonos, az 55. segédtétel alapján kapjuk:

$$\iint_{M_s} |F'_{m_s}(\eta)| dS = \int dl_s \int_{M_s} |F'_{m_s}(\eta)| dm_s = \int dl \int_{R_s} \Phi_{R_s}(F, M_s, l, t) dt,$$

tehát

$$\iint_{M_s} |\text{grad } F(\eta)| dS \geqq \iint_{R_s} \Phi_{R_s}(F, M_s, l_s, t) dl_s\, dt,$$

és így

$$\sum_{s=1}^{n} \iint_{R_s} \Phi_{R_s}(F, M_s, l_s, t) dl_s\, dt \leqq \iint_{\sum_{s=1}^{n} M_s} |\text{grad } F(\eta)| dS,$$

ebből pedig tekintettel arra, hogy az $\{R_s\}$ síkrendszer és az $\{M_s\}$ halmazrendszer tetszés szerinti, a 29. tétel segítségével adódik:

$$W(F) \leqq \iint_J |\text{grad } F(\eta)| dS < +\infty.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszés szerinti és a $\delta > 0$ szám olyan kicsi, hogy ha az $M$ *Borel*-halmaz síkbeli mértéke nem nagyobb $\delta$-nál, akkor

$$\iint_M |\text{grad } F(\eta)| dS < \varepsilon.$$

Legyen az $M \subset J$ *Borel*-halmaz síkbeli mértéke határozottan kisebb, mint $\delta$. Fedjük be $M$-et olyan, egymást nem metsző $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ négyzetek megszámlálható rendszerével, amelyek területének összege $< \delta$. Hindegyik $A_s$ négyzetre fennáll

$$W(F, A_s) \leqq \iint_{A_s} |\text{grad } F(\eta)| dS,$$

tehát

$$W(F, M) \leqq \sum_s W(F, A_s) \leqq \iint_{\sum_s A_s} |\operatorname{grad} F(\eta)| dS < \varepsilon,$$

vagyis az $F$ függvény abszolút folytonos. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

## 4. §. Korlátos variációjú függvények teljes differenciálja

Az egyváltozós függvények esetében a variáció korlátosságából következik, hogy a derivált egy teljes mértékű halmazon létezik és véges. Ennek természetes általánosításaként adódik az a kérdés, hogy milyen, a variáció korlátosságához hasonló jellegű feltételek elégségesek a kétváltozós függvények teljes differenciáljának létezéséhez.

Megjegyezzük, hogy *véges síkbeli variációval rendelkező $F(\eta)$ függvénynek lehet hogy egyetlen pontban sem létezik teljes differenciálja.*

Szintén könnyű szerkeszteni olyan függvényt, amely *véges lineáris variációjú és egy pontban sem differenciálható.*

Most meg fogjuk mutatni, hogy *a síkbeli és a lineáris variáció egyidejű korlátossága már maga után vonja a függvény teljes differenciáljának majdnem mindenütt való létezését.* Ehhez lényegesen felhasználjuk V. V. SZTYEPANOV egy tételét (lásd [11] vagy [6]).

34. TÉTEL (V. V. SZTYEPANOV). *Legyen $F(\eta)$ tetszés szerinti kétváltozós függvény. Akkor (a síkbeli Lebesgue-mértékre nézve) majdnem minden $\eta$ pontban, ahol $F(\eta)$-nak nincs teljes differenciálja, fennáll*

$$\overline{\lim_{\eta' \to \eta}} \left| \frac{F(\eta') - F(\eta)}{|\eta', \eta|} \right| = \infty.$$

35. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ az egységnégyzeten értelmezett kétváltozós folytonos függvény, amelynek lineáris variációja is, síkbeli variációja is véges. Akkor az $F(\eta)$ függvénynek majdnem mindenütt van teljes differenciálja (és a parciális deriváltak végesek).*

BIZONYÍTÁS. Legyen $E_1$ azon pontok halmaza, amelyekben $F(\eta)$-nak nincs teljes differenciálja, $E_2$ pedig azoké, amelyekben legalább az egyik parciális derivált végtelenné válik. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy az $E_1 + E_2$ halmaz síkbeli mértéke pozitív (az $E_1$, $E_2$ halmazok *Borel*-mérhetők). Akkor vagy $\operatorname{mes}_2(E_1) > 0$ és így *Sztyepanov* tétele szerint az $F(\eta)$ függvény felső deriváltszáma egy pozitív mértékű $E_3$ halmazon $\infty$-nel egyenlő, vagy $\operatorname{mes}_2(E_2) > 0$, tehát a felső deriváltszám megint egy pozitív mértékű halmazon $\infty$. Legyen például $\operatorname{mes}_2(E_1) = \mu > 0$ és legyen az $F(\eta)$ függvény felső deriváltszáma minden $\xi \in E_3$ pontban $\infty$.

Adjunk meg most egy tetszőlegesen nagy $T > 0$ számot. Minden $\xi \in E_3$ pontnak feleltessünk meg két $\xi$ középpontú, koncentrikus $K(\xi)$, $L(\xi)$ kört, amelyek közül az $L(\xi)$ kör sugara $K(\xi)$ sugarának kétszerese, a $K(\xi)$ kör pedig olyan, hogy kerületén van olyan $\eta$ pont, amelyre $\left| \frac{F(\eta) - F(\xi)}{|\eta, \xi|} \right| > T$ és $|\eta, \xi| < 1$.

Az $L(\xi)$ körök rendszere befedi az egész $E_3$ halmazt és így a síkra vonatkozó *Vitali*-féle tétel értelmében kiválasztható egymást nem metsző $L(\xi_1), \ldots, L(\xi_n)$ körökből álló véges $\sigma$ rendszer úgy, hogy az $E_3$ halmaznak a $\sigma$ rendszer köreinek egyesítésével alkotott metszete $\frac{\mu}{10}$-nél nagyobb mértékű legyen.

Tekintsük most az $F(\eta)$ függvényt az $r_i$ sugarú $L_i$ körben. Az $F(\eta)$ függvénynek a $K_i$ kör kerületén elhelyezkedő $\eta_i$ pontban felvett értéke és $F(\eta)$-nak a $\xi_i$ helyen felvett értéke között a különbség legalább $T \cdot r_i$.

Meghatározottság kedvéért legyen $F(\eta_i) \geqq F(\xi_i) + T \cdot r_i$. Akkor a $K_i$ körben minden olyan $t$ nívónak vannak pontjai, amelyre $F(\xi_i) \leqq t \leqq F(\xi_i) + T \cdot r_i$. Jelölje $\mathfrak{A}_i^{(1)}$ azon, $F(\xi_i)$ és $F(\xi_i) + T \cdot r_i$ közötti $t$ nívók összességét, amelyekre bármely $K_i$-beli $\xi \in E_t$ pont komponense teljesen $L_i$-ben fekszik. $\mathfrak{A}_i^{(1)}$ külső mértékét jelöljük $v_i^{(1)}$-gyel. Legyen $\mathfrak{A}_i^{(2)}$ azon, $F(\xi_i)$ és $F(\xi_i) + T \cdot r_i$ közötti $t$ nívók összessége, amelyek mindegyikéhez található olyan $K_i$-beli pont, hogy az e pontot tartalmazó komponens nem fekszik teljesen $L_i$-ben. $\mathfrak{A}_i^{(2)}$ külső mértékét jelöljük $v_i^{(2)}$-vel.

Vizsgáljuk az egyes $L_i$ körök hozzájárulását az $F(\eta)$ függvény lineáris és síkbeli variációjához. Valamely $L_i$ körnek a lineáris variációhoz való hozzájárulása a teljesen $L_i$-ben fekvő nívóhalmaz-komponensek révén legalább $v_i^{(1)}$. A síkbeli variációhoz adott járulék viszont legalább $v_i^{(2)} \cdot r_i$, mert $d$-nél nagyobb átmérőjű összefüggő halmaz *Hausdorff*-féle lineáris mértéke nem lehet kisebb, mint $d$.

Ezek szerint az $F(\eta)$ függvény lineáris és síkbeli variációjának $V(F) + W(F)$ összege legalább $\sum_{i=1}^{n} (v_i^{(1)} + v_i^{(2)} \cdot r_i)$. De $v_i^{(1)} + v_i^{(2)} \geqq T \cdot r_i$. Ennélfogva

$$V(F) + W(F) \geqq \sum_{i=1}^{n} T \cdot r_i^2.$$

Fennáll

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \cdot r_i^2 \geqq \frac{\mu}{10}.$$

Innen

$$W(F) + V(F) \geqq \frac{T \cdot \mu}{100}.$$

Minthogy $T$ tetszés szerinti, ebből következik, hogy legalább az egyik variáció nem korlátos.

A 35. tételt bebizonyítottuk.

## IV. fejezet

## A LINEÁRIS INTEGRÁL

Ebben a fejezetben *a ponttól pontig vett integrál, a primitív függvény és a derivált* fogalmával analóg fogalmakat szerkesztünk meg *kétváltozós függvények esetére.*

Sima $u(x, y)$ függvényt az $u_x$, $u_y$ parciális deriváltak additív állandótól eltekintve meghatároznak. Az egyik függvény azonban „*fölösleges*”, ami az $u_{xy} = u_{yx}$ „*kapcsolat*” fennállásában fejeződik ki (ha $u(x, y)$ eléggé sima). Mi a kétváltozós függvények esetében olyan *derivált* fogalmat javasolunk, *amely kétváltozós számértékű függvény, és az elég sima függvények osztályában additív állandótól eltekintve meghatározza a primitív függvényt.* Bevezetjük bizonyos, *„ponttól pontig vett" integrál* fogalmát is, amelyet a megszokott összefüggések kapcsolnak a primitív függvény és a derivált fogalmához: *a primitív függvény növekménye egyenlő a derivált integráljával (a kétszer differenciálható függvények osztályában); a határozatlan integrál deriváltja majdnem mindenütt létezik és egyenlő az integráljel alatt álló függvénnyel.* Végül az egyváltozós függvények analógiájára sima függvény *deriváltja abszolút értékének az integrálja megadja a ponttól pontig vett variációt.*

A lineáris integrál itt javasolt konstrukciója *nem tekinthető véglegesnek*. Számos kérdés egyelőre nyitva maradt. Ezzel kapcsolatban, továbbá hely hiányában, ezt a fejezetet vázlatosan írtuk meg, rövidítve, és egyes helyeken a bizonyításokat is elhagytuk. Mindazonáltal, tekintettel arra, hogy nézetünk szerint itt eddig fel nem fedezett kapcsolatokat tárunk fel, úgy határoztunk, hogy kifejtésükről nem mondunk le teljesen.

## 1. §. Kétváltozós függvény ponttól pontig vett integrálja

E fejezet folyamán végig fel fogjuk tenni, hogy a $J$ értelmezési tartomány *kétdimenziós gömbfelület* (bár ez a feltevés éppen az első paragrafusban nem lényeges).

Legyen $f(\eta)$ a $J$ tartományon értelmezett, nem feltétlenül folytonos, de bármely rektifikálható görbén integrálható függvény.

Legyen $\xi \in J$ valamely rögzített pont. Értelmezzük *az $f(\eta)$ függvény $\xi$-től $\zeta$-ig vett integrálját* (jele: $\int\limits_{\xi}^{\zeta} f(\eta)\,d\eta$) a következőképpen: legyen $\Omega$ azon pontok halmaza, ahol $f(\eta)=0$. Legyen $\varepsilon>0$. Jelentse $\Omega_\varepsilon$ az $\Omega$ halmaz $\varepsilon$-sugarú nyílt környezetét. Legyen a szokásos módon

$$f^+(\eta)=\begin{cases} f(\eta) & \text{ha } f(\eta)\geqq 0,\\ 0 & \text{ha } f(\eta)<0,\end{cases}$$

$$f^-(\eta)=\begin{cases} 0 & \text{ha } f(\eta)>0,\\ f(\eta) & \text{ha } f(\eta)\leqq 0.\end{cases}$$

1. Jelentse $(\varepsilon)\int\limits_{\xi}^{\zeta} f^+(\eta)\,d\eta$ az $f^+(\eta)$ függvénynek a $\xi,\zeta$ pontokat összekötő összes lehetséges rektifikálható egyszerű ívek mentén vett integráljainak alsó határát, ahol *az integrált az ívhosszúság szerint képezzük, de az ívnek csak az $\Omega_\varepsilon$ halmaz komplementumával alkotott metszetére terjesztjük ki.*

2. Legyen $(\varepsilon)\int\limits_{\xi}^{\zeta} f^-(\eta)\,d\eta=-(\varepsilon)\int\limits_{\xi}^{\zeta}|f^-(\eta)|\,d\eta.$

3. Legyen $\int\limits_{\xi}^{\zeta} f^\pm(\eta)\,d\eta=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon)\int\limits_{\xi}^{\zeta} f^\pm(\eta)\,d\eta.$

Minthogy $\varepsilon \to 0$ esetén $(\varepsilon)\int_{\xi}^{\zeta} f^{\pm}(\eta)\,d\eta$ monoton változik, ezek a határértékek léteznek.

4. Legyen $\int_{\xi}^{\zeta} f(\eta)\,d\eta = \int_{\xi}^{\zeta} f^{+}(\eta)\,d\eta + \int_{\xi}^{\zeta} f^{-}(\eta)\,d\eta$.

Az így definiált integrált *az $f(\eta)$ függvény $\xi$ ponttól $\zeta$ pontig vett lineáris integráljának* fogjuk nevezni.

Megemlítjük az általunk szerkesztett lineáris integrál néhány nyilvánvaló tulajdonságát.

A) Bármely $f(\eta)$ függvényre és $\xi, \zeta$ pontokra

$$\int_{\xi}^{\zeta} f(\eta)\,d\eta = \int_{\zeta}^{\xi} f(\eta)\,d\eta.$$

B) Tetszés szerinti $K$ konstansra

$$\int_{\xi}^{\zeta} K\cdot f(\eta)\,d\eta = K\cdot\int_{\xi}^{\zeta} f(\eta)\,d\eta.$$

C) Ha $f(\eta)$ nemnegatív függvény és $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ tetszés szerinti pontok, akkor

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\eta)\,d\eta + \int_{\xi_2}^{\xi_3} f(\eta)\,d\eta \geqq \int_{\xi_1}^{\xi_3} f(\eta)\,d\eta.$$

D) Ha $f(\eta)$ és $\varphi(\eta)$ két nemnegatív függvény, $\xi$ és $\zeta$ pedig két tetszés szerinti pont, akkor

$$\int_{\xi}^{\zeta} [f(\eta) + \varphi(\eta)]\,d\eta \geqq \int_{\xi}^{\zeta} f(\eta)\,d\eta + \int_{\xi}^{\zeta} \varphi(\eta)\,d\eta.$$

E) Ha $f(\eta)$ folytonos függvény, akkor $\Phi(\xi, \zeta) = \int_{\xi}^{\zeta} f(\eta)\,d\eta$ a $\xi, \zeta$ változó-párnak folytonos függvénye.

F) Ha a folytonos függvényekből álló $\{f_n(\eta)\}$ sorozat egyenletesen tart $f_0(\eta)$-hoz, akkor az $\int_{\xi}^{\zeta} f_n(\eta)\,d\eta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat egyenletesen tart az $\int_{\xi}^{\zeta} f_0(\eta)\,d\eta$ értékhez.

*G)*

$$\int_{\xi}^{\zeta} 1\cdot d\eta = \varrho(\xi, \zeta).$$

A lineáris integrállal kapcsolatban különleges szerepe van *az integrandus folytonos differenciálhatóságának.* Abban az esetben, amikor az integráljel alatt álló $f(\eta)$ függvény folytonosan differenciálható, az integrál definíciója a következővel helyettesíthető: az $\int_{\xi}^{\zeta} f(\eta)\,d\eta$ integrál egyenlő $f(\eta)$-nak a $\xi, \zeta$ pontokat összekötő $L_n$ ívek sorozata mentén vett integráljai határértékével azon feltétel mellett, hogy az $|f(\eta)|$ függvény $L_n$ görbe menti integrálja az $|f(\eta)|$ függvénynek a $\xi$, $\zeta$ pontokat összekötő összes lehetséges ívek mentén képezett integráljainak alsó határához tart. Ehhez fel kell tenni, hogy $f(\eta)$ integráljának a határértéke egyértelműen meg van határozva. Ez az egyértelműség bizonyításra szorul. Mi több, folytonos függvényekre ez nem is teljesül, amint azt egy E. M. LANGYISZTÓL származó példa mutatja. Viszont folytonosan differenciálható függvényeknél az egyértelműség bebizonyítható. E bizonyítás során alapvető szerepet játszik az alábbi segédtétel:

57. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $f(\eta)$ folytonosan differenciálható függvény és $K$ olyan kontinuum, amelynek minden pontjában $f(\eta)=0$. Legyen $\xi$ és $\zeta$ a $K$ kontinuum két tetszés szerinti pontja. Akkor bármely $\varepsilon>0$ számhoz található a $\xi,\zeta$ pontokat összekötő $L$ rektifikálható egyszerű ív, amelynek mentén*

$$\int_L |f(\eta)|\,d\sigma<\varepsilon.$$

Az 57. segédtétel felhasználásával különösebb nehézség nélkül bebizonyítható maga az említett tétel, amelyet most még egyszer megfogalmazunk.

36. TÉTEL. *Legyen $f(\eta)$ a $J$ gömbfelületen értelmezett, folytonosan differenciálható függvény. Legyen $\xi$ és $\zeta$ a $J$ értelmezési tartomány két tetszés szerinti pontja. Legyen $M$ az $|f(\eta)|$ függvény $\xi,\zeta$ pontokat összekötő, rektifikálható ívek mentén vett integráljainak alsó határa. Akkor bármely $\varepsilon>0$ számhoz található olyan $\delta>0$, hogy hacsak $L$ a $\xi,\zeta$ pontokat összekötő, rektifikálható ív és*

$$\int_L |f(\eta)|\,d\sigma<M+\delta,\quad \textit{akkor}\quad \left|\int_L f(\eta)\,d\sigma-\int_\xi^\zeta f(\eta)\,d\eta\right|<\varepsilon.$$

Az 57. segédtétel és a 36. tétel bizonyítását helyszűke miatt elhagyjuk. E tételeket a továbbiakban sehol sem fogjuk felhasználni. Megjegyezzük még, hogy azt, hogy $|f(\eta)|$ integrálja valamely egyszerű íven felvegye minimumát, a függvény többszöri differenciálhatósága sem biztosítja. Ehhez elég egy olyan nemnegatív, többször differenciálható függvényt tekinteni, amely csak valamely lokálisan nem összefüggő kontinuumon válik nullává.

Az a kérdés, hogy az 57. segédtételben és a 36. tételben a folytonos differenciálhatóság feltétele lényeges-e, egyelőre nyitott.

## 2. §. Kétváltozós függvény deriváltja és primitív függvénye

Az egyváltozós függvények esetében a derivált, konstanstól eltekintve, egyértelműen meghatározza a primitív függvényt, ha az utóbbit a mindenütt differenciálható függvények osztályában keressük.

Kétváltozós függvényeknél a derivált és a primitív függvény fogalma hiányzik. Az a feladatunk, hogy a *derivált* és a *primitív függvény* fogalmával analóg fogalmakat vezessünk be erre az esetre. Függvényeink értelmezési tartománya a $J$ gömbfelület lesz.

Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény $J$-n és $\xi$ a $J$ tartomány valamely pontja. Legyen $K_\zeta \not\ni \xi$ valamely reguláris nívóhalmaz-komponens, $\zeta\in K_\zeta$, és tegyük fel, hogy a $\zeta$ pontban az $F(\eta)$ függvénynek van teljes differenciálja. Legyen $f(\zeta)=|\text{grad } F(\zeta)|$, ha $K_\zeta$ a $\xi$ pontra nézve növekedési komponens, és $f(\zeta)=-|\text{grad } F(\zeta)|$, ha $K_\zeta$ fogyási komponens. Ha a $\zeta$ pontban $F(\eta)$-nak van teljes differenciálja és $K_\zeta$ nem reguláris komponens vagy $K_\zeta\ni\xi$, akkor legyen $f(\zeta)=0$. Ha a $\zeta$ pontban $F(\eta)$ teljes differenciálja létezik és nullával egyenlő, akkor legyen mindenképpen $f(\zeta)=0$. Végül azokban a pontokban, ahol $F(\eta)$-nak nincs teljes differenciálja, az $f(\eta)$ függvényt nem értelmezzük. Az ily módon megadott $f(\eta)$ függvényt *a $F(\eta)$ függvény $\xi$ pontra vonatkozó deriváltjának* fogjuk nevezni. A $F(\eta)$ függvényt $f(\eta)$ *primitív függvényének* fogjuk nevezni.

Ahhoz, hogy a deriváltnak ez a definíciója teljes legyen, meg kell mutatni, hogy azon reguláris komponensek pontjaiban, amelyek se nem növekedési, se nem fogyási komponensek, $|\text{grad } F(\eta)|=0$, hacsak grad $F(\eta)$ létezik. De valóban, ha $\zeta \in K$, ahol $K \not\ni \xi$ valamely reguláris komponens, továbbá grad $F(\zeta)$ létezik és nem nulla, akkor egy eléggé rövid, $\zeta$ középpontú, a grad $F(\zeta)$ vektorral párhuzamos szakaszon tekintve az $F(\eta)$ függvény a $\zeta$ pontban szigorúan monoton. Ebből következik, hogy $K$ vagy növekedési, vagy fogyási komponens.

Alapvető feladatunk annak a megmutatása, hogy *a kétszer differenciálható $F(\eta)$ függvények osztályában a primitív függvényt az $f(\eta)$ derivált (additív állandótól eltekintve) egyértelműen meghatározza.* Ennek során be fogjuk látni, hogy *a primitív függvény növekménye egyenlő a derivált lineáris integráljával.*

58. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszon értelmezett egyváltozós függvény, amely teljesíti a Lipschitz-feltételt. Legyen $Q$ az $a$, $b$ pontokat tartalmazó zárt halmaz és $G=[a, b]-Q$. Tegyük fel, hogy a $G$ halmazt alkotó mindegyik $(\alpha, \beta)$ „szomszédos" intervallumhoz meg van adva az $f(\beta)-f(\alpha)$ különbség. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény $Q$ pontjaiban felvett értékkészletének az $y$ tengelyre való vetülete nulla mértékű. Akkor ezzel az $f(b)-f(a)$ különbség egyértelműen meg van határozva és*

$$f(b)-f(a)=\sum [f(\beta)-f(\alpha)],$$

*ahol az összegezés az összes „szomszédos" intervallumra történik.*

Ez a segédtétel nehézség nélkül adódik az egyetlen valós változójú függvények elméletének általános tételeiből.

24. definíció. Legyen $F(\eta)$ a $J$ gömbfelületen értelmezett differenciálható függvény, $\xi$ a gömbfelület rögzített pontja és $f(\eta)$ az $F(\eta)$ függvény deriváltja (a $\xi$ pontra vonatkozóan). Jelöljük $\Omega$-val azon pontok halmazát, ahol $f(\eta)=0$. Nevezzük speciális halmaznak és jelöljük $\mho$-val az $\Omega$ halmaz lezárását: $\mho=\overline{\Omega}$.

A definíció értelmében a $\mho$ halmazhoz tartoznak:

*a)* azok a pontok, amelyekben grad $F(\eta)=0$,

*b)* a nem reguláris komponensek pontjai,

*c)* a $K\ni\xi$ komponens pontjai,

*d)* az *a)*$-$*c)* típusú pontok egyesített halmazának torlódási pontjai.

Legyen az $F(\eta)$ függvény folytonosan differenciálható. Akkor azoknak a pontoknak a halmaza, ahol grad $F(\eta)=0$, zárt. A nem szétválasztó komponensek mindig csupa olyan pontokból állnak, amelyekben grad $F(\eta)=0$. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben mindegyik nem reguláris komponens tartalmaz olyan $\zeta$ pontot, ahol grad $F(\zeta)=0$.

59. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonosan differenciálható függvény és $K$ e függvény olyan nívóhalmaz-komponense, amelynek minden pontjában* grad $F(\eta)\neq 0$. *Akkor $K$ topologikus kör.*

BIZONYÍTÁS. *Young* tétele [13] szerint minden $\eta\in K$ pontnak van olyan $U(\eta)$ környezete, amelyben $K$ folytonosan differenciálható egyszerű ív. Ebből következik, hogy $K$ lokálisan összefüggő és nincs elágazási pontja. A topológiából ismeretes, hogy a gömbfelületen elhelyezkedő, végpontot és elágazási pontot nem tartalmazó, lokálisan összefüggő kontinuum csak topologikus kör lehet. Egyébként a mi esetünkre a bizonyítás könnyen elvégezhető közvetlenül is.

Következmény. *Ha $F(\eta)$ folytonosan differenciálható függvény és $K$ e függvény valamely nem reguláris nívóhalmaz-komponense, akkor $K$ tartalmaz olyan $\zeta$ pontot, amelyben* grad $F(\zeta)=0$.

Megemlítjük, hogy ha nem követeljük meg az $F(\eta)$ függvény folytonos differenciálhatóságát, akkor az 59. segédtétel és következménye nem érvényes.

Folytonosan differenciálható függvényekre ily módon megmutattuk, hogy minden, az $\Omega$ halmaz legalább egy pontját tartalmazó nívó (kivéve esetleg a $\xi$ pontot tartalmazót) tartalmaz olyan pontot is, amelyben grad $F(\eta)=0$. Ha most $\eta\in\mho=\overline{\Omega}$, akkor $J$ kompaktsága és $F(\eta)$ folytonos differenciálhatósága következtében az $E_{F(\eta)}$ nívóhalmaz is tartalmaz olyan $\eta'$ pontot, amelyben grad $F(\eta')=0$. Ezzel bebizonyítottuk az alábbi segédtételt.

60. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonosan differenciálható függvény. $F(\eta)$ mindegyik, a $\mho$ speciális halmazt metsző nívóhalmazának (kivéve esetleg az $E_{F(\xi)}$ halmazt) van olyan pontja, ahol* grad $F=0$.

A 60. segédtételből és a 15. tételből azonnal adódik a következő.

61. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ kétszer differenciálható függvény. Akkor az $F(\eta)$ függvénynek a $\mho$ speciális halmazon felvett értékkészlete nulla mértékű (a t tengelyen).*

61'. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonosan differenciálható függvény és $K_1, K_2$ ugyanannak az $E_t$ nívóhalmaznak két különböző komponense. Akkor a $\mho$ speciális halmaz a $K_1, K_2$ komponenseket elválasztja egymástól. Pontosabban: vagy található a $K_1, K_2$ komponenseket egymástól elválasztó nem reguláris komponens, vagy található a $K_1, K_2$ komponenseket elválasztó olyan komponens, amelynek minden pontjában* grad $F=0$.

BIZONYÍTÁS. Tekintsük a $T_F$ egydimenziós fát. Legyen $l_1=\tau_F(K_1)$ és $l_2=\tau_F(K_2)$. Legyen $\sigma$ az $l_1, l_2$ végpontokkal rendelkező egyszerű ív $T_F$-ben. Ha a $\sigma$ íven található $l_0 \neq l_1, l_2$ elágazási pont, akkor a bizonyítás kész. Ellenkező esetben tekintsük $\sigma$-nak egy $l_0$ pontját, ahol $F^*(l)$ a $\sigma$ íven tekintve maximális értéket vesz fel, ha $\sigma$-nak legalább egy pontjában $F^*(l)>F^*(l_1)=F^*(l_2)$, és egy $\tilde{l}_0$ pontot, ahol $F^*(l)$ a $\sigma$ íven minimális értéket vesz fel, ha az előbbi feltétel nem teljesül. Minthogy $l_0$ (illetve $\tilde{l}_0$) a $\sigma$ ív belső pontja, valamely környezetében $\sigma$-nak, feltevés szerint, nincs elágazási pontja. De akkor $l_0$ (illetve $\tilde{l}_0$) valamely $T_F$-beli kis környezete benne van $\sigma$-ban, és így az $L_0=\tau_F^{-1}(l_0)$ (ill. $\tilde{L}_0=\tau_F^{-1}(\tilde{l}_0)$) komponens csupa extrémum-helyből áll, vagyis az $L_0$ (ill. $\tilde{L}_0$) halmazon grad $F(\eta)=0$. A segédtételt bebizonyítottuk.

62. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonosan differenciálható függvény, $\mho$ e függvény speciális halmaza és $f(\eta)$ a ($\xi$ pontra vonatkozó) derivált. Legyen $\eta_0 \in C\mho$. Akkor az $f(\eta)$ függvény az $\eta_0$ pontban folytonos.*

BIZONYÍTÁS. Ha a $K \ni \eta_0$ komponens se nem növekedési, se nem fogyási komponens, akkor, amint megmutattuk, $f(\eta)\equiv 0$ a $K$ halmazon, következésképpen $\eta_0 \in \mho$, ami nem lehetséges. Meghatározottság kedvéért legyen $K$ növekedési komponens (a $\xi$ pontra vonatkozóan). Tegyük fel, hogy $K$ elválasztja a $\xi, \zeta$ pontokat. Legyen $\sigma$ az $l_\xi, l_\zeta$ végpontokkal rendelkező egyszerű ív $T_F$-ben és $l_0=\tau_F(K)$. Először is $l_0$ elég kis környezetében a $\sigma$ ív nem tartalmaz elágazási pontot. Valóban, ellenkező esetben az ilyen elágazási pontok inverz képei — $J$-ben fekvő nem reguláris komponensek — metszenék $\eta_0$ bármilyen kis környezetét és így $\eta_0 \in \mho$ volna. Megmutatjuk továbbá, hogy $l_0$ kis környezetében $\sigma$ minden pontja szigorú növekedési hely ($l_\xi$-re nézve). Csakugyan, ha $F^*(l_1)=F^*(l_2)$ és az $\overset{\frown}{l_1 l_2}$ íven nincs elágazási pont, akkor található az $l_1 l_2$ pontoktól különböző $l_3 \in \overset{\frown}{l_1 l_2}$ pont, ahol $F^*(l_3)$ maximumot vagy minimumot ér el. Ekkor a $\tilde{K}=\tau_F^{-1}(l_3)$ komponens elválasztja egymástól a $\tau_F^{-1}(l_1), \tau_F^{-1}(l_2)$ komponenseket és egyúttal a $\xi$ vagy a $\zeta$ pontot elválasztja $K$-tól, végül a $\tilde{K}$ komponensen grad $F(\eta)\equiv 0$. Következésképpen ha $l_0$ bármilyen kis környezetében található lenne két pont, amelyben $F^*(l)$ ugyanazt az értéket veszi fel, akkor fennállna $\eta_0 \in \overline{\Omega} \subset \mho$, ez pedig lehetetlen. Tehát $l_0$ valamely kis környezetében $\sigma$ mindegyik pontja növekedési pont $l_\xi$-re nézve. Minthogy $l_0$ környezetében nincs elágazási pont, $\eta_0$ elég kis környezetében minden pont növekedési komponenshez tartozik. Arra az esetre, amikor $K$ fogyási komponens, a bizonyítás majdnem szóról szóra megismételhető. Ennélfogva $\eta_0$ elég kis környezetében $f(\eta)$ állandó előjelű. De |grad $F(\eta)$| folytonos függvény. Ebből következik a segédtétel állítása.

Egyben bebizonyítottuk az alábbi állítást is.

63. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonosan differenciálható függvény és $\mho$ e függvény speciális halmaza. Akkor bármely szomszédos tartományon az $f(\eta)$ derivált állandó előjelű. Itt, mint rendesen, $\mho$-val szomszédos tartománynak nevezzük a $C\mho$ nyílt halmaz tetszés szerinti komponensét.*

Az eddigiekben (a 61. segédtétel kivételével) az $F(\eta)$ függvénynek mindig csak a folytonos differenciálhatóságát tettük fel. Most áttérünk a kétszer differenciálható függvények vizsgálatára.

64. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ kétszer differenciálható függvény és $\mho$ e függvény speciális halmaza. Akkor $\mho$ mindegyik komponensén az $F(\eta)$ függvény állandó.*

A bizonyítás közvetlenül adódik a 61. segédtételből.

65. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ kétszer differenciálható függvény, $F(\eta)$ speciális halmaza $\mho$ és $G$ valamely a $\mho$ halmazzal szomszédos tartomány. Akkor $\overline{G}$ nem tartalmaz ugyanazon nívó két különböző komponenséhez tartozó pontokat.*

BIZONYÍTÁS. Ez a segédtétel a 61. segédtételből következik. Valóban, ha $a, b \in \overline{G} \cap E_t$, ahol $a$ és $b$ az $E_t$ nívóhalmaz két különböző $K_1, K_2$ komponenséhez tartozik, akkor a 61. segédtétel szerint található az $a, b$ pontokat elválasztó $K \subset \mho$ komponens. Legyenek $U(a)$, $U(b)$ az $a$, $b$ pontok olyan környezetei, amelyek nem metszik a $K$ halmazt. Akkor az $a' \in U(a) \cap G$, $b' \in U(b) \cap G$ pontokat a $K \subset \mho$ komponens elválasztja egymástól és így azok nem tartozhatnak a $C\mho$ nyílt halmaz ugyanazon $G$ komponenséhez.

66. SEGGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ kétszer differenciálható függvény, $\xi \in J$ valamely rögzített pont, $\mho$ a speciális halmaz és $G$ a $\mho$-val szomszédos tartományok egyike. Legyen $D$ a $G$ tartomány határa. Akkor:*

1. *Ha $G \neq C\mho$, akkor $D$ legalább egy és legfeljebb két komponense szétválasztja a gömbfelületet. Legyenek ezek $D_1$ és $D_2$.*

2. *Ha a $K$ nívóhalmaz-komponens metszi a $G$ tartományt, akkor $K \subset \overline{G} - D_1 - D_2$.*

BIZONYÍTÁS. Először bizonyítsuk be az 1. állítást. Legyen $G \neq C\mho$. Legyen $a \in C\mho - G$. Valamely $D_1 \subset D$ komponens az $a$ pontot elválasztja $G$-től és így szétválasztja a gömbfelületet. Legyen most $D_1, D_2, D_3$ a $D$ halmaz három komponense, amelyek mindegyike szétválasztja a gömbfelületet. Ha közülük kettő, például $D_1$ és $D_2$ *ugyanazon* $K \subset E_t$ komponenshez tartozik, akkor $K$ a gömbfelületet legalább három részre osztja, vagyis $K \subset \mho$. Ennélfogva a J tétel szerint $D_1$ és $D_2$, minthogy $CG$ ugyanazon komponenséhez tartozik, $G$ határának is ugyanahhoz a komponenséhez tartozik.

Ezek szerint a $D_1, D_2, D_3$ halmazoknak *különböző* nívóhalmaz-komponensekhez kell tartozniuk. A 65. segédtétel értelmében $D_1, D_2$ és $D_3$ három különböző $t_1, t_2, t_3$ nívóhoz tartozik. Meghatározottság kedvéért legyen $t_1 < t_2 < t_3$. Akkor $E_{t_2}$ elválasztja egymástól a $D_1, D_3$ halmazokat. Tegyük fel, hogy a $K \subset E_{t_2}$ komponens elválasztja $D_1$-et $D_3$-tól. $K \cap G \neq 0$, mert különben $G$ nem volna összefüggő. A 65. segédtétel szerint $D_2 \cap K \neq 0$. Akkor egyrészt $D_2 \subset K$, másrészt $D_2$ nem választhatja el $D_1$-et $D_3$-tól, következésképpen az egész $K$ komponens a $J$ gömbfelületet legalább három részre osztja. Tehát $K \subset \mho$, és $G$ nem összefüggő, mert $K$ elválasztja a $D_1, D_3$ halmazokat.

Az 1. pontot bebizonyítottuk.

Most bizonyítsuk be a 2. állítást. Legyen $K$ az a komponens, amelyről az állításban szó van. Először megmutatjuk, hogy $K \cap D_1 = 0$, ahol $D_1$ a $G$ halmaz $D$ határának $J$-t szétválasztó komponense. Tegyük fel, hogy $K \cap D_1 \neq 0$. Akkor $D_1 \subset K$. Legyen $\eta_1 \in K - D_1$. Ha $|\text{grad}\, F(\eta_1)| \neq 0$, akkor $\eta$ bármely környezetében található két olyan pont, amelyeket a $K$ komponens elválaszt. Minthogy $D_1$ nem választja szét az $\eta$ pont elég kis környezetét, azt kapjuk, hogy a $K$ komponens nem reguláris, tehát $K \subset \mho$ és $K \cap G = 0$. Ha viszont $\eta \in K$ esetén $\text{grad}\, F(\eta) \equiv 0$, akkor $K \subset \mho$ és megint $K \cap G = 0$.

Ezek szerint $K$ nem metszi $G$ határának a $J$ gömbfelületet szétválasztó komponenseit. Azt kell még bebizonyítanunk, hogy $K \subset \overline{G}$. Valóban, legyen $\zeta \in K \cap CG$. Akkor $G$ határának *egy* komponense a $\zeta$ pontot elválasztja $G$ minden pontjától. Ez a komponens szétválasztja $J$-t, tehát csak $D_1$ vagy $D_2$ lehet, és metszi a $K$ halmazt, ez pedig, amint fentebb megmutattuk, nem lehetséges. A segédtételt bebizonyítottuk.

67. SEGÉDTÉTEL. *A 66. segédtétel feltételei mellett a $\overline{G}$ zárt halmazon tekintett $F(\eta)$ függvény maximumát és minimumát a $\mho$ halmazhoz tartozó pontokban veszi fel. A maximum-helyek $G$ határának ugyanazon komponensébe esnek, hasonlóképpen a minimum-helyek is. Ha $G$ határának van a gömbfelületet szétválasztó komponense, akkor minden ilyen komponensen $F(\eta)$ eléri $\overline{G}$-beli maximumát vagy minimumát.*

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $F(\eta)$ az $\eta \in G$ pontban eléri maximumát (minimumát). Akkor $|\text{grad}\, F(\eta)| \neq 0$, és így találhatók $\eta$-hoz tetszés szerint közeli $\eta'$ pontok, amelyekben $F(\eta') > F(\eta)$ (ill. $F(\eta') < F(\eta)$). Minthogy $G$ nyílt halmaz, ez nem lehetséges. Továbbá a maximum (minimum) elérése nem történhet meg $G$ határának két különböző komponensén, ugyanis a 65. segédtétel értelmében $G$ határának két ilyen komponense *egyetlen* $K \subset E_t$ *komponenshez* tartozna. Amint az imént megmutattuk, $K \subset CG$, és a J tétel értelmében $G$ határának vizsgált komponensei egybeesnének.

Végül legyen $D_1$ a $G$ tartomány határának a gömbfelületet szétválasztó komponense. Tegyük fel, hogy $F(\eta)$ se maximumát, se minimumát nem veszi fel $D_1$-en. Legyen $\eta_1 \in \overline{G}$ egy maximum-hely, $\eta_2 \in \overline{G}$ pedig egy minimum-hely. Legyen $F(\eta_1) = t_1$, $F(\eta_2) = t_2$ és $F(\eta) = t$, ahol $\eta \in D_1$. Akkor $t_1 > t > t_2$, és így valamely $K \subset E_t$, $K \cap G \neq 0$ komponens elválasztja az $\eta_1, \eta_2$ pontokat, mert ellenkező esetben $K \subset CG$ elválasztja $\eta_1$ valamely környezetét $\eta_2$ valamely környezetétől, vagyis szétválasztja $G$-t. De ha $K\cap G\neq 0$, akkor a 66. segédtétel szerint $K\cap D_1=0$, azaz $E_t$ két különböző komponense, ti. $K$ és a $D_1$-et tartalmazó komponens, metszi a $\overline{G}$ halmazt, ez pedig ellentmond a 65. segédtételnek. A 67. segédtételt bebizonyítottuk.

68. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ kétszer differenciálható függvény, $\xi\in J$ valamely rögzített pont, $\mho$ a speciális halmaz, $G$ egy $\mho$-val szomszédos tartomány, végül $U$ a $\overline{G}$ halmazban foglalt nyílt és összefüggő halmaz. Akkor az $F(\eta)$ függvény $\overline{U}$-beli maximumát és minimumát felveszi $U$ határán, hacsak $U$ nem tartalmazza $G$ határának azt a komponensét, ahol a függvény eléri $\overline{G}$-beli maximumát (ill. minimumát).*

BIZONYÍTÁS. Meghatározottság kedvéért tekintsük $F(\eta)$ maximumát az $\overline{U}$ halmazon. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy ez a maximum az $\eta_0\in U$ pontban éretik el. Jelöljük $D'$-vel $G$ határának azt a komponensét, amelyen a 66. segédtétel értelmében az $F(\eta)$ függvény felveszi $\overline{G}$-beli maximumát. Ha $U\supset D'$, akkor a segédtétel állítása triviális. Ellenkező esetben nyilván $D'\cap\overline{U}=0$, mert különben a maximum felvétele $U$ határán történnék. A topológiai $C$ tétel értelmében $U$ határának van olyan $L$ komponense, amely a $D'$ halmazt $U$ minden pontjától elválasztja. Legyen $F(\eta_0)=t_1$, $F(\eta)=t_2$, ahol $\eta\in L'$, és $t_3=\max F(\eta)$, miközben $\eta$ befutja az $L$ halmazt. Nyilvánvaló, hogy $t_3<t_1<t_2$. De akkor a $t_1$ nívó valamely $L'$ komponense elválasztja az $L$ halmazt $D'$-től, $G$ összefüggő volta miatt $L'\cap\overline{G}\neq 0$, és $L'\not\ni\eta_0$, mivel a $t_3<t_1$ nívó elválasztja az $L'$ halmazt $\eta_0$-tól. Ellentmondásba kerültünk a 65. segédtétellel, így a 68. segédtételt bebizonyítottuk.

69. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a $J$ gömbfelületen értelmezett kétszer differenciálható függvény, $\xi$ rögzített pont, $\mho$ a speciális hlamaz és $G$ egy $\mho$-val szomszédos tartomány. Legyen $D_1$ a $G$ tartomány határának a $\xi$ pontot $G$-től elválasztó komponense. Akkor: ha (a $\xi$ pontra vonakozó) $F'(\eta)$ derivált $G$-ben pozitív, akkor az $F(\eta)$ függvény $D_1$-en felveszi $\overline{G}$-beli minimumát; ha a ($\xi$ pontra vonatkozó) $F'(\eta)$ derivált $G$-ben negatív, akkor az $F(\eta)$ függvény $D_1$-en felveszi $\overline{G}$-beli maximumát.*

BIZONYÍTÁS. Meghatározottság kedvéért tegyük fel, hogy a $G$ tartományon $F'(\eta)>0$ (a duális eset innen a $-F(\eta)$ függvényre való áttérés útján adódik). Legyen $\zeta\in\overline{G}-D_1$ és $F(\zeta)\leqq F(\eta_0)$, ahol $\eta_0\in D_1$. Tekintsük a $T_F$ egydimenziós fán az $l_\xi$, $l_\zeta$ végpontokkal rendelkező $\sigma'$ egyszerű ívet. Fennáll $l_{\eta_0}\in\sigma'$. Legyen $\sigma$ az $l_{\eta_0}$, $l_\zeta$ végpontokkal rendelkező ív. A $\sigma$ íven nincs $\sigma$ végpontjaitól különböző elágazási pont, mert különben az elágazási pont $\mho$-ban fekvő inverz képe elválasztaná $\eta_0$ valamely környezetét $\zeta$ valamely környezetétől. Továbbá a $\sigma$ íven $F^*(l)$ szigorúan monoton, mert különben volna olyan $l_0\in\sigma-l_{\eta_0}-l_\zeta$ pont, ahol $F^*(l)$ szélsőértéket vesz fel. Akkor $\tau_F^{-1}(l_0)\in\mho$ és elválasztja az $\eta_0,\zeta$ pontokat, ez pedig lehetetlen. De ha így áll a dolog, akkor minden $l\in\sigma$ pont vagy növekedési, vagy fogyási pont $l_\xi$-re nézve és egyúttal növekedési vagy fogyási pont $l_\xi$-re nézve a $\sigma'$ íven. Minthogy $F'(\eta)$ a $G$ tartományon pozitív, az első eset áll fenn, és így $F(\eta)=F^*(l_\zeta)>$ $>F^*(l_{\eta_0})=F(\eta_0)$. A segédtételt bebizonyítottuk.

70. (ALAPVETŐ) SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ kétszer differenciálható függvény, $\xi\in J$ valamely rögzített pont, $\mho$ a speciális halmaz, $G$ egy $\mho$-val szomszédos tartomány és $D_1$ a $G$ tartomány határának az a komponense, amely a $\xi$ pontot elválasztja $G$-től. Akkor tetszés szerinti $\zeta\in G$ pontra érvényes az $F(\zeta)=F(\zeta_0)+\int_{\zeta_0}^{\zeta}f(\eta)d\eta$ egyenlőség, ahol $\zeta_0$ a $D_1$ komponens tetszés szerinti pontja és $f(\eta)=F'(\eta)$ az $F(\eta)$ függvény $\xi$ pontra vonatkozó deriváltja.*

BIZONYÍTÁS. Meghatározottság kedvéért legyen $G$ minden pontjában $f(\eta)>0$.

1°.
$$\int_{\zeta_0}^{\zeta}f^-(\eta)d\eta=0.$$

Valóban, legyen $\theta>0$ tetszés szerinti szám. Legyenek $G_1, G_2,\ldots$ az összes, $\mho$-val szomszédos tartományok, amelyeken $f(\eta)<0$. Legyen $C_n$ a $G_n$ tartomány határának az a komponense, amely a $\zeta$ pontot elválasztja $G_n$ minden pontjától. Ezek szerint ha valamely $L$ egyszerű ív összeköti a $\zeta_0,\zeta$ pontokat, akkor ennek a $\overline{G}_n$ halmazzal való első és utolsó metszéspontja $C_n$-hez tartozik. Legyen $\varepsilon>0$ tetszés szerinti. Kössük össze a $\zeta_0,\zeta$ pontokat egy rektifikálható $L$ egyszerű ívvel. Jelöljük meg az $L$ ívnek minden egyes $C_n$ halmazzal alkotott első és utolsó metszéspontját. Legyenek ezek

$a_n$ és $b_n$. Definíció szerint $\eta \notin \sum_n G_n$ esetén $f^-(\eta) \equiv 0$. Az $L$ ív rektifikálhatósága és $|f^-(\eta)|$ korlátossága miatt található olyan $N$ szám, hogy

$$\sum_{n=N}^{\infty} \int_{L \cap G_n} |f^-(\eta)|\, d\sigma < \theta.$$

Minden $n<N$ értékre az $a_n$, $b_n$ pontokat kössük össze egy rektifikálható $L_n$ egyszerű ív segítségével, amely a $C_n$ komponens $\varepsilon$-sugarú környezetében fekszik és amelyen $f^-(\eta)=0$. Minden $n<N$ értékre az $L$ ív $a_n$-től $b_n$-ig terjedő szakaszát a megfelelő $L_n$ ívvel helyettesítve, $L$-ből egy rektifikálható $L^*$ egyszerű ív keletkezik. Nyilvánvaló, hogy ha $\Omega$ azon pontok összességét jelöli, ahol $f(\eta)=0$, és $\Omega_\varepsilon$ e halmaz $\varepsilon$-sugarú környezete, akkor $\int_{L^* \cap C\Omega_\varepsilon} |f^-(\eta)| d\sigma < \theta$. Ebből következik, hogy $(\varepsilon) \int_{\zeta_0}^{\zeta} |f^-(\eta)| d\eta < \theta$, és ezzel, tekintettel arra, hogy az $\varepsilon>0$, $\theta>0$ számok tetszés szerintiek, az 1° állítást bebizonyítottuk.

2°.
$$F(\zeta)-F(\zeta_0)=\int_{\zeta_0}^{\zeta} f^+(\eta)\, d\eta.$$

Legyen $T_F$ az $F(\eta)$ függvény egydimenziós fája, és $\sigma$ az $l_{\zeta_0}$, $l_\zeta$ végpontokkal rendelkező egyszerű ív $T_F$-ben. A korábbiak értelmében a $\sigma$ íven egyetlen $l \neq l_{\zeta_0}$, $l_\zeta$ pont sem lehet elágazási pont vagy extrémum-hely (mert ha $\tilde{l}$ ilyen tulajdonságú pont, akkor a $\tau_F^{-1}(\tilde{l}) \subset \mho$ komponens elválasztja a $\zeta_0, \zeta$ pontokat). Következésképpen a $\sigma$ íven az $F^*(l)$ függvény monoton, és mindegyik $l \in \sigma$ ponthoz tartozó $K=\tau_F^{-1}(l)$ komponens a 70. segédtétel szerint növekedési komponens. Vezessük be a $\sigma^* = \sigma - (l_{\zeta_0} + l_\zeta)$ jelölést. Legyen $L$ a $\zeta_0, \zeta$ végpontokkal rendelkező tetszés szerinti rektifikálható egyszerű ív. Feleltessük meg az $L \cap \tau_F^{-1}(\sigma^*) \cap C\Omega_\varepsilon$ metszet minden pontjának az $L$ ív e pontot tartalmazó maximális nyílt részívét, amelyen $f(\eta)>0$. Fedjük be az egész $L \cap \tau_F^{-1}(\sigma^*) \cap C\overline{\Omega}_\varepsilon$ halmazt ilyen, egymást nem metsző $j_s$ nyílt részívekkel. Az $F(\eta)$ függvény $\Delta F_s$ növekménye $j_s$-en nem nagyobb, mint $\int_{j_s} f^+(\eta) d\sigma$, mer $\Delta F_j = \int_{j_s} |\text{grad}\, F(\eta)| \cos \alpha(\eta) d\sigma$, ahol $\alpha(\eta)$ az $L$ ív érintőjének grad $F(\eta)$ irányával bezárt szöget az $\alpha$ pontban. Legyen $F^*(\zeta_0)<t<F(\zeta)$, és tegyük fel, hogy a $j_s$ ívek egyesítésén az $F(\eta)$ függvény nem veszi fel a $t$ értéket. Található olyan $l' \in \sigma^*$ pont, amelyre $F^*(l')=t$. Legyen $K'=\tau_F^{-1}(l')$ és $\varkappa \in K' \cap L$. Akkor $\varkappa \in \mho_\varepsilon$. De az $F(\eta)$ függvény $\mho$ halmazon felvett értékei nulla mértékű halmazt alkotnak. Ennélfogva bármely $\theta>0$ számhoz található olyan $\varepsilon>0$, hogy $\mu_\varepsilon = \text{mes}_t \{F(\mho_\varepsilon)\} < \theta$.

Ekkor tekintettel arra, hogy $L$ tetszés szerinti, fennáll $(\varepsilon) \int_{\zeta_0}^{\zeta} f^+(\eta) d\eta \geqq F(\zeta) - F(\zeta_0) - \theta$. Minthogy a $\theta>0$ szám tetszés szerinti, a 2° állítást bebizonyítottuk.

3°.
$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} f^+(\eta)\, d\eta \leqq F(\zeta)-F(\zeta_0).$$

Legyen $\theta>0$ tetszés szerinti. Legyen $\varepsilon>0$ olyan kicsi, hogy $\mu_\varepsilon<\theta$. A $\mho_\varepsilon$ halmaz véges számú $U_1^*, \ldots, U_n^*$ tartományból mint komponensből áll. Legyen $U_1^* \supset D_1$. Legyen $D_2$ a $G$ tartomány határának az a komponense, amelyen $F(\eta)$ eléri $\overline{G}$-beli maximumát, és legyen $U_n^* \supset D_2$. Minden más $s$-re $\overline{U}_s^* \subset \overline{G}$. Valóban, ellenkező esetben $U_{s_1}^* (s \neq 1, n)$ tartalmazna egy $\varkappa \in C\overline{G}$ pontot. Akkor $G$ határának valamely $D_3$ komponense a $\varkappa$ pontot elválasztja $G$ minden pontjától és így $D_3$ szétválasztja a $J$ gömbfelületet. De akkor a 67. segédtétel szerint a $D_3$ komponensen $F(\eta)$ eléri $\overline{G}$-beli maximumát vagy minimumát, és minthogy ugyanezen segédtétel szerint az ilyen tulajdonságú komponensek egyértelműen meg vannak határozva, vagy $D_s = D_1$, vagy $D_s = D_2$. Mivel $U_s^* \cap D_3 \neq 0$, következik, hogy vagy $s=1$, vagy $s=n$.

Minden $U_s^*(s \neq 1, n)$ tartományhoz a 68. segédtétel alapján található olyan $\lambda_s$ pont $U_s^*$ *határán*, ahol $F(\eta)$ felveszi $\overline{U}_s^*$-beli *minimumát*. Most az $M = G - \sum_{s=1}^{n} U_s^*$ halmaz mindegyik $\tau$ pontjának feleltessünk meg egy vektort, amely az $F(\eta)$ függvény $\tau$ pontbeli leggyorsabb növekedésének irányába mutat (nyilvánvaló, hogy grad $F(\tau) \neq 0$). Minthogy $F(\eta)$ folytonosan differenciálható függvény és az $M$ halmazon mindenütt $|\text{grad } F| > \alpha > 0$, a kapott iránymező folytonos. A differenciálegyenletekre vonatkozó általános tételekből következik, hogy minden $\tau \in M$ ponton keresztül *egyetlen olyan görbe halad, amely minden pontjában érinti az illető ponthoz rendelt vektort.* Minden ilyen *legnagyobb lejtésű* görbe végpontjai a $\sum_{s=1}^{n} \overline{U}_s^*$ halmazhoz kell hogy tartozzanak, ugyanis szinguláris pont nincs. Az említett lejtési görbék minden pontban kollineárisak $F(\eta)$ maximális növekedésének irányával és így az $F(\eta)$ függvénynek valamely lejtési görbe mentén szerzett növekménye egyenlő a $|\text{grad } F(\eta)|$ függvény ívhosszúság szerinti integráljával.

A $\lambda_s$ pontokon keresztül szintén haladnak lejtési görbék. Ha a $\lambda_s$ pontból kiindulva a lejtési görbén $F(\eta)$ *fogyásának* irányában haladunk, akkor a lejtési görbe másik végpontja biztosan egy $m \neq s$ értékhez tartozó $\overline{U}_m$ halmazba esik, minthogy az $\overline{U}_s$ halmazon a $\lambda_s$ pontban $F(\eta)$ *minimumot* ért el. A $\lambda_m$ pontból elindulva, a megfelelő lejtési görbén egy $\overline{U}_r(r \neq m, s)$ halmazba jutunk stb. Ily módon véges számú lépés után feltétlenül eljutunk $U_1$-be. Ha $\zeta \in U_s$, tekintsük az említett görbék láncát $\lambda_s$-től kezdve. Legyenek ezek a lejtési görbék $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Ha viszont $\zeta \notin \Sigma U_s^*$, akkor válasszuk $A_1$-nek a $\zeta$ ponton áthaladó lejtési görbét, pontosabban ennek $F(\eta)$ *fogyása* irányába eső részét, és a továbbiakban alkalmazzuk a fent ismertetett eljárást. Legyen $A_r$ két végpontja $a_r$ és $b_r$, úgyhogy $F(a_r) > F(b_r)$. Azt az $U_m$ tartományt, amelynek a lezárásához $b_r$ tartozik, $U_{m_r}$-rel fogjuk jelölni. Ezek szerint $\lambda_{m_r} = a_{r+1}$. Nyilvánvaló, hogy $F(b_r) \geq F(a_{r+1}) = F(\lambda_{m_r})$, ugyanis a $\lambda_{m_r}$ pontban az $F(\eta)$ függvény az $\overline{U}_{m_r}$ halmazon tekintve minimális értéket vesz fel. Az utolsó $b_p$ pont az $\overline{U}_1$ halmazhoz tartozik. Ennélfogva

$$F(\zeta) - F(b_p) = \sum_{r=1}^{p} [F(a_r) - F(b_r)] + \sum_{r=1}^{p-1} [F(b_r) - F(a_{r+1})] \geq \sum_{r=1}^{p} [F(a_r) - F(b_r)].$$

Továbbá mindegyik $b_r$, $a_{r+1}$ pontpárt kössük össze egy teljesen $U_r$-ben fekvő $B_r$ rektifikálható ívvel. A $b_p$ pontot pedig a $\zeta_0$ ponttal kössük össze egy $\overline{U}_1$-ban fekvő $B_p$ ív segítségével. Álljon most a rektifikálható $L$ egyszerű ív a természetes sorrendben vett $A_r$ és $B_r$ ívekből. Az $A_r$ ívek rektifikálhatósága abból következik, hogy ezeken az íveken mindenütt $|\text{grad } F(\eta)| > \alpha > 0$. Hogy a $B_r$ ívek választhatók rektifikálhatóknak az abból következik, hogy mindegyik $U_r$ halmaz $\varepsilon > 0$ sugarú körök egyesítése. Becsüljük meg az $\int_{L \cap C\mho_\varepsilon} f^+(\eta) d\sigma$ mennyiséget. Nyilván $B_r \subset \Omega_\varepsilon$ és így

$$\int_{L \cap C\mho_\varepsilon} f^+(\eta) d\sigma = \sum_{r=1}^{p} \int_{A_r} f^+(\eta) d\sigma = \sum_{r=1}^{p} [F(a_r) - F(b_r)].$$

Ebből következik (tekintetbe véve még, hogy $|F(\zeta_0) - F(b_p)| < \theta$, mert $\zeta_0, b_p \in \overline{U}_1$):

$$(\varepsilon) \int_{\zeta_0}^{\zeta} f^+(\eta) d\eta \leq \sum_{r=1}^{p} [F(a_r) - F(b_r)] \leq F(\zeta) - F(b_p) \leq F(\zeta) - F(\zeta_0) + \theta.$$

Minthogy $\varepsilon$ csak felülről van korlátozva, kapjuk:

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} f^+(\eta) d\eta = \lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon) \int_{\zeta_0}^{\zeta} f^+(\eta) d\eta \leq F(\zeta) - F(\zeta_0) + \theta.$$

A $\theta$ szám tetszés szerinti lévén a 3° állítást és egyúttal az

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} f^+(\eta) d\eta = F(\zeta) - F(\zeta_0)$$

egyenlőséget bebizonyítottuk. 1° és 3° fennállásából következik a segédtétel állítása.

Az $f(\eta)<0$ eset visszavezethető a vizsgált esetre a $-F(\eta)$ függvényre való áttérés útján. Ily módon a 70. segédtételt teljesen bebizonyítottuk.

A 70. segédtételből speciálisan adódik, hogy ha $F(\eta)$ kétszer differenciálható függvény és $\mho$ e függvény speciális halmaza, továbbá $G$ valamely szomszédos tartomány és $D_1$ a $G$ tartomány határának a $\xi$ pontot $G$-től elválasztó komponense, akkor az $F(\eta)$ függvény $G$-ben felvett értékeit az $f(\eta)=F'(\eta)$ derivált és $F(\eta)$-nak $D_1$-en felvett értékei (a $\xi$ pontra nézve) egyértelműen meghatározzák. Sőt, az $f(\eta)$ deriváltnak csak a $G$ tartományban felvett értékeit kell ismernünk, amint a segédtétel bizonyításából szintén könnyen látható. Most be fogjuk bizonyítani az alaptételt.

37. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a $J$ gömbfelületen értelmezett kétszer differenciálható függvény, $\xi\in J$ valamely rögzített pont és $f(\eta)=F'(\eta)$ az $F(\eta)$ függvény $\xi$ pontra vonatkozó deriváltja. Akkor bármely $\zeta\in J$ pontra érvényes az*

$$F(\zeta)=F(\xi)+\int_{\xi}^{\zeta} f(\eta)\,d\eta$$

*egyenlőség.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mho$ az $F(\eta)$ függvény speciális halmaza a $\xi$ pontra vonatkozóan. Legyenek $G_1, G_2, \dots$ a $\mho$-val szomszédos tartományok. Jelölje $G_1^*, G_2^*, \dots$ ezen tartományok közül azokat, amelyeknek a lezárása elválasztja a $\xi, \zeta$ pontokat, $G_1^{**}, G_2^{**}, \dots$ pedig azokat, amelyeknek a lezárása nem választja el a $\xi, \zeta$ pontokat.

Ha $G_s^*\not\ni\zeta$, akkor jelölje $C_s$ ill. $D_s$ a $G_s^*$ tartomány határának a $\xi$, ill. $\zeta$ pontot $G_s^*$-tól elválasztó komponensét. Ha viszont $\zeta\in G_s^*$, akkor legyen $D_s=\zeta$. Jelölje $B_s$ a $G_s^{**}$ tartomány határának azt a komponensét, amely a $\xi$ pontot elválasztja $G_s^{**}$-tól. Ez a komponens egyúttal a $\zeta$ pontot is elválasztja $G_s^{**}$-tól. Legyen $F(\eta)$ értéke $C_s$-en és $D_s$-en rendre $t_s'$ és $t_s''$.

Azt állítom, hogy:

1°. $F(\zeta)-F(\xi)=\sum_s (t_s''-t_s')$, és a jobboldalon álló sor abszolút konvergens.

2°. $\int_{\xi}^{\zeta} f^+(\eta)\,d\eta=\sum_s |t_s''-t_s'|^+$ és $\int_{\xi}^{\zeta} f^-(\eta)\,d\eta=-\sum_s |t_s''-t_s'|^-$, ahol, szokás szerint, $|a|^+=\dfrac{a+|a|}{2}$, $|a|^-=|-a|^+$.

Az 1° és 2° állításból következik a tétel állítása.

Bizonyítsuk be először az 1° állítást. Legyen $T_F$ az $F(\eta)$ függvény egydimenziós fája és $\sigma$ a $T_F$ fához tartozó, $l_\xi, l_\zeta$ végpontokkal rendelkező egyszerű ív. Legyen $Q=\tau_F(\mho)\cap\sigma$. Az $F^*(l)$ függvénynek a $Q$ zárt halmazon felvett értékkészlete nulla mértékű. Legyen $j_s$ a $Q$ halmazzal szomszédos szakasz a $\sigma$ íven. Nyilvánvaló, hogy $j_s=\tau_F(G_s^*)$, és ha $j_s$ végpontjai $a_s$ és $b_s$, akkor $\tau_F^{-1}(a_s)=C_s$ és $\tau_F^{-1}(b_s)=D_s$. Az $F^*(l)$ függvény a $\sigma$ íven korlátos variációjú, mert $\overset{\zeta}{\underset{\xi}{V}}(F)<+\infty$. Ennélfogva

$$F^*(\zeta)-F^*(\xi)=\sum_s [F^*(b_s)-F^*(a_s)]=\sum_s (t_s''-t_s').$$

Az 1° állítást bebizonyítottuk.

Bizonyítsuk be a 2° állítást. Nyilvánvaló, hogy a két egyenlőség közül elég az egyiket bebizonyítani, például az elsőt, ugyanis a második egyenlőség ebből a $-F(\eta)$ függvényre való áttérés útján adódik.

Legyen $L$ a $\xi, \zeta$ pontokat összekötő tetszés szerinti rektifikálható egyszerű ív. Legyen $\theta>0$ tetszés szerinti szám. Akkor található olyan, $\theta$-tól függő $N$ szám, hogy az $U_N=\sum_{s=1}^{N} G_s^*+\sum_{s=1}^{N} G_s^{**}$ jelöléssel $\int_{L\cap CU_N} f^+(\eta)\,d\sigma\le\frac{\theta}{2}$. Mindegyik $s\le N$ értékre megjelöljük $L$-en az $a_s, b_s$ pontokat — az $L$ ívnek a $G_s^*$ tartománnyal való első és utolsó metszéspontját. Ha $\eta\in G_s^*$ esetén $f(\eta)=F'(\eta)>0$, akkor a 70. segédtétel szerint

$$\int_{a_s}^{b_s} f^+(\eta)d\eta = F(b_s) - F(a_s) = t_s'' - t_s' = |t_s'' - t_s'|^+,$$

ha pedig $f(\eta) < 0$, akkor

$$\int_{a_s}^{b_s} f^+(\eta)d\eta = 0 = |t_s'' - t_s'|^+.$$

Legyen most $\varepsilon > 0$ tetszés szerinti. Az integrál definíciója szerint található olyan, $a_s$, $b_s$ végpontokkal rendelkező $L_s$ rektifikálható ív, hogy $\int\limits_{L_s \cap C\mho_\varepsilon} f^+(\eta)d\sigma \leq |t_s'' - t_s'|^+ + \frac{\theta}{2^{s+1}}$. Továbbá mindegyik $s \leq N$ értékre az $L$ íven megjelöljük $L$-nek $G_s^{**}$-gal való első és utolsó metszéspontját (ha vannak ilyenek). Legyenek ezek $\varkappa_s$ és $\lambda_s$. Fennáll $\varkappa_s \in B_s$, $\lambda_s \in B_s$, és $B_s$ a $\mho_\varepsilon$ halmaz részhalmaza. Ennélfogva $\varkappa_s$ és $\lambda_s$ összeköthető valamely, szintén teljesen $\mho_\varepsilon$-ban fekvő, $L_s^{**}$ rektifikálható egyszerű ív segítségével. Most helyettesítsük az $L$ ív $a_s$ és $b_s$ közti szakaszát az $L_s$ ívvel, a $\varkappa_s$ és $\lambda_s$ közti szakaszt pedig az $L_s^{**}$ ívvel. A kapott görbét $L^*$-gal fogjuk jelölni. Nyilvánvaló, hogy $(\varepsilon) \int\limits_{L_s^{**} \cap C\mho_\varepsilon} f^+(\eta)d\sigma = 0$ és így

$$\int\limits_{L^* \cap C\mho_\varepsilon} f^+(\eta)d\sigma = \sum_{s=1}^{N} \int\limits_{L_s \cap C\mho_\varepsilon} f^+(\eta)d\sigma + \int\limits_{L \cap CU_N} f^+(\eta)d\sigma < \sum_{s=1}^{N} |t_s'' - t_s'|^+ + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}.$$

Tehát $(\varepsilon) \int_{\xi}^{\zeta} f^+(\eta)d\eta < \sum_{s=1}^{\infty} |t_s'' - t_s'|^+ + \theta$. Minthogy az $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$ számok tetszés szerintiek, kapjuk:

$$\int_{\xi}^{\zeta} f^+(\eta)d\eta \leq \sum_{s=1}^{\infty} |t_s'' - t_s'|^+.$$

Bizonyítsuk be a fordított irányú egyenlőtlenséget. Legyen $\theta > 0$ tetszés szerinti. Legyen $N$ tetszés szerinti természetes szám és a $G_s^*(s = 1, 2, \ldots, N)$ tartományokat számozzuk át úgy, hogy $G_{s-1}^*$ válassza el a $\xi$ pontot $G_s^*$-tól. Legyen $L$ tetszés szerinti, a $\xi, \zeta$ pontokat összekötő, rektifikálható egyszerű ív. Legyen $a_1$ a $C_1$ halmaz és az $L$ ív első metszéspontja, ha $L$-en a $\xi$ ponttól $\zeta$ felé haladunk. Legyen $b_1$ a $D_1$ halmaznak az $L$ ív $a_1$-től $\zeta$-ig terjedő szakaszával való utolsó metszéspontja. Ha a $b_s$ pont már értelmezve van, akkor legyen $a_{s+1}$ a $C_{s+1}$ halmaznak az $L$ ív $b_s$-től $\zeta$-ig terjedő szakaszával alkotott első metszéspontja, $b_{s+1}$ pedig $D_{s+1}$ és $L$ utolsó metszéspontja.

Mindegyik $G_s^*$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$ tartományhoz találhatunk olyan $\varepsilon_s > 0$ számot, hogy

$$(\varepsilon_s) \int_{a_s}^{b_s} f^+(\eta)d\eta \geq \int_{a_s}^{b_s} f^+(\eta)d\eta - \frac{\theta}{N}.$$

Akkor az integrál definíciója szerint fennáll

$$\int\limits_{L_s \cap C\mho_{\varepsilon_s}} f^+(\eta)d\sigma \geq \int_{a_s}^{b_s} f^+(\eta)d\eta - \frac{\theta}{N}.$$

Továbbá a 70. segédtétel értelmében

$$\int_{a_s}^{b_s} f^+(\eta)d\eta = F(b_s) - F(a_s),$$

és így, $L_s$-sel jelölve az $L$ ív $a_s$-től $b_s$-ig terjedő szakaszát, kapjuk:

$$\int\limits_{L_s \cap C\mho_{\varepsilon_s}} f^+(\eta)d\sigma \geq F(b_s) - F(a_s) - \frac{\theta}{N} = |t_s'' - t_s'|^+ - \frac{\theta}{N}.$$

Most legyen $\varepsilon = \min_{1 \leq s \leq N} \varepsilon_s$. Akkor

$$\int_{L \cap CU_\varepsilon} f^+(\eta) d\sigma \geq \sum_{s=1}^{N} \int_{L_s \supset CU_\varepsilon} f^+(\eta) d\sigma \geq \sum_{s=1}^{N} |t_s'' - t_s'|^+ - \theta.$$

Minthogy $L$ a $\xi, \zeta$ pontokat összekötő tetszés szerinti rektifikálható egyszerű ív és az $N > 0$, $\theta > 0$ számok is tetszőlegesek, innen következik:

$$\int_\xi^\zeta f^+(\eta) d\eta \geq \sum_s |t_s'' - t_s'|^+.$$

Ebből és a fentebb bebizonyított fordított irányú egyenlőtlenségből rögtön adódik, hogy

$$\int_\xi^\zeta f^+(\eta) d\eta = \sum_s |t_s'' - t_s'|^+$$

és

$$\int_\xi^\zeta f^-(\eta) d\eta = \sum_s |t_s'' - t_s'|^-.$$

A 2° állítást és vele együtt a 37. tételt bebizonyítottuk.

Tekintettel arra, hogy a (rögzített $\xi$ pontra vonatkozó) $f(\eta) = F'(\eta)$ értékek teljesen meghatározzák az $\int_\xi^\zeta f(\eta) d\eta$ mennyiséget, a tételből azonnal adódnak az alábbiak.

Következmény. *A gömbfelületen értelmezett, kétszer differenciálható függvények osztályában két függvény, amelynek egy rögzített $\xi$ pontra vonatkozó deriváltja megegyezik, egymástól csak additív állandóban különbözik.*

Ily módon megmutattuk, hogy a gömbfelületen értelmezett, kétszer differenciálható függvények osztályában a primitív függvényt a derivált, konstanstól eltekintve, meghatározza. Az a kérdés, hogy fennáll-e ez a körülmény a teljes differenciállal rendelkező függvények osztályában, vagy abban a szűkebb osztályban, amely a folytonos parciális deriváltakkal rendelkező függvényekből áll, nyitva marad és megoldása, úgy látszik, jelentős nehézséggel jár.

Azt viszont könnyű belátni, hogy az értelmezési tartományra vonatkozó feltevés lényeges. Tekintsünk két függvényt, amely a $\xi = (0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ csúcsokkal rendelkező $J$ egységnégyzeten van értelmezve. Legyen $F_1(\eta) = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} - \sqrt{2}$ és $F_2(\eta) = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$. Könnyen igazolható, hogy $|\mathrm{grad}\, F_1(\eta)| = |\mathrm{grad}\, F_2(\eta)| \equiv 1$. Továbbá mindkét függvény $\xi$ pontra vonatkozó deriváltja a $J$ tartomány minden pontjában pozitív. Végül a $\xi$ pontban $F_1$ és $F_2$ megegyezik, ennek ellenére $J$ bármely, tetszés szerint kicsi résztartományában lényegesen különbözik egymástól. Még csak azt említjük meg, hogy itt lényeges szerepet játszik az a körülmény, hogy a $\xi$ pont $J$ határához tartozik. Bizonyítás nélkül rámutatunk arra, hogy ha a kiindulásként választott $\xi$ pont belső pont, akkor elég kis környezetében azok a kétszer differenciálható függvények, amelyeknek $\xi$-re vonatkozó deriváltja megegyezik, ismét csak konstansban térhetnek el egymástól.

Ennek a paragrafusnak a befejezéseképpen megjegyezzük még, hogy a 37. tétel nemcsak bebizonyítja a kétszer differenciálható primitív függvény és deriváltja definíciójának egyértelműségét, hanem megadja a primitív függvény és a derivált közötti szokásos kapcsolatot is: *a primitív függvény növekménye egyenlő a derivált integráljával.* Itt *a kétszeri differenciálhatóság lényeges,* ugyanis van olyan folytonosan differenciálható $F(\eta)$ függvény, amelyre egy bizonyos $K$ kontinuumon grad $F(\eta)\equiv 0$ és amely mégsem állandó ezen a kontinuumon (D.E. MENYSOV példája). Ha $\xi$ és $\zeta$ a $K$ kontinuum két pontja, amelyekre $F(\xi)\neq F(\zeta)$, akkor nyilván

$$0\neq F(\zeta)-F(\xi)\neq \int_{\xi}^{\zeta} f(\eta)d\eta=0,$$

és így *a primitív függvény folytonos differenciálhatósága* még *nem biztosítja, hogy növekménye egyenlő legyen a derivált integráljával.*

## 3. §. A ponttól pontig vett variáció kifejezése a lineáris integrál segítségével

Folytonosan differenciálható egyváltozós $f(x)$ függvény $[a, b]$ szakaszhoz tartozó variációit a következő képletek fejezik ki:

$$V(f)=\int_a^b |f'(x)|dx, \quad V^{\pm}(f)=\int_a^b |f'(x)|^{\pm}dx.$$

Folytonosan differenciálható $F(\eta)$ függvény $W(F)$ síkbeli variációját a

$$W(F)=\iint_J |\text{grad } F|\, dS$$

képlet adja meg.

Meg fogjuk mutatni, hogy az előző paragrafus eredményeiből a lineáris variációnak a lineáris integrál segítségével való analóg kifejezése nyerhető.

38. TÉTEL. *Ha az $F(\eta)$ függvény kétszer differenciálható és $\xi, \zeta\in J$ tetszés szerinti pontok, akkor*

$$_{\xi}^{\zeta}V(F)=\int_{\xi}^{\zeta} |f(\eta)|d\eta, \quad _{\xi}^{\zeta}V^{\pm}(F)=\int_{\xi}^{\zeta} |f(\eta)|^{\pm}d\eta,$$

*ahol $f(\eta)$ az $F(\eta)$ függvény $\xi$ pontra vonatkozó deriváltja.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\sigma$ a $T_F$ egydimenziós fához tartozó, $l_\xi$, $l_\zeta$ végpontokkal rendelkező egyszerű ív. A $\tau_F^{-1}(\sigma)$ halmaz a $\xi, \zeta$ pontokat elválasztó komponensekből áll; a 37. tétel jelöléseit használva azok a $G_s^*$ tartományok, amelyeken $f(\eta)>0$, csupa növekedési komponensből állnak, azok a $G_m^*$ tartományok pedig, amelyeken $f(\eta)<0$, csupa fogyási komponensből ($\xi$-re vonatkozóan). A $\sigma$ ív megfelelő $j_s=\tau_F(G_s^*)$ intervallumain $F^*(l)$ szigorúan monoton. Az $F^*(l)$ függvénynek a $\sum_s j_s$ halmazon kívül felvett értékkészlete nulla mértékű. Így a 37. tétel bizonyításában szereplő 2° állítás értelmében

$$_{\xi}^{\zeta}V^{\pm}(F)=V^{\pm}(F^*)=\sum_s |t_s''-t_s'|^{\pm}=\int_{\xi}^{\zeta} f^{\pm}(\eta)d\eta,$$

ahol $t_s'$ és $t_s''$ az $F^*(l)$ függvény értékei $j_s$ végpontjaiban, vagy, ami ugyanaz, az $F(\eta)$ függvény értékei $G_s^*$ határának azokon a $C_s$, $D_s$ komponensein, amelyek a $G_s^*$ tartományt a $\xi$ ill. $\zeta$ ponttól elválasztják. Ebből azonnal következik az is, hogy

$$_{\xi}^{\zeta}V(F)=V^{+}(F)+V^{-}(F)=\int_{\xi}^{\zeta} f^{+}(\eta)d\eta-\int_{\xi}^{\zeta} f^{-}(\eta)d\eta=\int_{\xi}^{\zeta} |f(\eta)|d\eta.$$

Tehát a variációnak a deriválttal való kifejezése során a lineáris integrál ugyanazt a szerepet játssza a lineáris variáció számára, mint a közönséges integrál az egyenesen vett variáció, és a kettős integrál a síkbeli variáció számára.

## 4. §. Határozatlan integrál. A határozatlan integrál differenciálhatósága

Természetes dolog az $F(\zeta)=\int_{\xi}^{\zeta} f(\eta)\,d\eta$ függvényt az $F(\eta)$ függvény határozatlan integráljának nevezni. A határozatlan integrál egyszerű tulajdonságait e fejezet 1. paragrafusában említettük. Vezessük be még az $F^{\pm}(\zeta)=\int_{\xi}^{\zeta} f^{\pm}(\eta)\,d\eta$ jelölést. Meg fogjuk mutatni, hogy az így értelmezett integrál és a jelen fejezet 2. §-ában definiált derivált között fennáll a szokásos kapcsolat: a határozatlan integrál deriváltja az integráljel alatt álló függvénnyel egyenlő.

71. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $L$ olyan kontinuum, amelyen $f(\eta)\equiv 0$. Akkor az $L$ kontinuumon $F(\zeta)$ állandó.*

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvaló, hogy az $F_{\varepsilon}^{\pm}(\zeta)=(\varepsilon)\int_{\xi}^{\zeta}(f^{\pm}(\eta)d\eta$ függvények és így az $F^{\pm}(\zeta)=\lim_{\varepsilon\to 0} F_{\varepsilon}^{\pm}(\zeta)$ függvények is állandók $L$-en, tehát egyúttal $F(\zeta)=F^{+}(\zeta)+F^{-}(\zeta)$ is állandó $L$-en.

72. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $f(\eta)$ folytonos függvény és*

$$F(\zeta)=\int_{\xi}^{\zeta} f(\eta)\,d\eta.$$

*Ha $f(\eta_0)>0$ (ill. $f(\eta_0)<0$) és $K\ni\eta_0$ az $F(\zeta)$ függvény teljesen reguláris nívóhalmaz-komponense, akkor $K$ növekedési (ill. fogyási) komponens.*

BIZONYÍTÁS. Meghatározottság kedvéért legyen $f(\eta_0)>0$.

1°. *A $K$ halmazon mindenütt $f(\eta)\geqq 0$.* Legyen $\Omega$ az $f(\eta)$ függvény nullanívója. Ha $\eta_1\in K$ és $f(\eta_1)<0$, akkor egy $L\subset\Omega$ komponens elválasztja az $\eta_0$, $\eta_1$ pontokat, tehát $L\cap K\neq 0$. Az $L$ komponensen az $F(\zeta)$ függvény állandó, ennélfogva $L\subset K$ és $K$ nem teljesen reguláris komponens.

2°. *A $K$ halmazon az $F^{+}(\zeta)$ függvény állandó.* Valóban, a $K$ halmazon $f^{-}(\eta)=0$ és a 71. segédtétel szerint $F^{-}(\zeta)$ állandó $K$-n. Akkor az $F^{+}(\zeta)=F(\zeta)-F^{-}(\zeta)$ függvény is állandó a $K$ komponensen.

3°. *$K$ növekedési komponens.* Legyen $U(\eta_0)$ egy $r$ sugarú, kör alakú környezet, amelyben $2d>f^{+}(\eta)>d>0$. Legyen $\eta_1\in U(\eta_0)\cap J_2$, ahol $J_1\ni\xi$ és $J_2$ az a két tartomány, amelyre $K$ felosztja $J$-t, és $\varrho(\eta_0,\eta_1)<\frac{r}{8}$. Legyen $\{C_s\}$ olyan, $\xi$, $\eta_1$ végpontokkal rendelkező rektifikálható egyszerű ívekből álló sorozat, amelyre

$$\int_{C_s\cap\Omega_{\frac{1}{s}}} f^{+}(\eta)\,d\sigma\to\int_{\xi}^{\eta_1} f^{+}(\eta)\,d\sigma.$$

Legyen $C_s^{*}$ a $C_s$ ívnek az a szakasza, amely $C_s$-nek $U(\eta_0)$ határával való utolsó metszéspontjától $\eta_1$-ig terjed. Legyen $R=\overline{\operatorname{lt}}_{s}\, C_s$. Könnyen látható, hogy $R\cap J_1\neq 0$, $R\cap J_2\neq 0$, továbbá hogy $\eta\in J_1\cap R$ esetén $F^{+}(\eta)<F^{+}(\eta_0)$ és $\eta\in J_2\cap R$ esetén $F^{+}(\eta)\supset F^{+}(\eta_0)$. Minthogy $F^{-}(\eta)$ állandó az $U(\eta_0)$ halmazon, ebből következik, hogy $K$ növekedési komponens.

73. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $f(\eta)$ folytonos függvény, $\xi\in J$ tetszés szerinti pont, $F(\zeta)=F(\xi)+\int_{\xi}^{\zeta} f(\eta)d\eta$ és $f(\varkappa)=a\neq 0$. Akkor bármely $\varepsilon>0$ számhoz található olyan $\varkappa'$ pont, amelyre $\varrho(\varkappa,\varkappa')<\varepsilon$ és* $\left|\frac{F(\varkappa')-F(\varkappa)}{|\varkappa',\varkappa|}\right|>(1-\varepsilon)|a|$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $U(\varkappa)$ a $\varkappa$ pont olyan kis, kör alakú környezete, hogy $\eta \in U(\varkappa)$ esetén $|f(\eta)-a| \leqq \varepsilon|a|$ és $|\eta, \varkappa| < \varepsilon$. Legyen meghatározottság kedvéért $a>0$. Legyen $C$ az $U(\varkappa)$ környezet határa, $\Omega$ azoknak a pontoknak a halmaza, ahol $f(\eta)=0$, és $\Omega_\varepsilon$ az $\varepsilon$-sugarú környezetével megnövelt $\Omega$ halmaz. Legyen $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$ és $\lim\limits_n \varepsilon_n = 0$. Legyen $\varepsilon_1$ olyan kicsi, hogy $\Omega_{\varepsilon_1} \cap U(\varkappa) = 0$. Legyen $\varrho \doteq \varrho(\varkappa, C)$ és legyen az $\varepsilon_n > 0$ szám olyan kicsi, hogy

$$\left| F(\zeta) - F(\xi) - (\varepsilon_n)\int\limits_{\xi}^{\zeta} f(\eta)\,d\eta \right| < \frac{\varepsilon\varrho}{n}.$$

Az integrál definíciója szerint található olyan, a $\xi$, $\varkappa$ pontokat összekötő $L_n$ rektifikálható egyszerű ív, amelyre

$$\int\limits_{L_n \cap C\Omega_{\varepsilon_n}} f^+(\eta)\,d\sigma < \int\limits_{\xi}^{\varkappa} f^+(\eta)\,d\eta + \frac{\varepsilon\varrho}{n}.$$

Legyen $L_n$ és $C$ metszéspontja $\tau_n$. Az $L_n$ ív $\tau_n$-től $\varkappa$-ig terjedő $L_n^*$ darabján nyilván $\int\limits_{L_n^*} f^+(\eta)\,d\sigma \geqq \varrho a(1-\varepsilon)$, és így, az $L_n^{**} = L_n - L_n^*$ jelöléssel,

$$(\varepsilon_n)\int\limits_{\xi}^{\tau_n} f^+(\eta)\,d\eta \leqq \int\limits_{L_n^{**} \cap C\Omega_{\varepsilon_n}} f^+(\eta)\,d\sigma < \int\limits_{\xi}^{\varkappa} f^+(\eta)\,d\eta + \frac{2\varepsilon\varrho}{n} - a\varrho(1-\varepsilon).$$

Legyen $\tau_0$ a $\tau_n$ sorozat egyik torlódási pontja. Nyilvánvaló, hogy

$$\int\limits_{\xi}^{\tau_0} f^+(\eta)\,d\eta \leqq \int\limits_{\xi}^{\varkappa} f^+(\eta)\,d\eta - a\varrho(1-\varepsilon).$$

De

$$\int\limits_{\xi}^{\tau_0} f^-(\eta)\,d\eta = \int\limits_{\xi}^{\varkappa} f^-(\eta)\,d\eta, \quad \text{és} \quad \int\limits_{\tau_0}^{\varkappa} f^-(\eta)\,d\eta = 0.$$

Tehát $F(\tau_0) \leqq F(\varkappa) - a\varrho(1-\varepsilon)$ és következésképpen $\left|\dfrac{F(\tau_0)-F(\varkappa)}{|\tau_0, \varkappa|}\right| \geqq a(1-\varepsilon)$.

A bizonyításnak az $a<0$ csetben szükséges módosítása nyilvánvaló.

74. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $f(\eta)$, $\xi$ és $F(\zeta)$ jelentése ugyanaz, mint a* 73. *segédtételben. Legyen $f(\varkappa) = a$. Akkor* $\lim\limits_{\varkappa' \to \varkappa} \left| \dfrac{F(\varkappa') - F(\varkappa)}{|\varkappa', \varkappa|} \right| = |a|$.

BIZONYÍTÁS. A 73. segédtétel miatt nyilván elég bebizonyítanunk, hogy

$$\overline{\lim_{\varkappa' \to \varkappa}} \left| \frac{F(\varkappa') - F(\varkappa)}{|\varkappa', \varkappa|} \right| \leqq a.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ bármilyen kicsi. Válasszuk a $\varkappa$ pont kör alakú $U(\varkappa)$ környezetét olyan kicsinek, hogy $\varkappa' \in U(\varkappa)$ esetén fennálljon az $|f(\varkappa')| < (|a|+\varepsilon)(1+\varepsilon)$ egyenlőtlenség. Akkor nyilván bármely $\varkappa' \in U(\varkappa)$ pontra

$$\int\limits_{\varkappa'}^{\varkappa} |f(\eta)|\,d\eta \leqq |\varkappa', \varkappa| \cdot (|a|+\varepsilon)(1+\varepsilon),$$

tehát

$$|F(\varkappa') - F(\varkappa)| \leqq \int\limits_{\varkappa'}^{\varkappa} |f(\eta)|\,d\eta \leqq |\varkappa', \varkappa| \cdot (|a|+\varepsilon)(1+\varepsilon),$$

vagyis

$$\left|\frac{F(\varkappa')-F(\varkappa)}{|\varkappa',\varkappa|}\right| \leqq (|a|+\varepsilon)(1+\varepsilon),$$

és ebből következik állításunk.

75. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $f(\eta)$ folytonos függvény, $\xi$ tetszés szerinti pont és $F(\zeta)=F(\xi)+\int_{\xi}^{\zeta} f(\eta)\,d\eta$. Az $F(\zeta)$ függvénynek majdnem mindenütt van teljes differenciálja, és mindenütt ahol* grad $F(\zeta)$ *létezik, fennáll* $|\text{grad } F(\zeta)|=|f(\zeta)|$.

BIZONYÍTÁS. A 74. segédtételből és *Sztyepanov* tételéből (34. tétel) következik, hogy $F(\zeta)$ teljes differenciálja majdnem mindenütt létezik. Csak azt kell megmutatnunk, hogy minden ilyen $\zeta$ pontban $|\text{grad } F(\zeta)|=|f(\zeta)|$. Tegyük fel, hogy ez nincs így. Ha $|\text{grad } F(\zeta)|<|f(\zeta)|$, akkor található olyan $d>0$, hogy $|\text{grad } F(\zeta)|<|f(\zeta)|-d$. De akkor a $\zeta$ pont elég kis $U(\zeta)$ környezetében fennáll az

$$\left|\frac{F(\zeta')-F(\zeta)}{|\zeta',\zeta|}\right| < |f(\zeta)|-\frac{d}{2}$$

egyenlőtlenség, ami ellentmond a 74. segédtételnek.

Analóg módon ha $|\text{grad} F(\zeta)|>|f(\zeta)|$, akkor egy $\zeta_n$ pontsorozatra, amely a maximális növekedés irányából tart $\zeta$-hoz, teljesül

$$\overline{\lim_{n}}\left|\frac{F(\zeta_n)-F(\zeta)}{|\zeta_n,\zeta|}\right| = |\text{grad } F(\zeta)|>|f(\zeta)|,$$

ami ismét ellentmond a 74. segédtételnek. A 75. segédtételt bebizonyítottuk.

76. SEGÉDTÉTEL. *Ha $F(\eta)$ folytonos függvény és $K$ e függvény olyan nívóhalmaz-komponense, amelynek síkbeli Lebesgue-mértéke pozitív, akkor $F(\eta)$ teljes differenciálja $K$-nak majdnem minden olyan pontjában nullával egyenlő, ahol a differenciál létezik.*

A b i z o n y í t á s abból adódik, hogy $K$-nak (a síkbeli *Lebesgue*-mértékre nézve) majdnem mindegyik pontja a $K$ komponens sűrűségi pontja, és a $K$ komponensen az $F(\eta)$ függvény állandó.

39. TÉTEL. *Legyen $f(\eta)$ folytonos függvény, $\xi\in J$ rögzített pont és $F(\zeta)=F(\xi)+\int_{\xi}^{\zeta} f(\eta)\,d\eta$. Akkor az $F(\zeta)$ függvénynek (a síkbeli Lebesgue-mértékre nézve) majdnem mindenütt van teljes differenciálja és $F'(\zeta)=f(\zeta)$ majdnem mindenütt.*

BIZONYÍTÁS. Az $F(\zeta)$ függvény majdnem mindenütt való differenciálhatósága szerepel a 75. segédtétel állításában. Továbbá $F'(\eta)=0$, $|\text{grad } F(\eta)|\neq 0$ csak akkor állhat fenn egyszerre, ha az $\eta$ pont az $F(\eta)$ függvény nem reguláris, vagy nem teljesen reguláris nívóhalmaz-komponenséhez, vagy a $\xi$ pontot tartalmazó komponenshez tartozik. De ilyen komponens legfeljebb megszámlálhatóan sok van. A 76. segédtételből következik, hogy bármely komponens azon pontjai halmazának, ahol $|\text{grad } F(\eta)|\neq 0$, síkbeli mértéke nulla. Következésképpen mindazon pontok halmaza, ahol $F'(\eta)=0$ és $|\text{grad } F(\eta)|\neq 0$, nulla mértékű. Ha viszont $\eta_0\in K$, ahol $K$ az $F(\xi)$ függvény reguláris nívóhalmaz-komponense, $f(\eta_0)\neq 0$ és az $F(\eta)$ függvény teljes differenciálja az $\eta_0$ pontban létezik, akkor a 75. segédtétel értelmében $|\text{grad } F(\eta_0)|=|f(\eta_0)|$, a 72. segédtétel értelmében pedig $K$ növekedési komponens, ha $f(\eta_0)>0$, és $K$ fogyási komponens az ellenkező esetben, vagyis $F'(\eta_0)=f(\eta_0)$. A tételt bebizonyítottuk.

## KIEGÉSZÍTŐ MEGJEGYZÉSEK

Cikkünket néhány megjegyzéssel zárjuk.

I. A kétváltozós függvények síkbeli és lineáris variációjának megszerkesztését bizonyos értelemben véglegesnek lehet tekinteni. Itt a következőkre gondolunk:

A) *A lineáris variációt a II. fejezet 4. §-ában ismertetett* (1—4) *tulajdonságok jellemzik*[1], vagyis ha a $V(F)$ funkcionál, amely értelmezve van minden $J$-n folytonos függvényre, nemnegatív, az egyenletes konvergenciára nézve felülről folytonos, $J$ önmagára való homeomorf leképezéseivel szemben invariáns és rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy $V(F_1+F_2) = V(F_1)+V(F_2)$, ha $F_1(\eta)$ és $F_2(\eta)$ állandó a $J_1$ ill. $J_2$ tartományon, amelyek összege $J$, akkor ez a funkcionál előállítható

$$V(F) = A_1 V_\xi^{b+}(F) + A_2 V_\xi^{b-}(F) + A_3 V^h(F)$$

alakban, ahol $A_1, A_2, A_3$ tetszés szerinti állandók és a $\xi$ pont $J$ határához tartozik (ha $J$ négyzet). Ily módon az $A_1, A_2, A_3$ konstansoktól eltekintve a lineáris variáció az egyetlen funkcionál, amely rendelkezik az (1—4) tulajdonságokkal.

B) A síkbeli variáció deskriptív jellemzését az utóbbi időben adta meg JE. V. GLIVENKO. Kiderült, hogy *a síkbeli variációt az* (1—7) *tulajdonságok* (lásd III. fej. 1. §) *állandó normáló tényezőtől eltekintve meghatározzák.* Ily módon a természetes követelmények — nemnegativitás, az egyenletes konvergenciára vonatkozó felülről félig-folytonosság, a funkcionál mint *Borel*-halmazokon értelmezett függvény teljes additivitása, invariancia az értelmezési tartományban végzett mozgatással szemben, továbbá a $W(CF) = |C|W(F)$, $W(F + \text{const.}) = W(F)$ követelmények szükségszerűen a síkbeli variációra vezetnek.

Érdekes lenne megvizsgálni a többi fogalmak — primitív függvény, lineáris integrál stb. — deskriptív bevezetésének lehetőségét.

II. $n$-változós függvények esetére a lineáris és a síkbeli variáció fogalma többé-kevésbé önműködően átvihető: *a lineáris variáció definíciója változatlan marad, a síkbeli variáció definíciójában pedig a nívóhalmazok Hausdorff-féle lineáris mértékét az* $(n-1)$*-dimenziós Hausdorff-mértékkel kell helyettesíteni.* Ekkor a II. és III. fejezet összes tételei érvényesek maradnak, kivéve a teljes differenciál létezéséről szóló 35. tételt. Kiderül, hogy például *háromváltozós függvények esetében szükség van a „közbenső dimenziószámú" variáció fogalmának bevezetésére.* Ez a variáció intuitive a következő elképzelésnek felel meg. A lineáris variáció megszerkesztésénél mindegyik nívón a *komponensek számát* vesszük figyelembe. A háromdimenziós variáció megszerkesztésénél minden nívón a *komponensek összterületét* fogjuk számításba venni. A „közbenső" vagy „kétdimenziós" variáció megalkotásánál pedig az adott nívó *komponenseinek összhosszúságát* kell megállapítanunk. Minden azon múlik, hogyan vezetjük be a komponens-felületek hosszúságának fogalmát. Egy lehetőség például az alábbi. A $P$ felületen rögzítünk egy $\xi$ pontot és képezzük azt az $F_\xi(\eta)$ függvényt, amely az $\eta \in P$ pontban a $\xi, \eta$ pontok $P$ felület mentén mért távolságával egyenlő. Vesszük az $F_\xi(\eta)$ függvény lineáris variációját. A kapott $L(P, \xi)$ számot elnevezzük a $P$ felület $\xi$-re vonatkozó hosszúságának. Cső alakú felületeknél az $L(P, \xi)$ szám közel lesz a cső intuitív értelemben vett „hosszúságához". A kellemetlenség abban áll, hogy $L(P, \xi)$ *függ a* $\xi$ *ponttól.* Lehetséges volna az $L(P) = \inf_{\xi \in P} L(P, \xi)$ definíció. Ha most képezzük a $v_2(t) = \Sigma L(P)$ összeget a $t$ nívó valamennyi $P$ komponensére, akkor a $V_2(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_2(t)\,dt$ számot elfogadhatjuk a háromváltozós függvény *kétdimenziós variációja* gyanánt. Ha $V_1(F)$ jelenti az $F(\eta)$ függvény lineáris, $V_3(F)$

[1] E kérdés vizsgálatában (a gömbfelület esetére) részt vett SZ. M. PLOTNYIKOVA.

pedig a „háromdimenziós" variációját, akkor például a $V_s(F)$ ($s=1, 2, 3$) variációk egyidejű korlátossága maga után vonja $F(\eta)$ teljes differenciáljának majdnem mindenütt való létezését. Analóg módon értelmezni lehetne akárhány változójú függvények összes „$k$-dimenziós" variációit és ezeknek a $k=1, 2, \ldots, n$ értékekre való egyidejű korlátosságából szintén következnék a függvény majdnem mindenütt való differenciálhatósága. Az értelmezésnek ez a módja azonban semmiképp sem kötelező. A $k$-dimenziós variációkat be lehet vezetni számos egyéb, lényegesen különböző módon is, ugyanazzal a sikerrel. Ennek ellenére úgy vélem, hogy minden alap megvan az $n$-változós függvények „$k$-dimenziós" tulajdonságainak figyelmes tanulmányozására és az ilyen függvények valóban geometriai jellemzőinek keresésére. Ezzel kapcsolatban meg kell még jegyezni, hogy az $n$-változós függvények és az $(n-1)$-dimenziós felületek „$k$-dimenziós" jellemzőinek kérdése szorosan összefügg egymással. Így valamely kétdimenziós felület érintősíkjának majdnem mindenütt való létezéséhez elégséges felszínének és a fent bevezetett értelemben vett hosszúságának egyidejű korlátossága. Magasabb dimenziójú felületek esetében viszont felmerül olyanfajta jellemzők szükségessége, mint $n$-dimenziós felület „$k$-dimenziós" hosszúsága. Végül az az elég messzemenő párhuzamosság, amely egyrészt a síkbeli variáció és a *Lebesgue*-féle kettős integrál, másrészt a lineáris variáció és a lineáris integrál kapcsolata között mutatkozik, felveti a kérdést, nem lehet-e $n$-változós függvényekre, hogy úgy mondjuk, „$k$-dimenziós" integrál jellegű mennyiséget szerkeszteni. Sajnos, az ebbe az irányba vezető utak még egyáltalán nem világosak.

III. Az *egyetlen* valós változójú függvények elmélete szempontjából a *folytonosan differenciálható* függvények *„ideálisan simák"*. A többváltozós függvényekre való áttérésnél lényeges szerephez jut a többszöri differenciálhatóság. Úgy látszik, ebben az esetben az *n-szer folytonosan differenciálható n-változós függvények* az „ideálisan sima" függvények. Például e függvények osztályában igaz az, hogy a primitív függvény növekménye egyenlő a derivált integráljával, hogy a lineáris variáció korlátos, hogy majdnem minden nívóhalmaz sima stb. A dolog lényege, úgy látszik, abban rejlik, hogy $n$-szer differenciálható $n$-változós függvény szinguláris pontjai — gradiensének zérushelyei — a nívóknak egy nulla mértékű rendszerén helyezkednek el. Ezzel kapcsolatban nagyon fontosnak tűnik annak a kiderítése, mennyire érvényesül a simaság követelményének e szigorítása a primitív függvénynek a deriváltból való egyértelmű meghatározhatóságában (lásd IV. fej. 2. §). Speciálisan: különbözhet-e lényegesen (nemcsak konstansban) két $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ függvény, amelyek a kétdimenziós gömbfelületen vannak értelmezve, ott folytonosan differenciálhatók, és amelyeknek ugyanazon $\xi$ pontra vonatkozó deriváltja megegyezik? Ha erre a kérdésre a válasz tagadó lesz, akkor napirendre kerül a $D_1$ osztályhoz tartozó függvények deriváltjukból való meghatározásának problémája, vagyis az a feladat, hogy a lineáris integrálnak a IV. fejezet 1. §-ában javasolt konstrukcióját más, tökéletesebb konstrukcióval helyettesítsük. Megemlítjük még, hogy a „jó" leképezés nyerése érdekében a függvénytől megkívánandó simaságnak az értelmezési tartomány dimenziószámától való függése megfigyelhető $k$ számú $n$-változós függvényből álló rendszereknél is. Ebben az irányban az utóbbi időben A. JA. DUBOVICKIJ éles, egy a 15. tétellel analóg tételt általánosító, eredményt kapott. Kiderül, hogy ebben az esetben mindegyik függvény $(n-k+1)$-szer való differenciálhatóságára van szükség.

IV. Érdekesnek látszik az a lehetőség, hogy geometriailag tanulmányozzuk az $n$-dimenziós kocka $k$-dimenziós kockába való leképezéseit ugyanúgy, ahogyan a kétváltozós függvényeket, vagyis a négyzetnek egyenesszakaszra való leképezéseit vizsgáltuk. Itt a leképezés tulajdonságainak ugyanolyan, „dimenziószám szerinti" szétesése várható, mint egyetlen függvény esetében. Amennyire előttünk ismeretes, az $n$-dimenziós kockának $n$-dimenziósra való leképezésére vonatkozó eset kivételével (lásd pl. [12]) ezen a téren semmi sincs elintézve.

V. Amint a III. fejezetben már rámutattunk, a kétváltozós függvények és a felületek tanulmányozása szorosan összefügg egymással. Speciálisan a síkbeli variáció fogalma lehetővé teszi a paraméteresen megadott felületek *Lebesgue*-féle felszínének kényelmes vizsgálatát. Nem lévén lehetőségem röviden és mégis valamennyire érthetően megvilágítani ezt a kérdést, csak azt jegyzem meg, hogy az $F_\xi(\eta)$ „távolságfüggvény" síkbeli variációja a korlátos *Lebesgue*-felszínnel rendelkező $P$ felületen megadja „$\xi$ körzetének", vagyis azon $\eta$ pontok halmazának felszínét, amelyek a $\xi$ ponttól, a $P$ felület mentén mérve, véges távolságban helyezkednek el. Kiderül, hogy korlátos *Lebesgue*-felszínű $P$ felület egész felszíne megszámlálhatóan sok ilyen körzetben összpontosul. Természetes dolog olyan felületek felszínének vizsgálata, amelyek nem paraméteresen, hanem bizonyos megszorításoknak alávetett metrikus térként vannak megadva. Többek között érdekes lenne tisztázni, hogy az ilyen absztrakt módon értelmezett felületek mely osztályára lesz az $F_\xi(\eta)$ „távolságfüggvény" síkbeli variációja minden egyes „körzetben" invariáns az ezen körzethez tartozó pont megválasztásával szemben. Van alap annak feltételezésére, hogy a felületeknek ez az osztálya sok tekintetben „jónak" fog bizonyulni.

*Fordította:* Bognár János
*a matematikai tudományok kandidátusa*

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1963. március 23. — Terjedelem: 10 (A/5) ív, 6 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 63-1317

Ára: 22,— Ft

# TARTALOMJEGYZÉK



## A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL



Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI

XIII. KÖTET 3. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1963

# A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
## MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
# KÖZLEMÉNYEI



XIII. kötet 3. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye, változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésén bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismeretetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

# A. N. KOLMOGOROV AKADÉMIKUS 60 ÉVES

Ez év április 25-én töltötte be hatvanadik életévét korunk egyik legkiemelkedőbb matematikus—természettudós egyénisége: ANDREJ NYIKOLÁJEVICS KOLMOGOROV. Hatvanadik születésnapját barátai és tanítványai körében ünnepelte a moszkvai matematikus társaságban, ahol egyik legtehetségesebb tanítványa, V. I. ARNOLD számolt be mestere eredményeiről a klasszikus mechanikában, majd maga az ünnepelt tartott előadást: „Munkám gyakorlatából" címmel. Munkája elismeréseként 60. születésnapján Lenin-renddel tüntették ki, s minden tekintélyes szovjet napilap külön cikkben is megemlítette érdemeit. Hazánkban nem matematikusok előtt sem ismeretlen a neve. Még napilapjaink is írtak róla, hogy ez évben az olasz Balzan-díjjal tüntették ki, másrészt a kibernetika filozófiai problémáiról írt cikkei nemrég jelentek meg magyar nyelven is.

Neve ma már egybefonódott a modern matematika egyik legfontosabb ágának, a valószínűségszámításnak megalapozásával és azóta is úgy ismerjük, mint aki jelentős eredményeit a valószínűségszámításban érte el. Pedig a valószínűségszámításon kívül a matematikának szinte minden ága foglalkoztatta és időszakonként egymástól egészen távolálló területeken ér el korszakalkotó, jelentős eredményeket.

A Moszkvai Egyetemre 1920-ban iratkozott be, s mielőtt matematikával kezdett foglalkozni, egy történelmi tárgyú dolgozatot írt a régi Novgorod földviszonyairól XV. és XVI. századi dokumentumok alapján.

A moszkvai matematikus iskola kialakításában, mely éppen ebben az időben indult fejlődésnek, N. N. LUZIN, P. SZ. ALEKSZANDROV és A. JA. HINCSIN mellett szinte felbecsülhetetlen érdemei vannak. Nemcsak a valószínűségszámítási iskola megteremtésében, hanem a funkcionálanalízis, topológia és sorelmélet iskolái kialakításában is jelentős a szerepe. Jelenleg ismét egy új iskola — talán nevezhetnénk ezt kibernetikainak — kialakításán dolgozik fiatal tanítványai körében. A felsorolásban egyáltalán nem törekedtem teljességre. Hogy teljes mértékben megértsük hatásának jelentőségét, részt kell venni szemináriumain, el kell járni a társulat üléseire és látni kell azt az eleven, állandó mozgásban levő matematikai életet, melyet maga körül kialakít. És még akkor sem tudja az ember teljesen megérteni mi lelkesedésének és szenvedélyes munkájának, csodálatos eredményeinek, a körülötte kialakult légkörnek a „titka". Nincs magatartásában semmi titokzatos és megfejthetetlen, és éppen ebben van a jelentősége, mert úgy mutatkozik meg mindig, mint egész ember, akár arról van szó, hogy valami új eredményt kell elmagyaráznia, esetleg megértenie, akár arról, hogy valami sportversenyt rendezzen tanítványai között, amiben maga is részt vesz. Ha arra vagyunk kiváncsiak, hogy miben különbözik nagy elődeitől, nagyon kevés újat tudnánk mondani. Minden egyszerűsége és embersége ellenére azonban valami kiemeli környezetéből. Mindig a dolgok legmélyére akar nézni, s amit csinál, azt lelkesedéssel, szenvedélyesen csinálja és hogy mennyit kell neki magának és aztán tanítványainak vagy másoknak a megoldás érdekében dolgozni, szintén jól tudja. Iskolája mindig úgy működik, mint egy jó gépezet. Tanítványai, munkatársai felvetett problémáit mindig útmutatónak tekintik, még elejtett megjegyzéseinek is komoly jelentőséget tulajdonítanak, melyeket az adott probléma megoldásával kapcsolatban feltétlen figyelembe kell venni. Jelentőségét éppen a problémák lényegének a megfogalmazásában látják, mindig meg tudja mutatni a feladat jelentőségét és perspektíváit. Közvetlen tanítványainak száma több mint ötven, közöttük a szovjet matematikus élet olyan jelentős egyéniségei vannak, mint A. I. MALCEV, M. D. MILLIONSCSIKOV, I. M. GELFAND, B. V. GNYEGYENKO, A. M. OBUHOV, E. B. DINKIN, SZ. M. NYIKOLSZKIJ, JU. V. PROHOROV, A. SZ. MONYIN, A. M. JAGLOM, SZ. H. SZIRAZSGYINOV, R. L. DOBRUSIN, B. V. SZEVASZTYJANOV, a fiatalabbak közül ARNOLD, SZINAJ, ROZANOV, SIRJAJEV, TYIHOMIROV, VITUSKIN, OFFMAN, hogy csak a legjelentősebbeket említsem, semmiképpen sem törekedve a teljességre.

Tanítványai, egyben barátai, gyakran egész életükre szóló útmutatást kaptak azokból a problémákból, melyekkel tanulmányaik alatt KOLMOGOROV őket megismertette. Problémái azonban nem általánosan megfogalmazottak, az emberekhez szabja őket. Kutatási módszerében talán a legfontosabb mozzanat, hogy a valós világ objektív törvényszerűségeinek felfedezésében látja a matematika feladatát. Rá kell jönni a törvényszerűségre, még ha azután a bizonyítás hosszadalmas és fáradságos munka is. A matematikus munkájában is a fölfedezés legyen a hajtóerő.

Ifjú kora óta fiatalos lelkesedéssel a matematikának és más természettudományoknak, hol ebben, hol abban az ágában ér el egészen rövid idő alatt alapvető eredményeket. Foglalkozott és foglalkozik valós függvénytannal, valószínűségszámítással, matematikai logikával, matematikai statisztikával, analízissel, halmazelmélettel, kibernetikával, geometriával, topológiával, funkcionálanalízissel, matematika történettel és a matematika filozófia problémáival, mechanikával és geofizikával is. Sok fiatal matematikus tanulhat tőle még ma is a 60 éves tudóstól lelkesedést, fiatalosságot.

1922-ben érte el első eredményeit a deskriptiv halmazelméletben, majd a trigonometrikus sorok elméletével, az integrál fogalom kialakításával, mértékelméleti problémákkal, logikával és halmazelmélettel foglalkozik. Mindig a legégetőbb, legfontosabb problémák érdeklik, eredményei ma is frissek és útmutatóak.

Így van ez pl. a trigonometrikus sorok elméletében, ahol az ő kutatásai hosszú ideig a problémakör lezárását jelentették. A mi TANDORI KÁROLYunk érdeme is, hogy KOLMOGOROV eredményei ismét előtérbe kerültek. Éppen TANDORI munkásságával kapcsolatban jegyezte meg KOLMOGOROV, hogy véleménye szerint ezen az igen nehéz területen, oly hosszú szünet után, ismét történt előrehaladás s nagyon örült, hogy az ő régi kutatásaihoz kapcsolódva jutottak ilyen kitűnő eredményekre.

A 30-as években érdeklődésének középpontjában a valószínűségszámítás áll. Útmutató munkája mindjárt az elején kettős jellegű, egyrészt az elmélet pontos logikai megalapozása, másrészt a valószínűségszámítás felhasználási és kutatási területének kiterjesztése. Mindkét feladatot megoldotta, szinte egy időben. A „Valószínűségelmélet alapvető fogalmai" című munkájában szigorú megalapozását adja ennek az elméletnek, melyet azóta valamennyi számottevő tudós elfogadott s ma már minden valószínűségszámítási kutatásnak ez képezi az alapját.

„A valószínűségelmélet analitikus módszerei;” című munkájában pedig a valószínűségi folyamatok egyik legfontosabb osztályával, a *Markov*-folyamatok elméletével vagy más néven a diffúziós folyamatok elméletével foglalkozik. KOLMOGOROV ezen kutatásai képezték nemcsak a sztochasztikus folyamatok elméletének alapvető kiindulási pontját, de a moszkvai parciális differenciálegyenletek iskola kialakulását is innen lehet számítani.

A 30-as években még számos alapvető cikke jelenik meg a sztochasztikus folyamatok elméletéről, a diffúziós folyamatok alkalmazásairól a biológiában, a független növekményű folyamatok általános tárgyalásáról. A 40-es évek elején a stacionárius folyamatok és a Hilbert terek operátorainak spektrál előállítása közötti mély kapcsolatot tárja fel: megmutatja, hogy minden stacionárius $\xi(t)$ folyamat előállítható

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dz(\lambda)$$

alakban, ahol $z(\lambda)$ egy ortogonális növekményű folyamat, melynek szórásnégyzete a folyamat spektrál eloszlását adja. A háború alatt foglalkozik a valószínűségszámítás alkalmazásaival tűzérségi problémákra, majd közvetlen a háború után az elágazó folyamatok elméletével s azok fizikai alkalmazásaival. Az ötvenes években az információelméletben ér el jelentős eredményeket, majd valószínűségszámítási és információelméleti módszerekkel a dinamikus rendszerek elméletében vagy más néven ergodelméletben ér el olyan eredményt, mely az egész elmélet újabb virágzásához vezet. Közben foglalkozik matematikai-statisztikai problémákkal is. Ez a felsorolás egyáltalán nem kimerítő, nem öleli fel még futólag sem mindazokat a valószínűségszámítási problémákat sem, melyekkel A. N. KOLMOGOROV eddig foglalkozott. Nem áll rendelkezésünkre az a távlat, melynek segítségével igazán lemérhetnénk KOLMOGOROV jelentőségét, akár csak a valószínűségszámításban is.

Egyáltalán nem beszéltem a matematika más ágaiban végzett kutatásairól, nem mintha azok kevésbé lennének jelentősek, de egy ilyen rövid megemlékezésben erre nincs lehetőség és mód, másrészt az olvasó részletes képet kaphat róla az Успехи МАТ. Наук 1953-as évfolyamában A. JA. HINCSIN és P. SZ. ALEKSZANDROV tollából megjelent, KOLMOGOROV élete munkáját ismertető cikkből.

Az alábbiakban csak vázlatosan felsorolnám mindazon ágait a matematikának, mellyel az 1953 óta eltelt időben foglalkozott. A már említett információelméleti és ergodelméleti úttörő munkásságán kívül foglalkozott klasszikus mechanikai problémákkal — ezekről tartott előadást az amszterdami matematikus kongresszuson. HILBERT 13-ik problémájával kapcsolatos eredményekről SZ. NAGY BÉLA akadémikus beszámolt HILBERTről szóló megemlékezésében, itt csak annyit tennék hozzá, hogy ezek az eredmények képezték a kiindulópontját azoknak az alapvető kutatásoknak, melyeket a függvényközelítések elméletében információelméleti módszerekkel KOLMOGOROV és tanítványai (VITUSKIN, TYIHOMIROV) elértek. A sztochasztikus folyamatok elméletében és különösen azok alkalmazásai terén elért eredményei mindig eseményszámba mennek valószínűségszámítási körökben, erről tanúskodnak az azóta az ő vezetésével alapított Теория вероятностей и ее применения c. folyóiratban megjelent cikkei. Fiatalos hévvel foglalkozik az utóbbi években a matematikai statisztika módszereivel. Különösen a nyelvészetben és a folyamatok statisztikája terén elért eredményei értékesek.

Nagy munkabírására és lendületére jellemző, hogy még táblázatok összeállítási munkájában is részt vesz. A legutóbbi években ismét visszatért a matematikai logika problémáihoz és az automaták elméletével foglalkozik. A kívülálló számára úgy tűnik, hogy itt egymástól távolálló s egymással semmilyen kapcsolatban nem levő, a problémáknak szinte véletlenszerű kiválasztásáról van szó. Ez egyáltalán nincs így, megoldott és kitűzött problémái egy egységes egész szoros kapcsolatban levő láncszemei. A kapcsolatot valóban sokszor nagyon nehéz kívülről észrevenni, mint pl. HILBERT 13. feladatának megoldása és az $\varepsilon$-entrópia fogalma között a függvényközelítések elméletében, de a mélyebb vizsgálat ezt kideríti. Ugyanúgy mint az automaták elmélete s a táblázatok készítése közötti kapcsolat sem a véletlen műve.

A. N. KOLMOGOROV nem az „élettől elszakadt" tudós, a közélet problémái nemcsak érdeklik, de aktívan részt is vesz bennük. Az Известия c. napilapban szinte rendszeresen jelennek meg cikkei a Szovjetunió tudósképzéséről és más problémákról. Cikkeit mindig az előremutatás szándéka iratja, de látszódik bennük a hozzáértés és felelősségérzet is, akár középiskolás oktatási problémákról legyen is szó.

Az eddigi felsorolásból is kitűnik, de külön ki szeretném hangsúlyozni, hogy nemcsak a matematikában elért elméleti munkái jelentősek, hanem a gyakorlatiak is. A fizikai, geofizikai, tűzérségi, geológiai, nyelvészeti, biológiai vagy a minőségellenőrzési eredményei épp oly jelentősek, mint a matematikaiak. Ezekkel a problémákkal úgy foglalkozik, mint az illető szaktudomány kutatója, s szinte hihetetlenül rövid idő alatt fel tudja dolgozni az illető probléma addigi irodalmát, s ki tudja választani a megfelelő járható utat. Úttörő a munkássága azért is ebben az irányban, mivel rámutat, hogy a modern matematikának nemcsak a fizikában vannak kötelességei és feladatai, hanem megmutatja, hogy az alkalmazások köre nagymértékben kitárult, s szinte beláthatatlanok a lehetőségei.

Az ő munkássága és tevékenysége jelentősen hozzájárult ahhoz egyrészt, hogy a matematikai módszerek a Szovjetunióban mindenhová bevonultak, illetve bevonulnak, másrészt, hogy a matematikus szónak értéke van és egyre növekszik a megbecsülése.

Meg szeretném említeni, hogy a moszkvai matematikus iskola kialakulásában nemcsak azért van jelentősége, mivel személyes befolyása, hatása nagy, hanem azért is, mert pl. az egyetemi oktatási anyag kiválasztásában aktívan vett részt, és az aspiránsképzés jelenlegi formájában az ő elképzelései alapján valósult meg. A szorgalmas munka híve, ő is azt tartja, hogy a matematika eredményes műveléséhez nem elegendő a tehetség — ez feltétlen kell — de tanulás, állandó képzés és kitartó munka nélkül nincsenek komoly és állandó eredmények. Ezt tükrözi az aspiráns vizsga-tematika és az a szigorúság, mellyel megköveteli az elsajátított anyag ismeretét.

Tanítványai bármikor megkereshetik a tanszéken, lakásán, vagy nyaralójában. Nyaralójába rendszeresen meghívja fiatal tanítványait — aspiránsait, diákjait — akikkel hosszú — fürdéssel, síeléssel egybekötött — sétákon, kellemesen eltöltött estéken megbeszéli matematikai, de minden más problémájukat. Tanítványaiban az egész embert keresi, mint matematikus pedig egyformán becsül mindenkit, itt nem ismer életkort, csak gondolatot és munkát.

A ma is fiatal, elképzelésekkel és új tervekkel teli alkotó munkássága teljében levő A. N. KOLMOGOROVnak a magyar matematikus társadalom nevében kívánunk hosszú életet és további sikereket.

*Arató Mátyás*

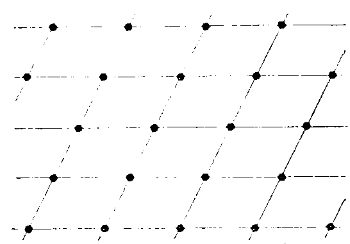
# MI A „DISZKRÉT GEOMETRIA“?

Írta: FEJES TÓTH LÁSZLÓ

Az 1957-ben elhunyt kiváló német matematikus, W. Süss által létrehozott *Oberwolfachi Matematikai Kutató Intézet* fogalommá vált mint a különböző matematikai kollokviumok gyakori színhelye. Ebben az intézetben, amely a Schwarzwald egy kies völgyében fekszik, 1962 júliusában 10 különböző országból mintegy 30 matematikus jött össze egy „Diszkrét geometriai kollokviumra”. Mi az a diszkrét geometria, amelyről matematikus körökben egyre több szó esik? Ezt szeretném szélesebb körök számára megvilágítani.*

**1.** A „diszkrét” szó mai közhasználati jelentése eltér a szó matematikai jelentésétől. A matematikában egy diszkrét ponthalmazon szeparált pontokból álló, diszkontinuus halmazt értünk, amilyen pl. egy pontrács (1. ábra) ellentétben mondjuk egy körlap összes pontjából álló ponthalmazzal. A diszkrét geometria elnevezés tehát arra utal, hogy itt nem-folytonos geometriai halmazok vizsgálatáról van szó.

Ezeknek a vizsgálatoknak a zömét mind tárgyuk, mind módszereik alapján az elemi geometria, a csoportelmélet vagy a konvex testek elmélete körébe lehetne sorolni. A tárgy sajátos jellege, fejlődésének fokozódó üteme, valamint eredményeinek érdekessége és fontossága mégis indokolttá teszi azt, hogy a diszkrét geometriát önálló, új tudományágnak tekintsük. Vessünk egy pillantást ennek a tudományágnak a kialakulására, néhány jellegzetes problémájára és más tudományágakkal való kapcsolatára!

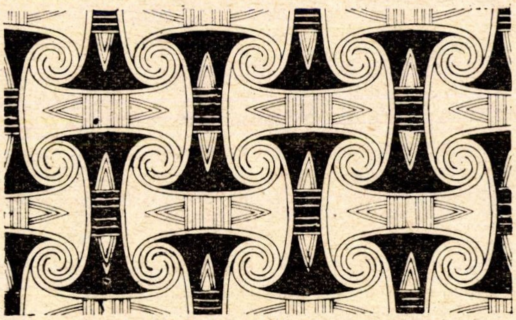


*1. ábra*

**2.** A diszkrét geometria régebbi, mintegy a századfordulóig terjedő időszakát az jellemzi, hogy itt a kutatások csak szabályosan elrendezett elemekből álló halmazokra irányultak. A síknak és a gömbnek szabályos és félig szabályos felbontásaival már a görögök foglalkoztak. KEPLER észrevette, hogy a tér rombdodekaéderekkel kirakható. Ennek az észrevételnek általánosításaként FJODOROV, orosz krisztállográfus felsorolta az összes paralleloédert, vagyis azokat a konvex soklapokat, amelyeknek eltolt és teljes lapok mentén csatlakozó példányaival a tér átfedés és hézag nélkül kirakható. Lord KELVIN és W. BARLOW kristályszerkezeti, MINKOWSKI pedig számelméleti kérdésektől ösztönözve testek rácsszerű elhelyezésével kapcsolatos szélsőértékproblémákat vizsgált. Szóljunk most néhány szót ennek az időszaknak legjelentősebb eredményeiről, a krisztállográfiai csoportok elméletéről.

* Ez az ismertetés a Bolyai János Matematikai Társulat és a Kossuth-klub közös rendezésében 1963. március 26-án tartott előadás nyomán készült.

2. ábránk egy óegyiptomi falmintát mutat. A mintát bizonyos eltolások, tükrözések, és forgások önmagába viszik át. Ezeket a transzformációkat a minta *szimmetria-operáció*inak nevezzük. Az ilyen falminták szimmetria-operációikat tekintve igen különbözők lehetnek. A 3. ábrán látható minta ESCHER, modern holland grafikustól származik. Itt egyenlő alakú és nagyságú szárnyas tigrisek vonulnak egymással szembe, mégpedig úgy, hogy a síkot hézag nélkül lefedik. Ha nem tekintjük a tigrisek színének a különbözőségét, akkor itt, eltolásokon kívül, bizonyos „csúszótükrözések” is szerepelnek szimmetria-operációkként.



*2. ábra*

Milyen falminta típusok léteznek? Hogyan lehet őket osztályozni és valamennyit szisztematikusan felsorolni? A választ FJODOROV adta meg 1883-ban: az ún. kétdimenziós *krisztállográfiai csoportok* száma 17.

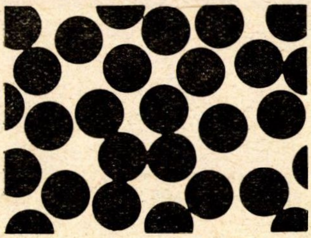
*3. ábra*

A krisztállográfiai csoport fogalmának megértése céljából tekintsük egy mintában előforduló szimmetria-operációk összességét. A transzformációknak ez a sokasága a következő két tulajdonsággal bír: 1. A sokaság bármely két transzformációjának egymásutáni alkalmazásával adódó transzformáció szintén hozzátartozik a sokasághoz. 2. A sokaság bármely transzformációjának van a sokaságban egy inverze, vagyis egy olyan transzformáció, amely az eredeti transzformáció hatását megsemmisíti. Ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy egy minta szimmetria-operációi *csoportot* alkotnak. Ez a csoport, a minta szimmetria-csoportja szabja meg a minta jellegét, típusát. Ezeknek a csoportoknak az áttekintéséről van tehát szó. S ezt az áttekintést éppen a csoporttulajdonságok teszik lehetővé.

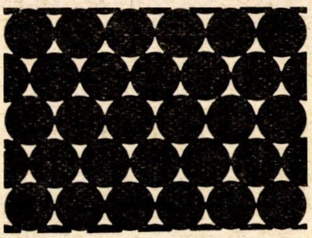
A 17 falminta típus közül sokat már az egyiptomiak ismertek, az arabok pedig páratlan geometriai intuícióval mind a 17-et felfedezték.

A múlt században az atomelmélet rohamos térhódítása miatt nem a két-, hanem a háromdimenziós krisztállográfiai csoportok, az ún. *tércsoportok* álltak az érdeklődés középpontjában. Ezek teljes felsorolását egymástól függetlenül FJODOROV, SCHÖNFLIESS és BARLOW adta meg. Annak a nagy horderejű kérdésnek a tisztázásáról van itt szó, milyen szimmetria-tulajdonságokkal bírhatnak a matematikailag lehetséges kristálystruktúrák. Ennek a kérdésnek a nehézségét már az is mutatja, hogy a szóban forgó tércsoportok száma 230.

**3.** A diszkrét geometriának szabályos alakzatokkal foglalkozó klasszikus iránya századunkban is folytatódik. Meg kell itt említeni a geometriai számelméletben elért mélyreható eredményeket, amelyek egy többdimenziós térben rácsszerűen elhelyezett testek vizsgálatán alapulnak, valamint a matematikai krisztállográfia számos újabb eredményét. Említsünk egy jelentős konkrét eredményt is: DELONAY, szovjet matematikus, felsorolta a *Fjodorov*-féle paralleloéderek 4-dimenziós analogonjait. Míg a háromdimenziós térben csak öt különböző típusú paralleloéder van, addig a topológiailag különböző típusú négydimenziós paralleloéderek száma 52.



*4. ábra*

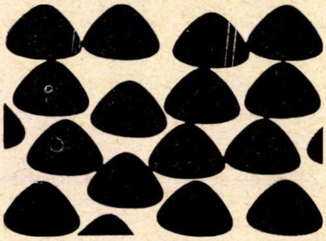


*5. ábra*

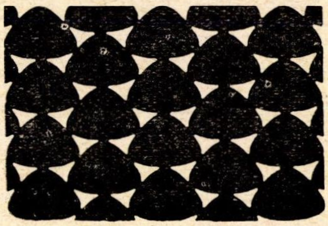
Az utóbbi időben azonban az érdeklődés egyre inkább általános diszkrét halmazokra irányult, amelyeknek elemei *teljesen szabálytalanul* helyezkedhetnek el. Szórjunk szét a síkon minden rendszer nélkül egyenlő nagyságú körlapokat úgy, hogy egy kör se nyúljon egy másikba (4. ábra). Lehet egy ilyen körhalmazra valamilyen nem triviális, általános érvényű tételt kimondani? Igenis lehet! Bebizonyítható például, hogy a körhalmaz sűrűsége mindig $\leqq \pi/\sqrt{12}=0{,}9069\ldots$. Szemléletesen kifejezve: egymásba nem nyúló, egybevágó körökkel a síknak legfeljebb 90,69 ...%-a tölthető ki.

Milyen körhalmazok érhetik el a fenti sűrűségkorlátot? Röviden: melyik a legsűrűbb körelhelyezés? Az, amelyikben minden kört hat másik érint. (Erről az eredményről írja egy helyen a kiváló kanadai matematikus, H. S. M. COXETER, hogy azt sokan előre sejtenék, de csak kevesen tudnák bebizonyítani.) A legsűrűbb elhelyezésben tehát a körök rácsot alkotnak (5. ábra).

Hasonlóan van ez sok más esetben is: kiindulunk egy rendezetlen, káotikus sokaságból, amely egy tágabb értelemben vett gazdaságossági elv hatására auto-



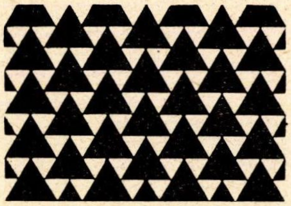
*6. ábra*



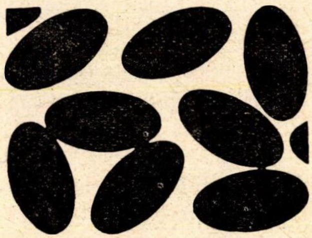
*7. ábra*

matikusan szabályossá válik. Így kapcsolódik a diszkrét geometria újabb iránya a klasszikushoz.

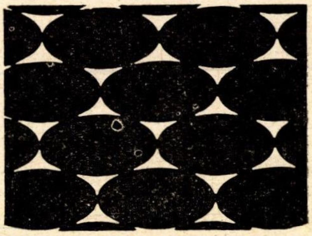
**4.** A legsűrűbb körelhelyezés problémáját A. THUE, az alapvető számelméleti eredményeiről ismert norvég matematikus oldotta meg még a múlt század végén. Ez a probléma számos újabb vizsgálat kiindulási pontját képezte. C. A. ROGERS[1] körök helyett tetszés szerinti egybevágó, *párhuzamos helyzetű konvex lemezeket* tekintett (6. ábra), s bebizonyította, hogy ilyen lemezek legsűrűbb elhelyezése mindig rácsszerű (7. ábra). A lemezek párhuzamos helyzetének feltétele természetesen nem hagyható el, amint azt a háromszög példája mutatja: rácsszerűen elhelyezett háromszögekkel a síknak legfeljebb 2/3-a tölthető ki (8. ábra), míg tetszés szerinti helyzetű kongruens háromszögekkel a sík teljesen kirakható. Centrálisan szimmetrikus lemezek esetén azonban nem kell kikötni a párhuzamos irányítást: *centrálszimmetrikus, egybevágó konvex lemezek semmilyen elhelyezésének sűrűsége sem haladhatja meg a legsűrűbb rácsszerű elhelyezés sűrűségét*[2] (9. és 10. ábra). Meg kell azonban itt jegyezni, hogy a maximális sűrűséget a lemezek néha nemcsak rácsszerű elrendezésben érhetik el. Példaképpen tekintsünk tégla-



*8. ábra*



*9. ábra*



*10. ábra*

lapokat, amelyek elhelyezésének maximális sűrűsége nyilván 1. De ezt a sűrűséget a téglalapok rácsszerű elhelyezésen kívül parkettszerű vagy más típusú elhelyezésben is felvehetik.

Bizonyos sejtszövetekben a sejtek nem töltik ki teljesen a rendelkezésükre álló teret. Ilyen szövetek vizsgálata érdekes matematikai problémákhoz vezet. Képzeljük például, hogy a sejtek adott térrészbe zárt, szabadon deformálható, de egyenlő, változatlan felszínű testek. Mikor lesz a sejtek térfogatösszege maximális? Ennek a problémának a duálisa az, hogy a sejteket egyenlő térfogatú testeknek tekintjük és azt kérdezzük, mikor lesz azok felszínösszege minimális.

11. ábránk a kukoricaszár ún. parenchimatikus szövetének egy metszetét mutatja[3]. Itt a sejtek a szár tengelyirányában erősen megnyúlt oszlopocskáknak tekint-

[1] C. A. ROGERS: The closest packing of convex two-dimensional domains, *Acta math.* **86** (1951) 309–321.

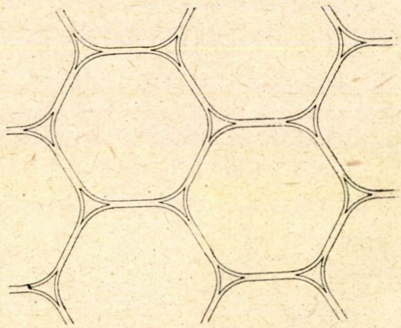
[2] L. FEJES TÓTH: Some packing and covering theorems. *Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math.* **12/A** (1950) 62–67.

[3] D'ARCY W. THOMPSON: *On growth and form II.* Second edition, Cambridge 1952. p. 471.

hetők, úgyhogy térfogatuk és felszínük arányosnak vehető keresztmetszetük területével és kerületével. Felvetődnek azért a fenti térbeli problémák síkbeli analogonjai, amelyek egzakt fogalmazásban így hangzanak:

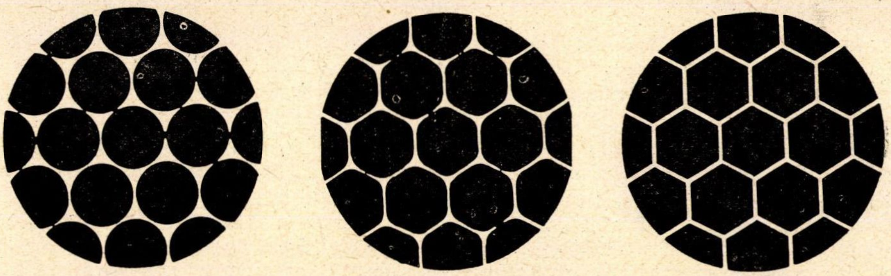
I. Tekintsük az euklideszi síkon egyenlő kerületű, egymásba nem nyúló, konvex tartományok egy halmazát. Tegyük fel, hogy a tartományok alakja és helyzete szabadon változhat, oly módon azonban, hogy kerületük és *számsűrűségük*[4] ne változzék. Milyen alak és elrendezés esetén lesz a tartományok átlagos területe maximális?

II. Tekintsük az euklideszi síkon egyenlő területű, egymásba nem nyúló, konvex tartományok egy halmazát. Tegyük fel, hogy a tartományok alakja és helyzete szabadon változhat, oly módon azonban, hogy területük és számsűrűségük ne változzék. Milyen alak és elrendezés esetén lesz a tartományok átlagos kerülete minimális?



*11. ábra*

Az első problémát a szerző[5], a másodikat a szerző HEPPES ALADÁRral közösen[6] oldotta meg. Ha rögzített számsűrűség mellett a tartományok közös kerületét, illetőleg területét kis értékekből kiindulva növeljük, akkor az extremális tartományok mindkét esetben először tetszés szerinti módon elhelyezett körök lesznek, amelyek bizonyos kerület-, illetőleg területértékre a legsűrűbben helyezkednek el, majd körívekkel lekerekített hatszögekbe, s végül a síkot hézagmentesen kitöltő szabályos hatszögekbe mennek át (12. *a*, *b*, *c* ábra).



*12a ábra* *12b ábra* *12c ábra*

Figyelmet érdemelnek e problémák általános feltételei: a tartományoknak még csak az egybevágóságát sem tettük fel. A tartományok kongruenciája, szabályos

[4] A számsűrűség úgy interpretálható, mint a területegységre eső tartományok átlagos száma.

[5] L. FEJES TÓTH: Filling of a domain by isoperimetric discs. *Publicationes Math.* **5** (1957) 119–127.

[6] L. FEJES TÓTH and A. HEPPES: Filling of a domain by equiareal discs. *Publicationes Math.* 7 (1960) 198–203.

alakja és szabályos elrendezése mind csupán egyetlen természetes szélsőérték-követelmény automatikus következménye.

5. A virágok porzószemeinek külső burkán apró nyílások vannak, amelyeken át a hím ivarsejtek a megtermékenyítéskor kiléphetnek. TAMMES[7], holland biológus megfigyelte, hogy a füstike (Fumaria capriolata) gömb alakú pollenszemein a szem nagyságától függően különböző számú nyílás lehet, mégpedig leggyakrabban 4, 6, 8 és 12 nyílás. Viszont 5 nyílású pollenszem sohasem fordul elő. Minden nyílásszámhoz egy-egy sajátos elrendeződés tartozik. Pl. 4, 6 és 12 nyílás esetén a nyílások többnyire egy szabályos tetraéder, oktaéder, illetőleg ikozaéder csúcsaiban fekszenek. A nyílásszám közelítőleg arányos a gömb felületével. A szomszédos nyílások közti távolság azonban a különböző pollenszemeken nagyjában állandó.

TAMMES feltette, hogy két nyílás sohasem képződhet egymástól egy a fajtára jellemző távolságnál kisebb távolságban, és hogy mindig annyi nyílás képződik, amennyi csak a pollenszemen e feltétel mellett elfér. Felmerül tehát a kérdés: hány pont helyezhető el egy adott sugarú gömbön egymástól legalább egységnyi távolságban. További kérdés: melyik az a legkisebb gömb, amelyen ennyi pont elfér és hogyan kell a pontokat elhelyezni?

A kérdést így is fogalmazhatjuk: hogyan kell egy adott gömbön $n$ pontot úgy elhelyezni, hogy a köztük levő minimális távolság a lehető legnagyobb legyen? Rajzoljunk a pontok köré a köztük fellépő legkisebb szférikus távolság felével, mint sugárral köröket. Mivel ezek a körök nem metszhetik egymást, arról van szó, legfeljebb mekkora lehet egy gömbön átfedés nélkül elhelyezhető $n$ egybevágó kör sugara. Más szóval: a gömb felszínének hányadrésze tölthető ki $n$ egybevágó körrel?

Erre a kérdésre vonatkozik a következő tétel[8]: Ha egy gömbön $n \geqq 3$ egymásba nem nyúló egybevágó kör van elhelyezve, akkor azok sűrűsége $\leqq \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{n}{n-2}\frac{\pi}{6}\right)$. Egyenlőség csak $n=3$-, 4-, 6- és 12-re érhető el, mégpedig ha a körök egy főkörbe írt szabályos háromszög, egy szabályos tetraéder, oktaéder, illetőleg ikozaéder csúcsai köré vannak írva.

A fenti korlát minden $n$-re kisebb mint $\pi/\sqrt{12}$, s ezért a gömb sohasem tölthető ki több mint két körrel olyan sűrűn, mint a sík. De ha a körök száma nagy, akkor a $\pi/\sqrt{12}$ sűrűségkorlát tetszés szerinti pontossággal megközelíthető. Ezért ha a pontok közti minimális távolság $2r$, akkor egy nagy $F$ felszínű gömbön elhelyezhető pontok $n$ száma közelítőleg eleget tesz a $\pi r^2 n/F = \pi/\sqrt{12}$ egyenlőségnek. Ez összhangban van TAMMESnek azzal a megállapításával, hogy a nyílásszám közelítőleg arányos a gömb felszínével.

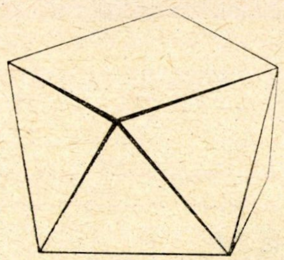
Könnyen megmutatható, hogy ha egy gömbön el lehet helyezni öt egyenlő nagyságú kört, akkor egy hatodik ugyanakkora kör is elfér a gömbön. Öt nyílás tehát TAMMES elmélete szerint nem gazdaságos, s ez érthetővé teszi azt, hogy ez a nyílásszám miért nem fordul elő.

[7] P. M. L. TAMMES: On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollengrains. *Recueil des travaux botaniques néerlandais* 27 (1930) 1–84.

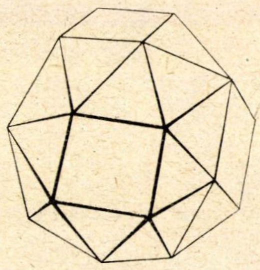
[8] L. FEJES TÓTH: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.* Berlin, 1953.

TAMMES problémáját $n=7$-, 8- és 9-re SCHÜTTE és van der WAERDEN[9], $n=10$- és 11-re L. DANZER[10], $n=24$-re pedig ROBINSON[11] oldotta meg. Kiemeljük az $n=8$ és 24 esetet, amikor az extremális pontrendszer egy-egy három- és négyszögek által határolt ARCHIMÉDESZI test (13. és 14. ábra), valamint az $n=11$ esetet, amelynek megoldását úgy nyerjük, hogy az ikozaéder csúcsai közül egyet elhagyunk. $n=11$-re tehát hasonló a helyzet mint $n=5$-re; s valóban, 11 nyílású pollenszem csak igen ritka „fejlődési rendellenességként" fordul elő.

Tekintsük a gömbnek vagy a síknak egybevágó szabályos sokszögekre való olyan felbontását, amelyben minden csúcsban három sokszög találkozik. A gömbön négy, viszont az euklideszi síkon csak egy ilyen felbontás van, mégpedig két-, három-, négy-, öt-, illetőleg hatszögekre. A felbontásoknak ez a sorozata folytatódik



*13. ábra*



*14. ábra*

a *hiperbolikus síkon*. Itt szerkeszthetők hét-, nyolc-, ... oldalú sokszögekből álló, háromélű csúcsokkal bíró szabályos mozaikok. Láttuk, hogy a gömbön és az euklideszi síkon egy ilyen mozaik lapjaiba írt körök mindig egy-egy legsűrűbb körelhelyezkedést alkotnak. Megmutatható, hogy ugyanez érvényes a hiperbolikus síkon is[12]. A 15. ábra kongruens köröknek egy olyan legsűrűbb elhelyezését mutatja a hiperbolikus sík ún. *Poincaré*-féle körmodelljén, amelyben minden kört hét másik érint.

A hiperbolikus síkon (éppen úgy, mint a gömbön) az elérhető maximális sűrűség függ a körök sugarától. Megadható azonban egy minden körsugárra érvényes, univerzális sűrűségkorlát is,[13] mégpedig $3/\pi=0{,}955\ldots$, amely — bár véges sugarú körökkel nem érhető el — tetszés szerinti pontossággal megközelíthető. Mármost a hiperbolikus síknak egyik nevezetessége, hogy ott egy egyenest egy pontban érintő körök határhelyzete, amidőn a körök sugara minden határon túl nő, nem az egyenes, hanem egy (paraciklusnak nevezett) görbe. Figyelemre méltó, hogy ilyen végtelen sugarú körökkel a hiperbolikus sík már kitölthető $3/\pi$ sűrűséggel. Ezt az abszolút legsűrűbb körelhelyezést szemlélteti a 16. ábra.

[9] K. SCHÜTTE und B. L. van der WAERDEN: Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? *Math. Ann.* **123** (1951) 96—124.

[10] 1958- és 1962-ben Oberwolfachban tartott előadás.

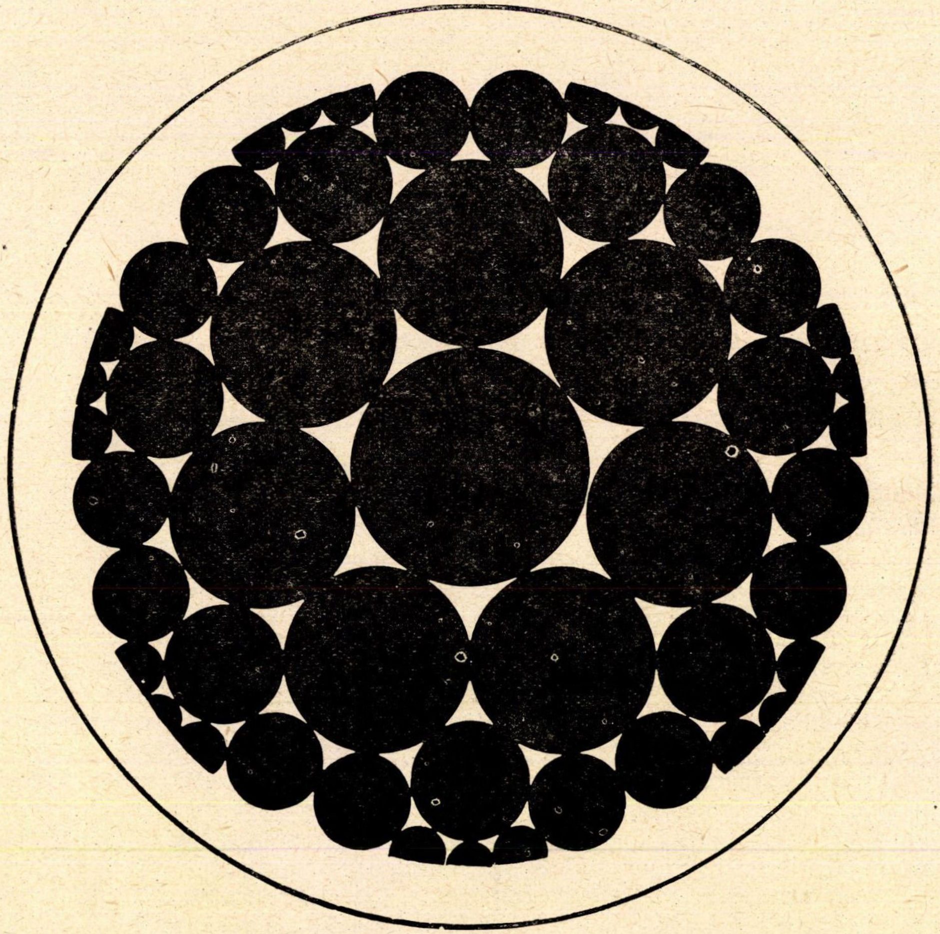
[11] R. M. ROBINSON: Arrangement of 24 points on a sphere. *Math. Ann.* **144** (1961) 17—48.

[12] L. FEJES TÓTH: Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene. *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **4** (1953) 103—110.

[13] L. FEJES TÓTH: Über die dichteste Horozyklenlagerung. *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **5** (1954) 41—44.

**6.** Most meg szeretném mutatni, hogyan függ össze a legsűrűbb körelhelyezés kérdése a matematikának egy nagy gyakorlati jelentőségű újabb ágával, az *információelmélet*tel.[14]

Egy szóbeli közlés alkalmával a beszélő egy rendkívül komplikált nyomáshullámot bocsát ki, amely többé-kevésbé eltorzulva a hallgató füléhez jut. Ha a köz-



*15. ábra*

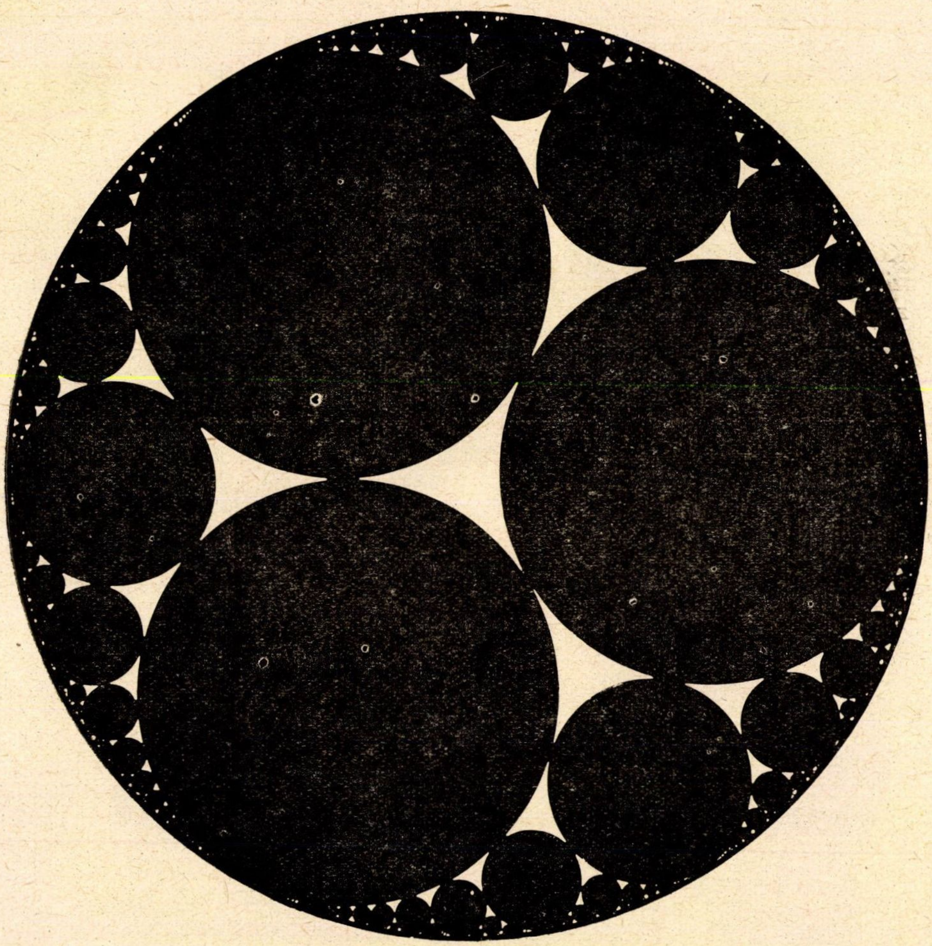
leménynek nemcsak logikai tartalmát, hanem a közlés módjának pontos lefolyását is le akarjuk matematikailag írni, akkor meg kell adnunk a keltett nyomást, $p$-t, mint az időnek, $t$-nek függvényét, vagyis a $p=p(t)$ függvényt. Tekintsük azt az

[14] Az alábbi problémát C. E. SHANNON, az információelmélet megalapítója vetette fel. Vö. B. L. van der WAERDEN: Pollenkörner, Punktverteilungen auf der Kugel und Informationstheorie. *Die Naturwissenschaften* **48** (1961) 189–192.

időintervallumot, amelyben mondjuk a magyar nyelv „a" hangját ejtjük ki. Itt $p(t)$ periodikusan tekinthető, s előállítható a következő végtelen sorral:

$$p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos 2\pi\nu kt+b_k\sin 2\pi\nu kt),$$

ahol $\nu$ az alaphang frekvenciája, $a_k$ és $b_k$ pedig a $p(t)$ függvényből kiszámítható állandók. Ezt a sort a $p(t)$ függvény *Fourier*-sorának, az állandókat pedig $p(t)$ *Fourier*-együtthatóinak nevezzük. Ebből a sorból azonban csak azt a néhány tagot



*16. ábra*

kell megtartanunk, amelyek indexe, $k$, olyan, hogy $k\leqq N$, ahol $N$ az emberi fül számára hallható legmagasabb hang frekvenciája. Ha fülünket olyan nyomás érné, amelyet e néhány tag összege ad meg, ugyanazt a színezetű és erősségű „a" hangot hallanók, mint eredetileg. Fülünk bizonyos magasságon felüli felhangokról már egyszerűen nem vesz tudomást.

Egy ismerősünk „a" hangját tehát egyértelműen jellemezhetjük néhány adattal, mégpedig a nyomásfüggvény pár első *Fourier*-együtthatójával. Ez érthetővé teszi azt, hogy egy mondjuk három másodpercig tartó szóbeli közlés is leírható meghatározott számú adattal. Ezek az adatok, a közlés koordinátái, különféleképpen választhatók. Elég pl. megadnunk a nyomás értékét $1/2N$ távolságban fekvő időpontokban. E pontok száma, $n$, egy $T$ ideig tartó közlés esetén kereken $2NT$. Egyszerű matematikai meggondolásokból következik, hogy közlésünk koordinátáinak a $p_1=p(1/2N)$, $p_2=p((2/2N), \ldots, p_n=p(n/2N)$ nyomásértékeket választva a közlés átlagos hangerőssége a

$$p_1^2+\ldots+p_n^2=R^2$$

értékkel vehető arányosnak, illetőleg — alkalmas egységeket választva — egyenlőnek. Ha tehát különböző szóbeli közléseket tekintünk, amelyek ideje és átlagos intenzitása megegyezik, akkor e közléseket az $n$-dimenziós tér olyan $(p_1, \ldots, p_n)$ pontjai reprezentálják, amelyek mind az origó köré írt $R$ sugarú gömbön fekszenek.

Képzeljük most el, hogy a közlést különböző zajok zavarják, amelyek átlagos intenzitása azonban nem nagyobb egy bizonyos $r$ értéknél. Ekkor, a zaj koordinátáit $z_1, \ldots, z_n$-nel jelölve,

$$z_1^2+\ldots+z_n^2 \leqq r^2.$$

Legyen $P=(p_1, \ldots, p_n)$ egy közlés és $Q=(q_1, \ldots, q_n)$ egy másik, a két közléskor fellépő zaj pedig $X=(x_1, \ldots, x_n)$ és $Y=(y_1, \ldots, y_n)$. Mi a $P$ és $Q$ közlés helyett az eltorzult $P+X=(p_1+x_1, \ldots, p_n+x_n)$ és $Q+Y=(q_1+y_1, \ldots, q_n+y_n)$ közlést fogjuk fel. Mivel $x_1^2+\ldots+x_n^2 \leqq r^2$ és $y_1^2+\ldots+y_n^2 \leqq r^2$, a $P+X$ pont a $P$ körül és a $Q+Y$ pont a $Q$ körül írt $r$ sugarú gömbben fekszik. Ha e két gömbnek van közös pontja, akkor előfordulhat, hogy $P+X=Q+Y$, s így nem tudjuk a $P$ és $Q$ közlést egymástól megkülönböztetni. Felmerül így a kérdés, hány pontot tudunk az $n$-dimenziós tér $R$ sugarú gömbjén úgy elhelyezni, hogy a köréjük írt $r$ sugarú gömbök ne nyúljanak egymásba? Arról van tehát szó, hány különböző információt adhatunk mondjuk 3 másodperc alatt szóban, ha adott hangerővel beszélünk, miközben beszédünket meghatározott intenzitású zaj zavarja.

Ez $n=3$-ra pontosan az a probléma, amellyel fentebb a pollenszemekkel kapcsolatban foglalkoztunk. Bár az általános $n$-dimenziós probléma rendkívül nehéz, ismerünk egy érdekes részeredményt: az $n$-dimenziós gömbön nem lehet $n+2$ pontot kedvezőbben (vagyis egymástól nagyobb minimális távolságban) elhelyezni, mint $2n$ pontot. Ez annak a már említett ténynek az általánosítása, hogy a közönséges gömbön ($n=3$) nem helyezhető el 5 pont kedvezőbben, mint 6.

(Beérkezett: 1963. III. 26.)

# A VELENCEI HEGYSÉG ÓLOMÉRCEINEK IZOTÓPANALITIKAI VIZSGÁLATA

Írta: KOVÁCH ÁDÁM

## Összefoglalás

A Velencei hegység ólomércelőfordulásaiból, valamint a velük genetikailag egy rendszerbe sorolható szabadbattyáni metaszomatikus galenitelőfordulásból származó összesen 32 minta izotópösszetételét tettük vizsgálat tárgyává. A vizsgált ólomércek izotópösszetétele a $Pb^{206}/Pb^{204}=18,0-18,9$; $Pb^{207}/Pb^{204}=15,5-16,5$; $Pb^{208}/Pb^{204}=37,5-39,9$ határok közé esik, a vizsgált ércek átlagos izotópösszetételére $Pb^{206}/Pb^{204}=18,47$; $Pb^{207}/Pb^{204}=15,99$; $Pb^{208}/Pb^{204}=38,98$ adódott eredményül. A mérési eredmények azt a feltevést látszanak alátámasztani, hogy a Velencei hegység ólomércei a variszkuszi orogenezis kapcsán alakultak ki, legalábbis elsődleges értelemben. A nyert adatok alapján megkíséreltünk korbecslést végezni különböző modellek segítségével. Az itt röviden vázolt új, valószínűségszámítási alapokon nyugvó modell alapján az ércesedés kora feltételesen a $330 \pm 60$ millió év határok közé tehető. A mérési eredmények nem zárják ki annak a lehetőségét sem, hogy a Velencei hegység ércei különböző életkorú ércek keveredése útján jöttek létre.

## Bevezetés

Az ólomnak a természetben négy stabil izotópja fordul elő, 204, 206, 207 és 208 tömegszámokkal, melyek közül a 206, 207, és 208 tömegszámú izotópok rendre az $U^{238}$, $U^{235}$, ill. $Th^{232}$ radioaktív elemek bomlási sorainak utolsó, stabil tagjaival azonosíthatók. A $Pb^{204}$ izotóp egyik ismert radioaktív bomlási sorba sem illeszthető be, így jelenléte minden esetben nemradiogén ólom jelenlétére mutat rá.

Azt a tényt, hogy az uránizotópok és a tórium radioaktív bomlása során ólom keletkezik és halmozódik fel az említett elemek érceiben, messzemenően hasznosítja a geokronológia kőzetek és ércek abszolút életkorának megállapítására. Bár az U—Pb, Th—Pb kormeghatározási módszerek már évtizedek óta kiterjedten kerültek alkalmazásra és így a radioaktív elemek érceiben található radiogén ólom izotópösszetételére nézve is számos adat állott rendelkezésre, a közönséges, nemradiogén eredetű ólom izotópösszetételének rendszeres vizsgálata csak NIER és munkatársainak 1939-ben közölt meghatározásaival indult meg [1]. Már az első mérések kimutatták, hogy — ellentétben az addigi feltételezésekkel — a közönséges ólom izotópösszetétele is a minta feltételezett geológiai korával kapcsolatba hozható ingadozásokat mutat, amennyiben az idősebb ólomércek általában nagyobb mennyiségben tartalmazzák a $Pb^{204}$ izotópot, mint az újabb geológiai korokban települt, fiatalabb ércek. Kézenfekvő, hogy e jelenség okát csak az uránizotópok, illetőleg a tórium bomlásából származó radiogén ólom felhalmozódásában, illetőleg nemradiogén eredetű ólomhoz történő hozzáadódásában kell keresnünk.

## Ólomizotóparányok értelmezésének kérdései

Radioaktív érceken végzett kormeghatározások esetében az ásvány kialakulásának időpontjára a képződmény létrejöttétől a jelenkorig felhalmozódott radioaktív bomlástermék mennyiségéből, ill. izotópösszetételéből következtethetünk. Nemradiogén eredetű, közönséges ólomércek esetében az izotópösszetétel életkortól függő kialakulását eredményező folyamatok viszont az érc kialakulását megelőző geológiai időszakokban játszódtak le. Ellentétben tehát a radioaktív érceken, valamint kőzeteken végzett kormeghatározással, amikor a vizsgált kristály, vagy kőzet ismert geokémiai rendszerében történő elemfelhalmozódás tényét használjuk ki, galenitek, és általában nemradiogén eredetű ólomércek esetében egy hipotetikus, az érc kialakulása előtt létezett geokémiai rendszer összetételére, fejlődésére nézve kell feltevésekkel élnünk, hogy a mért izotóparányok kvantitative értelmezhetők legyenek. Míg radioaktív ércek esetében a radioaktív bomlás alaptörvénye közvetlen lehetőséget nyújt kormeghatározáshoz, galenitek esetében ehhez modellszerű elképzelések kialakítására vagyunk utalva.

A közönséges ólom izotóparányainak értelmezésére számos modell került kialakításra, ezek közül a gyakorlatban leginkább alkalmazott, HOLMEStól [2] és HOUTERMANStól [3] származó modellt a következőkben röviden ismertetjük.

## Ólomizotóparányok értelmezésének Houtermans-féle modellje

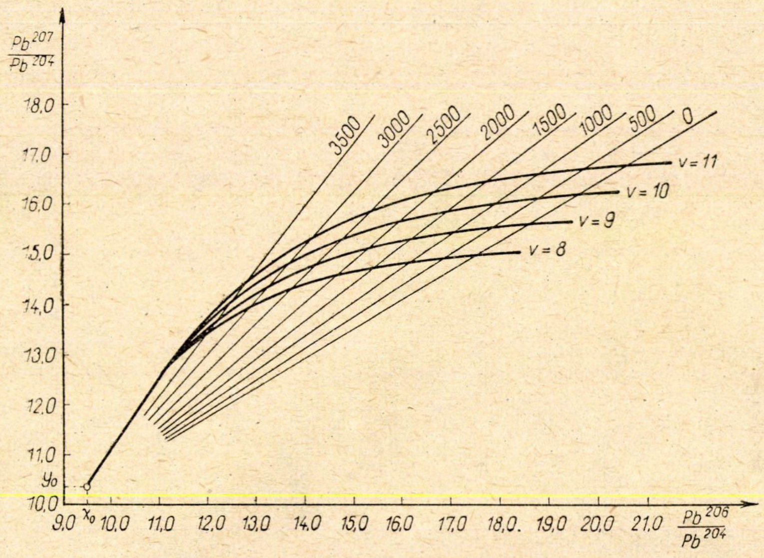
E modell [2], [3] feltételezi, hogy kezdetben a Föld folyékony volt, homogén szerkezeti felépítéssel. Ebben az időben az urán, tórium és ólom egyenletesen oszlott el a Föld anyagában, továbbá az ólom a Föld bármely pontján egységes izotópösszetétellel rendelkezett. A Föld lehűlését és a földkéreg kialakulását követően helyi eltérések alakultak ki az urán/ólom arányban, a továbbiakban azonban a helyileg kialakult koncentrációarányok egy adott ólomérchez rendelhető „anyamagmában" csak a radioaktív bomlás következtében változtak meg. Így tehát az eredetileg egységes izotópösszetételű „ősólom" helyileg meghatározott feltételek mellett radiogén ólommal „higult fel", és a radiogén ólom hozzáadódása csak az érc kiválása pillanatában szűnt meg. Ekkor az ólom szeparálódott az őt korábban befogadó rendszer urán- és tóriumtartalmától, és így izotópösszetétele a továbbiakban változatlan maradt.

E modell egy $T$ életkorral rendelkező ólom izotóparányai között a következő összefüggést adja meg:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{1}{137{,}8}\cdot\frac{e^{\lambda' T_0}-e^{\lambda' T}}{e^{\lambda T_0}-e^{\lambda T}}, \qquad (1)$$

ahol $x, y$ a mért $Pb^{206}/Pb^{204}$, ill. $Pb^{207}/Pb^{204}$ izotóparányok; $x_0$, $y_0$ az „ősólom" megfelelő izotóparányai; $T_0$ az $x_0 y_0$ izotópösszetételhez rendelhető időpont, tehát a kezdeti differenciálódás időpontja; $\lambda$ és $\lambda'$ az $U^{238}$ ill. $U^{235}$ bomlási állandói, $T$ az ólomérc „modell-kora". Az (1) kifejezésben szereplő állandó (1/137,8) a két uránizotóp jelenlegi előfordulásai aránya. Itt is, mint a továbbiakban is, a geokronológiában általánosan használt időszámítást alkalmazzuk, amennyiben a jelenkort tekintjük a 0 értékkel jellemzett időpontnak, és az életkort a múlt felé haladva pozitív növekvő értékekkel számítjuk.

Az (1) összefüggés segítségével egy adott izotópösszetételhez rendelhető „modell-kor" legcélszerűbben grafikus úton határozható meg. Az 1. ábrán látható grafikonban az ordinátán a $Pb^{206}/Pb^{204}$; az abszcisszán a $Pb^{207}/Pb^{204}$ izotóparányokat tüntettük fel. Az $x_0$, $y_0$ pontból kiinduló sugárszerű egyenesek az azonos életkorú ólomércek izotópösszetételének megfelelő pontokat kötik össze (izokronok),




*1. ábra.* Ólomizotóparányok *Houtermans*-féle diagramja

míg a görbe vonalak egy-egy rögzített urán/ólom aránnyal jellemezhető „anyamagma" ólomizotópösszetételének időbeli változását írják le. A $T_0$ időpont értékét a meteoritok ólomtartalmán végzett meghatározások [4] alapján 4,5 milliárd év értékkel rögzíthetjük.

A *Houtermans*-féle modell csak első közelítésben alkalmas galenitek életkorának meghatározására. Számos esetben az ólom a modell alapfeltételeit ki nem elégítő körülmények között kialakult, anomális izotópösszetétellel rendelkezik. Az ilyen, anomális izotópösszetétel értelmezése történhet GEISS [5] elgondolása alapján.

Az irodalomban számos, a *Houtermans*-modelltől eltérő alapfeltevéseken nyugvó modell ismertetése található [6], ezek tárgyalására azonban itt nem térünk ki.

## Ólomizotóparányok kialakulásának valószínűségi elmélete

A *Holmes—Houtermans* modell alapvető hiányosságát képezi az, hogy az ólomércek forrásában a radioaktív bomlás hatásától eltekintve helyileg és időben állandó urán/ólom koncentrációarány létezését tételezi fel. Az e hiányosság kiküszöbölésére kialakított modellek azonban valamennyien a relatív uránkoncentráció változásának valamilyen meghatározott tendenciáját tételezik fel. Egyetlen kivételt képez a VINOGRADOV és munkatársai által kialakított modell [7], mely felhasználva az irodalomból rendelkezésre álló ólomizotópanalízisek adatait, ezeket egy „átlagos" fejlődési modellben foglalja össze.

Kétségtelen azonban, hogy az ólom izotóparányainak kialakításában a relatív uránkoncentráció helyi ingadozásai is szerepet játszanak, így egy ilyen „átlagos" hatásokat feltételező modell csak első tájékozódásra szolgálhat.

Az ólom izotóparányainak kialakulását leíró legáltalánosabb törvényszerűségek a következő kifejezésekben foglalhatók össze:

$$Pb^{206}/Pb^{204} = x = x_0 + \int_T^{T_0} V(t)\lambda e^{\lambda t} dt \qquad (2)$$

$$Pb^{207}/Pb^{204} = y = y_0 + \alpha \int_T^{T_0} V(t)\lambda' e^{\lambda' t} dt \qquad (3)$$

$$Pb^{208}/Pb^{204} = z = z_0 + \int_T^{T_0} W(t)\lambda'' e^{\lambda'' t} dt, \qquad (4)$$

ahol a $V$ a jelenkorra extrapolált, a $Pb^{204}$ izotóp gyakoriságára vonatkoztatott $U^{238}$ koncentrációt jelöli; $\alpha$ az uránizotópok jelenlegi előfordulási aránya; $W$ a $Pb^{204}$ izotóp gyakoriságára vonatkoztatott tóriumkoncentrációt, $\lambda''$ a $Th^{232}$ bomlási állandóját jelöli. A további jelölések azonosak az (1) kifejezésben használt és ott részletesen megadott jelölésekkel. Ha a $V$ függvényt időtől függetlennek tekintjük, a (2) és (3) összefüggésből a *Houtermans*-modell alapegyenleteit nyerjük.

A valóságban azonban a $V$ mennyiségre nézve még valamilyen meghatározott tendenciát, tehát egy explicit $V(t)$ függvény létezését is csak nehezen tételezhetünk fel, nemhogy annak állandóságáról beszélhessünk. Jogosultabb viszont az a feltételezés, hogy egy nagyobb geológiai egység átlagos relatív uránkoncentrációját tekinthetjük állandónak. E nagyobb geológiai rendszer részrendszereinek, az egyes ólomércekhez rendelhető „anyamagmák" rendszereinek relatív uránkoncentrációja viszont már valószínűségi összefüggésekkel jellemezhető ingadozást mutathat a közös rendszer átlagos relatív uránkoncentrációja, mint középérték körül.

Az előzőekből már következik, hogy az adott geológiai egységen belül a ólom izotóparányai is középértékek körül fognak ingadozni, tehát mind a relatív uránkoncentráció ($V$), mind pedig a belőle származtatott $x$ és $y$ izotóparány értékek ingadozásai helytől és időtől függő stochasztikus folyamatként foghatók fel. („Hely" alatt itt nem geometriailag meghatározott helyet, hanem a geokémiai jellemzők által meghatározott rendszert, illetve részrendszert értünk.) A mérési pontok eloszlása a *Houtermans*-féle diagramban a következő feltételes eloszlásfüggvénnyel jellemezhető:

$$P(x, y) = P\left(x_0 + \int_T^{T_0} V(t, w)\lambda e^{\lambda t} dt < x;\ y_0 + \alpha \int_T^{T_0} V(t, w)\lambda' e^{\lambda' t} dt < y\right), \qquad (5)$$

ahol az egyes mennyiségek jelölései azonosak az előzőekben használt jelölésekkel, eltekintve attól, hogy az (5) kifejezésben a $V$ extrapolált relatív uránkoncentrációit itt az időtől és helytől valószínűségi értelemben függő változónak tekintjük.

A relatív uránkoncentráció értéke tetszőlegesen kicsiny időintervallumon belül helyileg rögzítettnek és időben állandónak tekinthető, így az (5) kifejezésben szereplő integrálok integrálközelítő összegeikkel értelmezhetők. Az (5) kifejezés értelemszerűen tekintetbe veszi a relatív uránkoncentráció időbeli ingadozásait, így végeredményben azonos korú, de a vizsgált nagyobb geológiai egység (provincia) különböző részrendszereiből származó ólomminták izotópösszetételének „helytől függő" eloszlását adja meg.

Az (5) eloszlásfüggvény szigorú diszkussziója igen nagy nehézséget támaszt; néhány alapvető tényt azonban enélkül is megállapíthatunk.

*a)* Az (5) eloszlás megengedi bármely $x > x_0$, $y > y_0$ izotópösszetétel kialakulását tetszőleges korú ólomérc esetén — természetesen eltérő valószínűségekkel. Ennek megfelelően egy adott izotópösszetételhez rendelhető modell-korról csak valószínűségi értelemben beszélhetünk. Ugyancsak következik ebből, hogy egyedi mérések kormeghatározás alapjául nem szolgálhatnak.

*b)* Adott korú ólomércek rendszere esetén az (5) eloszlás centrálszimmetrikus eloszlást jelent, feltéve, hogy az anyamagma valószínűségi változóként értelmezett relatív uránkoncentrációja ($V$) szimmetrikus és az időtől független paraméterekkel rendelkező eloszlásfüggvénnyel jellemezhető, tehát a relatív uránkoncentráció ingadozásai stacionér folyamatként foghatók fel.

*c)* Legnagyobb valószínűséggel valósul meg az az eset, amikor a relatív uránkoncentráció értéke mindvégig saját eloszlásának legvalószínűbb értékével azonos. Egy adott részrendszerben ugyanis (tehát a relatív uránkoncentrációnak csak az időbeli ingadozását tekintve) az egyes időintervallumokban felvehető értékek egymástól függetlenek, tehát egy $V_i(t_i)$ koncentrációarány-sorozat kialakulásának valószínűsége a részvalószínűségek szorzataként állítható elő. Tekintettel arra, hogy ezt az értéket időtől függetlennek tekintettük, az ennek megfelelően kialakult izotópösszetételt jellemző mérési pontnak a valódi kor *Houtermans*-izokronján kell feküdnie. Az itt vázolt modell alapján tehát úgy határozhatunk meg életkort, hogy a rendszer izotópösszetétele „átlagos fejlődési görbéjének" és a mérési pontokat interpoláló görbének metszéspontjához rendelhető *Houtermans*-féle modell-kort tekintjük a teljes rendszer közös modell-korának.

A gyakorlatban természetesen nehéz megalkotni egy hipotetikus rendszer izotóparányainak átlagos fejlődési görbéjét. Tájékozódásul szolgálhat azonban az az egységes fejlődési görbe, melyet RUSSEL, STANTON és FARQUHAR [8] bizonyos egyszerű fejlődéstörténettel jellemezhető ólomércekre állapított meg, és ami feltehetően a Föld köpenyében található ólom izotópösszetételének egységes fejlődési görbéjét adja meg. Ez a görbe egyúttal — legalábbis első közelítésben — egy a Föld köpenyéből differenciálódott, és a továbbiakban zártnak tekintett rendszer átlagos fejlődési görbéjeként is felfogható.

E fejlődési görbe paraméteres egyenletei a következők:

$$x = 18{,}72 - 137{,}8 \cdot 0{,}0659(e^{\lambda t} - 1) \tag{6a}$$

$$y = 15{,}82 - 0{,}0659(e^{\lambda' t} - 1). \tag{6b}$$

E tekintetben tehát az itt vázolt kormeghatározási módszer a *Russel—Stanton—Farquhar*-módszer általánosításának is tekinthető [9].

Amennyiben az itt vázolt modellt kormeghatározásra kívánjuk alkalmazni, felvetődik természetesen a kérdés, hogyan dönthető el az, hogy mennyire jogos a mért pontok interpolációja, mennyiben tekinthető a mért pontok interpoláló egyenese a teljes ércrendszer által — elvileg — szolgáltatott szóráskép tengelyének.

Biztos kritériumot ennek eldöntésére nem adhatunk meg, de tájékozódásul szolgálhat például a különböző ércelőfordulásokból származó, de azonos ércrendszerhez tartozó minták mérési pontjai eloszlásainak összehasonlítása. Amennyiben a különböző előfordulásokhoz tartozó szórásképek jól fedik egymást, és a szórás mértéke a mérési hibát minden esetben meghaladja, úgy jogosan tekinthetjük a közös szóráskép tengelyét a teljes rendszer hipotetikus és általunk egészében nem is ismert eloszlása tengelyének is.

Másik kérdésként vetődik fel a módszer segítségével nyerhető korértékek megbízhatósága, az életkorhoz rendelhető hibahatár kérdése. E kérdés tárgyalása meghaladná a jelen közlemény kereteit, így e helyütt arra részletesen nem térünk ki. Végeredményben a nyert életkor hibájának nagyságát a relatív uránkoncentráció helytől és időtől függő eloszlásának szórása szabja meg, erre azonban többnyire csak közvetett úton következtethetünk. Éppen ezért a jelen közleményben is az életkor hibájára csak a mérési pontok eloszlásképe alapján becsült hibakorlátokat adunk meg.

## Mérési módszerek ismertetése

A jelen közlemény alapjául szolgáló méréseket szovjet gyártmányú, MI 1305 típusú tömegspektrométerrel végeztük. A mérések során a tömegspektrométer „kemencés" ionforrását használtuk, melyben a $Pb^+$ ionokat ólomjodid elpárologtatása, majd elektronbombázással történő ionizálás útján állítottuk elő.

Az ólomjodid minták előállítása során az ércet perklórsav és sósav elegyében tártuk fel, majd a perklórsav gőzeinek kezdődő eltávozásáig bepároltuk. A bepárlási maradékot meleg vízzel felvettük, az oldatlanul maradt kovasavtól leszűrtük, majd a szűrletből az ólmot káliumjodid hozzáadásával választottuk le. A keletkezett ólomjodid csapadékot szűrtük, mostuk, majd szárítottuk.

A mérések során a tömegspektrométer felbontóképességét úgy állítottuk be, hogy a 207 és 208 tömegszámoknál jelentkező csúcsok közötti völgy magassága nem haladta meg a 208 tömegszámhoz tartozó csúcs értékének 0,5%-át. A 204 tömegszámnál zavaró háttérként jelentkező $Hg^{204+}$ csúcs jelenlétét a $Hg^{202+}$ csúcs intenzitásának mérése útján, a higany ismert izotópösszetétele [10] alapján vettük tekintetbe.

Főként a higanyháttér alakulásában jelentkező szisztematikus tendenciák miatt a mérések hibájaként nem az egyes mérési sorozatokon belül, vagy az egymástól függetlenül végzett meghatározások között jelentkező szórást adtuk meg, hanem ezek figyelembevételével a mérési eljárás hibakorlátait becslés útján állapítottuk meg. A hibabecslés alapján a $Pb^{206}/Pb^{204}$ és $Pb^{207}/Pb^{204}$ izotóparányok hibája $\pm 0,15$ egységben, a $Pb^{208}/Pb^{204}$ arány hibája $\pm 0,3$ egységben adható meg.

## Mérési eredmények

A mérések céljaira szolgáló minták legnagyobbrészt a Pátka-kőrakáshegyi, valamint a szűzvári feltárásokból származnak. Néhány gyűjteményből származó minta esetében a pontos lelőhelyet megállapítani nem állott módunkban. A minták többsége a helyszínről került begyűjtésre. A 3., 26., 32., 33. sz. minták az Eötvös Lo-

**I. táblázat**

A Velencei hegység ólomérceinek izotópösszetétele

| Minta száma | Minta megnevezése | $Pb^{204}$ (%) | $Pb^{206}$ (%) | $Pb^{207}$ (%) | $Pb^{208}$ (%) | $Pb^{206}/Pb^{204}$ | $Pb^{207}/Pb^{204}$ | $Pb^{208}/Pb^{204}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Pátka—Kőrakáshegy | | | | | | |
| 1. | Hányóról származó minta. Tömör galenit | $1,33_2$ | $24,7_9$ | $21,4_0$ | $52,4_5$ | $18,6_1$ | $16,0_7$ | $39,4_0$ |
| 4. | 35 m. Szfalerites galenit. | $1,34_8$ | $24,6_3$ | $21,5_2$ | $52,5_0$ | $18,2_7$ | $15,9_6$ | $38,9_4$ |
| 5. | Hányóról származó minta. Tömör galenit | $1,33_2$ | $24,6_7$ | $21,4_5$ | $52,5_4$ | $18,5_2$ | $16,1_0$ | $39,4_4$ |
| 6. | Hányóról származó minta. Tömör galenit | $1,31_6$ | $24,8_3$ | $21,4_1$ | $52,4_5$ | $18,8_7$ | $16,2_7$ | $39,8_6$ |
| 69. | 35 m szint feletti siklószakaszból. Telér alapanyagtól mentes, tiszta galenit | $1,34_4$ | $24,6_4$ | $21,2_7$ | $52,7_4$ | $18,3_4$ | $15,8_3$ | $39,2_5$ |
| 70. | 35 m szint. Galenit telérkitöltésből | $1,35_5$ | $24,8_4$ | $21,5_1$ | $52,3_0$ | $18,3_3$ | $15,8_7$ | $38,5_9$ |
| 71. | 0 szint, kísérleti fejtés. Szfalerit igen csekély galenittartalommal | $1,35_1$ | $24,6_3$ | $21,2_5$ | $52,7_6$ | $18,2_3$ | $15,7_3$ | $39,0_5$ |
| 72. | Legfelső szint. Igen tiszta galenit | $1,33_9$ | $24,8_8$ | $21,4_3$ | $52,3_5$ | $18,5_8$ | $16,0_1$ | $39,1_0$ |
| 76. | 70 m szint, 125. pont. Galenit kevés szfalerittel | $1,34_7$ | $24,7_7$ | $21,4_9$ | $52,3_9$ | $18,3_9$ | $15,9_6$ | $38,9_0$ |
| 77. | 35 m szint, 12. feltörés mellett. Szfalerites galenit | $1,33_1$ | $24,8_1$ | $21,5_5$ | $52,1_3$ | $18,6_4$ | $16,1_9$ | $39,2_1$ |
| 78. | 2. feltörés alatti fejtés. Csekély érctartalmú teléranyag, szfalerittel és kevés galenittel | $1,33_9$ | $24,6_9$ | $21,2_9$ | $52,6_8$ | $18,4_4$ | $15,9_0$ | $39,3_5$ |
| 80. | 35 m szint, 2. feltörés mellett. Szfalerites galenit | $1,35_1$ | $24,7_0$ | $21,1_9$ | $52,7_6$ | $18,2_9$ | $15,6_9$ | $39,0_6$ |
| 81. | 70 m szint, 151/*a* pont mellett. Szfalerites galenit | $1,34_0$ | $24,8_5$ | $21,6_7$ | $52,1_4$ | $18,5_4$ | $16,1_7$ | $38,9_1$ |

**I. táblázat folytatása**

| Minta száma | Minta megnevezése | $Pb^{204}$ (%) | $Pb^{206}$ (%) | $Pb^{207}$ (%) | $Pb^{208}$ (%) | $Pb^{206}/Pb^{204}$ | $Pb^{207}/Pb^{204}$ | $Pb^{208}/Pb^{204}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Szűzvár | | | | | |
| 2. | Hányóról származó minta. Tömör galenit | 1,33$_9$ | 24,6$_9$ | 21,5$_2$ | 52,4$_6$ | 18,4$_4$ | 16,0$_7$ | 39,1$_8$ |
| 7. | Hányóról származó minta. Tömör galenit | 1,36$_9$ | 25,1$_4$ | 21,6$_1$ | 51,8$_8$ | 18,3$_7$ | 15,7$_9$ | 37,9$_1$ |
| 26. | Tömör galenit, szafelrites behintéssel. (Eötvös L. Tud. Egy.-től kapott minta) | 1,33$_3$ | 24,7$_7$ | 21,5$_9$ | 52,3$_1$ | 18,5$_9$ | 16,2$_0$ | 39,2$_5$ |
| 39. | Teléralapanyagba hintett galenit (Magy. Áll. Földtani Int.-től kapott minta) | 1,34$_1$ | 24,7$_7$ | 21,4$_1$ | 52,4$_8$ | 18,4$_7$ | 15,9$_6$ | 39,1$_2$ |
| 66. | 35 m szint, 102. pont. Teléralapanyagba hintett galenitszemcsék | 1,35$_5$ | 24,8$_8$ | 21,4$_9$ | 52,2$_7$ | 18,3$_6$ | 15,8$_6$ | 38,5$_7$ |
| 68. | Tárószint, 2. pont. Galenit. | 1,34$_2$ | 24,5$_5$ | 21,2$_5$ | 52,8$_6$ | 18,3$_0$ | 15,8$_4$ | 39,4$_0$ |
| 73. | 35 m. szint, északi vágat 68. pont. Galenit | 1,34$_7$ | 24,9$_4$ | 21,4$_5$ | 52,2$_6$ | 18,5$_2$ | 15,9$_3$ | 38,8$_1$ |
| 74 | 70 m. szint, északi vágat 152. pont. Erősen szfalerites galenit | 1,33$_1$ | 24,8$_3$ | 21,6$_8$ | 52,1$_6$ | 18,6$_6$ | 16,2$_9$ | 39,1$_9$ |
| 75. | 70 m. szint, északi vágat 144. pont. Csekély érctartalmú teléranyag, szfalerittel és galenittel | 1,38$_6$ | 25,0$_5$ | 21,5$_9$ | 51,9$_8$ | 18,0$_7$ | 15,5$_7$ | 37,4$_9$ |
| 79. | 70 m szint, északi vágat 150. pont. Igen tiszta galenit | 1,33$_3$ | 24,7$_8$ | 21,4$_9$ | 52,4$_0$ | 18,5$_9$ | 16,1$_2$ | 39,3$_1$ |
| 82. | Tárószint, 4/*a*. pont. Dús galenit teléralapanyagban | 1,35$_0$ | 24,6$_7$ | 21,4$_0$ | 52,5$_8$ | 18,2$_8$ | 15,8$_6$ | 38,6$_9$ |
| 83. | 35 m. szint, 105. pont. Galenit | 1,37$_3$ | 25,0$_8$ | 21,6$_8$ | 51,8$_7$ | 18,2$_7$ | 15,7$_9$ | 37,7$_8$ |
| 84. | 70 m. szint, északi vágat 143. pont. Galenites szfalerit | 1,33$_4$ | 24,6$_7$ | 21,4$_3$ | 52,5$_6$ | 18,5$_0$ | 16,0$_7$ | 39,4$_1$ |

**I. táblázat folytatása**

| Minta száma | Minta megnevezése | $Pb^{204}$ (%) | $Pb^{206}$ (%) | $Pb^{207}$ (%) | $Pb^{208}$ (%) | $Pb^{206}/Pb^{204}$ | $Pb^{207}/Pb^{204}$ | $Pb^{208}/Pb^{204}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Pátka | | | | |
| 33. | Eötvös L. Tud. Egy. Ásványtárából származó minta. Közelebbi megjelölés nélkül | $1,34_1$ | $24,8_4$ | $21,4_6$ | $52,3_7$ | $18,5_2$ | $16,0_0$ | $39,0_5$ |
| 38. | Magy. Áll. Földtani Int. Ásványtárából származó minta. Közelebbi megjelölés nélkül | $1,34_8$ | $24,9_4$ | $21,4_1$ | $52,3_1$ | $18,5_0$ | $15,8_8$ | $38,8_0$ |
| | | | | Pákozd — Sashegy | | | | |
| 67. | Pákozdtól ÉNy-ra 800 m, sashegyi érckutatás hányójáról származó minta | $1,31_9$ | $24,9_1$ | $21,5_5$ | $52,2_2$ | $18,8_9$ | $16,3_4$ | $39,6_0$ |
| | | | | Szabadbattyán | | | | |
| 3. | Tömör galenit. Kossuth L. Tud. Egy. Ásványtárából származó minta | $1,32_3$ | $24,9_6$ | $21,7_7$ | $51,9_4$ | $18,8_7$ | $16,4_6$ | $39,2_7$ |
| 32. | Tömör galenit. Eötvös L. Tud. Egy. Ásványtárából származó minta | $1,34_3$ | $24,7_7$ | $21,4_9$ | $52,4_0$ | $18,4_5$ | $16,0_0$ | $39,0_2$ |
| 45. | Tömör galenit. Magy. Áll. Földtani Intézet Ásványtárából származó minta | $1,36_5$ | $25,0_4$ | $21,5_7$ | $52,0_2$ | $18,3_4$ | $15,8_0$ | $38,1_0$ |

ránd Tudományegyetem Ásvány-Kőzettani Intézetének ásványtárából származnak, a 38., 39., 45. sz. mintákat a Magyar Állami Földtani Intézet bocsátotta rendelkezésünkre. A minták rendelkezésünkre bocsátásáért e helyen mondunk köszönetet. A minták megjelölésére használt szám az illető ércmintának az ATOMKI nyilvántartásában szereplő sorszámát jelentik.

Az I. táblázatban feltüntetjük a mért minták számát, közelebbi adatait, az ólom százalékos izotópösszetételét, továbbá az egyes ólomizotópoknak a $Pb^{204}$ izotóp előfordulására vonatkoztatott gyakoriságát. A százalékos összetétel adatait atomszázalékokban adtuk meg.

## Mérési eredmények kiértékelése

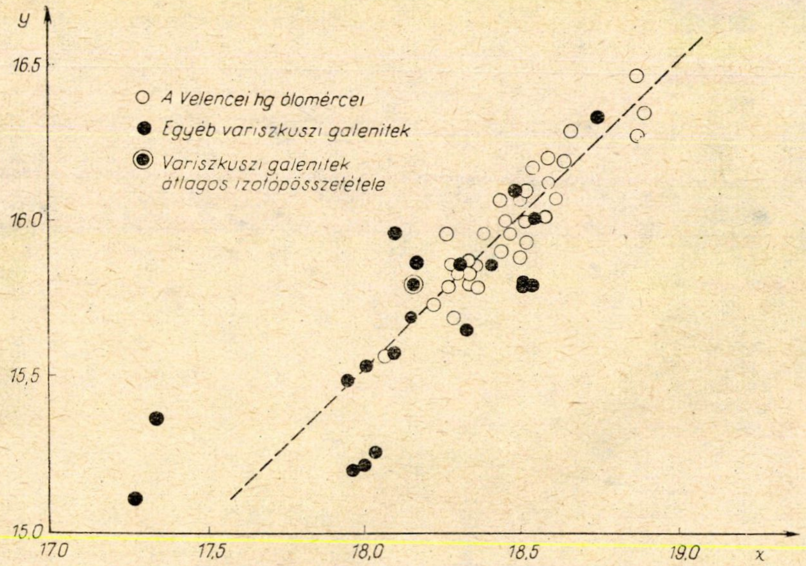
A Velencei hegység ólomérceinek várható abszolút életkorára nézve jelenleg is eltérőek a vélemények. Jantsky [11] szerint az ércesedés a hegység főtömegét létrehozó, a variszkuszi orogenizis kapcsán lezajlott gránitmagmatizmushoz kötötten jelentkezik, míg Kiss J. [12] szerint a gránitban található galenittelérek az újabbkori andezitvulkánosság hatására alakultak ki, bár nem tartja kizártnak, hogy azok anyaga esetleg már korábban kivált, s az újabbkori vulkáni működés eredményeképpen újra mobilizálódva került jelenlegi telephelyére.

A Velencei hegység kőzeteinek abszolút életkorára vonatkozóan csupán néhány adat áll rendelkezésre. Földváriné Vogl M. és Kliburszky [13] egy gránitminta korát 220 millió évesnek találta, míg Ovcsinyikov és munkatársai [14] különböző gránitminták korát 150—320 millió év közötti értékűnek határozták meg. Mindezen értékekből egyértelmű következtetéseket nem vonhatunk le, ezért az ólomércesedés várható korát tekintve inkább az abszolút geokronológiai időskálák adataira szorítkozhatunk, mint a hegység kőzetein az előzőekben végzett kormeghatározások adataira. Amennyiben az ólomércesedés a variszkuszi orogenetikus működéshez kapcsolódik, úgy a jelenleg használatos időskálák alapján mintegy 300 millió éves életkor, míg az eocénkori andezitvulkánossághoz való csatlakozás esetében mintegy 50 millió éves kor várható.

A nyert izotópösszetétel-adatok kiértékelésének egyik módja lehet a más, ismert geológiai korú ólomércek izotópösszetételével történő, kvalitatív jellegű összehasonlítás. Célszerűnek mutatkozik összehasonlítani a Velencei hegység ólomérceinek izotópösszetételét például a variszkuszi orogenezis kapcsán keletkezett ólomércek izotópösszetételével.

Anélkül, hogy mélyebb kapcsolatok kimutatására törekednénk, vagy az egyes e célra felhasznált ólomércek izotópösszetételének részletes értékelésére kitérnénk, a 2. ábrán feltüntettük néhány kétségtelenül variszkuszi eredetű galenit izotópösszetételének adatait, közös diagramban ábrázolva azokat a Velencei hegység ólomérceinek izotópösszetételével. Ugyancsak feltüntettük a Vinogradov és munkatársai által [15] 85 minta elemzési adataiból a variszkuszi ólomércek átlagos izotópösszetételére nyert adatot is. Meg kívánjuk jegyezni, hogy a 2. ábrán feltüntetett galenitizotópösszetételek kiválasztása az irodalomból tetszőleges szempontok figyelembevétele nélkül történt.

A 2. ábrából megállapítható, hogy a Velencei hegység ólomérceinek izotópösszetételét reprezentáló pontok az $x-y$ diagramban meglehetősen nagy szórást mutatnak. E szórás részben — de kimutathatóan csak részben — mérési hibától származik. A mérési hibát az észlelt szórás mindenképpen meghaladja. A mérési pontok egyenessel jól interpolálhatók, továbbá a VINOGRADOV által [15] megadott átlagos izotópösszetételnek megfelelő pont közelítőleg rajta fekszik a Velencei




*2. ábra.* A Velencei hegység ólomércei izotópösszetételének összehasonlítása más, variszkuszi eredetű ólomércek izotópösszetételével

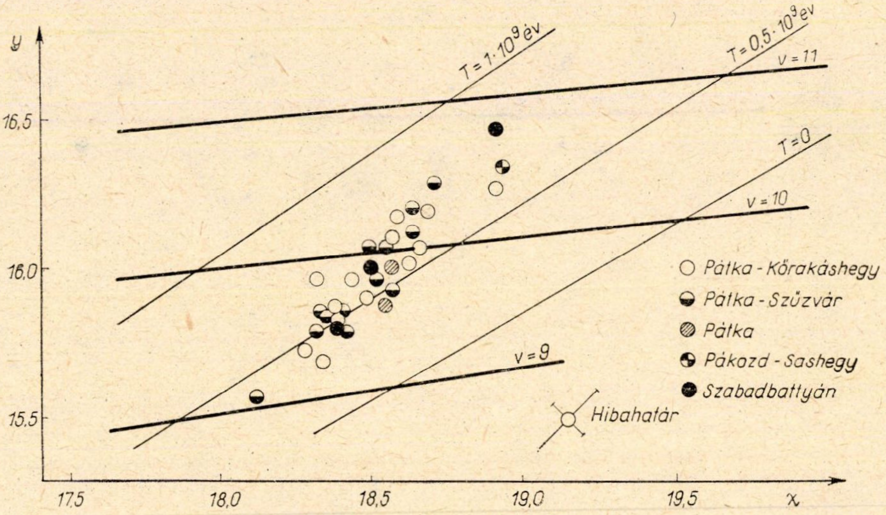
hegység ólomérceit reprezentáló pontok interpoláló egyenesén. Ez az interpoláló egyenes közelítőleg azonos az egyéb variszkuszi galenitek izotópösszetételeinek interpoláló egyenesével.

Az előzőek alapján tehát arra lehet következtetni, hogy a Velencei hegység ólomércei a variszkuszi orogenezis kapcsán jöhettek létre, legalábbis elsődleges értelemben.

## Abszolút kormeghatározási módszerek alkalmazása a Velencei hegység ólomérceire

Ha a nyert izotópösszetételeket a *Holmes—Houtermans*-modell alapján értelmezzük, a minták életkorára nyert eredmények igen nagy szórást mutatnak. A 3. ábrából láthatóan a nyert életkorok értékei 360 millió évtől 800 millió évig terjednek. Elvileg elképzelhető, hogy ez a szórás az itt megadott hibahatárokat jóval meghaladó mérési hiba eredménye. Ebben az esetben legvalószínűbb korértéknek a mért izotópösszetételek átlagához tartozó modell-kor értékét kellene tekintenünk, ami a *Houtermans*-modell alapján számítva 575 millió év. Ez az érték lényegesen nagyobb, mint amekkora életkor geológiai alapokon feltételezhető. Amennyiben tehát az észlelt szórás pusztán mérési hiba eredménye lenne — ami egyéb indokok alapján is kevéssé valószínűsíthető [9] —, úgy esetünkben anomális izotópösszetétellel állunk szemben, ami GEISS [5] nyomán lenne értelmezhető.

A feltételezetthez hasonló anomális izotópösszetétel kialakulásának egyik oka az érc másodlagos települése lehet. Ez esetben feltételezhető ugyanis, hogy az érc elsődlegesen egy korábbi ércesedési folyamat során vált ki, ami a radiogén ólom felhalmozódásának megszűnésével járt. Későbbi geológiai folyamatok ezt az elsődleges ércet újra mobilizálták, s ezután került a fiatalabb életkort indikáló, az ércnél tulajdonképpen fiatalabb anyakőzet teléreibe.




3. *ábra*. A Velencei hegység ólomérceinek izotópösszetétele a *Houtermans*-diagramban ábrázolva

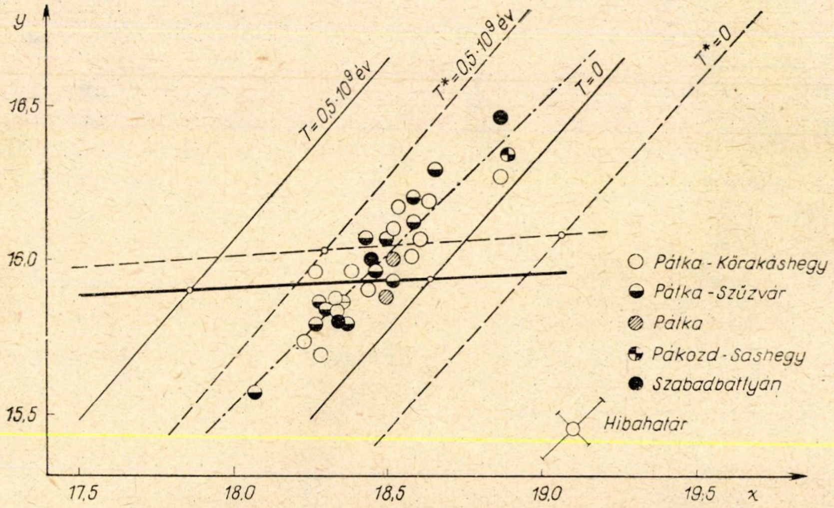
Másodlagos letelepülés esetében azonban várható, hogy az érc szennyező nyomelemtartalma az áttelepülés következtében erősen lecsökken [16]. A vizsgált ólomércek azonban nem mutatnak csökkent nyomelemtartalmat, sőt egyes minták kiugró nyomelemtartalommal rendelkeznek [17], ennek megfelelően a másodlagos település ténye kevéssé valószínűsíthető.

A Vinogradov által [7] paleozoós eredetű ólomércekre kialakított „átlagmodell" alapján számítható modell-korok már lényegesen kisebb szórást mutatnak, és a mérési pontokat interpoláló egyenes meredeksége is megközelíti a *Vinogradov*-modell izokronjainak meredekségét. Az egyes mintákhoz rendelhető modell-korok értékei a 40—260 millió év határok közé esik, az átlagos izotópösszetételhez rendelhető modell-kor értéke 150 millió év (lásd a 4. ábrát). A *Vinogradov*-modell alapján nyert adatok a következő lehetőségeket engedik meg:

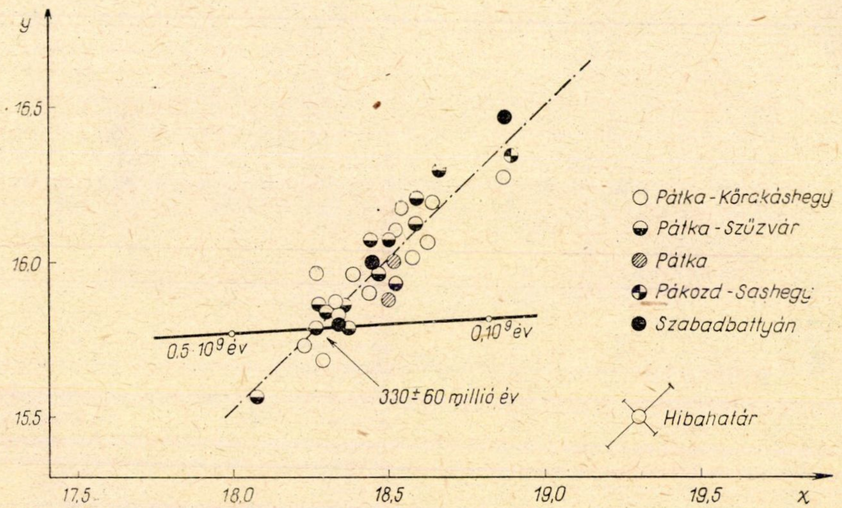
*a)* a hegység ólomércei — akár fiatal érceknek tételezzük fel őket, akár variszkuszi eredetűeknek — anomális izotópösszetételűek. Ez esetben viszont korbecslést a *Vinogradov*-modell alapján nem végezhetünk, mivel ez az „anyamagma" átlagos összetételét tételezi fel.

*b)* A hegység ércei variszkuszi eredetű, valamint fiatal, az andezitvulkánossághoz kötötten jelentkező ércek keveredéseképpen alakultak ki. Ellene szól ennek a feltételezésnek, hogy az izotópösszetétel eloszlásában semmilyen szabályosság nem észlelhető, és az andezitvulkánosság által feltehetően kevésbé érintett területekről származó ércek nem foglalnak el kitüntetett helyet az izotópösszetételek eloszlásában.

A jelen közleményben tárgyalt valószínűségi modell alkalmazását a Velencei hegység érceinek kormeghatározására az 5. ábra szemlélteti. Tekintettel arra, hogy a Velencei hegység ólomérceinek forrására nézve ismereteink nincsenek, így mint már a modell általános tárgyalásánál is említettük, csak a *Russel—Stanton—Farquhar* által megállapított egységes izotópösszetétel fejlődési görbe segítségével végez-




*4. ábra.* A Velencei hegység ólomérceinek izotópösszetétele a *Vinogradov*-diagramban ábrázolva (összehasonlítás kedvéért szaggatott vonallal a prekambrium érceire vonatkozó modell izokronjait is feltüntettük)




*5. ábra.* A Velencei hegység ólomérceinek életkorbecslése a valószínűségi modell alapján hetünk kormeghatározást. Így a hegység ólomércei rendszerének közös életkorára 330±60 millió éves életkor adódik eredményül.

Az egyes kormeghatározási módszerek alkalmazása során említett ellenvetések ellenére a fentiek szerint a hegység ólomérceinek izotópösszetételében észlelt eloszlás magyarázható lenne, azonban mindaddig, míg az izotópösszetétel kialakulásának teljes modellje nem áll rendelkezésünkre, következtetéseink csupán feltevéseken kell hogy alapuljanak. A jelen közleményben tárgyaltak alapján két lehetőség áll fenn a hegység ólomérceinek eredetére nézve; az egyik lehetőség a valószínűségi modell, valamint más ércek izotópösszetételével történő összehasonlítás alapján variszkuszi eredetre utal, a másik lehetőség az, hogy a vizsgált galenitelőfordulások két ércesedési folyamat, nevezetesen egy variszkuszi és egy eocénkori ércesedési folyamat kevert érceiként alakultak ki A részletes fejlődéstörténeti modell kialakításához, illetve az említett lehetőségek közötti döntéshez segítségünkre lehetne a hegység gránitjának elegyrészeiben található ólom izotópösszetételének ismerete, ezek az adatok viszont ez idő szerint még nem állanak rendelkezésünkre. Ilyen irányban vizsgálataink jelenleg vannak folyamatban.

*Köszönetnyilvánítás*

Köszönetemet fejezem ki Szalay Sándor professzor úrnak, aki e vizsgálatoknak az ATOMKI-ben történő elvégzését lehetővé tette, továbbá Földvári Aladár professzor úrnak, aki számos megbeszélés keretén belül a geológiai kérdések tisztázásában nagy segítségemre volt és a minták helyszíni begyűjtésénél is támogatta munkánkat.

Köszönet illeti Sámsoni Zoltán tud. munkatársat, aki a minták tömegspektrometriai mérésekhez történő előkészítését végezte, és aki a minták spektrográfiai elemzési adatait a mérések kiértékeléséhez rendelkezésemre bocsátotta.

## IRODALOM

[1] Nier, A. O.: *J. Amer. Chem. Soc.*, **60**, 1571 (1938).
[2] Holmes, A.: *Nature*, **157**, 680 (1947).
[3] Houtermans, F. G.: *Naturwiss.*, **33**, 185 (1946).
[4] Patterson, C. C.: *Geochim. et Cosmochim. Acta*, **10**, 230 (1956).
[5] Geiss, J.: *Z. Naturforsch.*, **9a**, 218 (1954).
[6] Russel, R. D.—Farquhar, R. M.: *Lead Isotopes in Geology*, Intersci. Publ., 1960.
[7] Vinogradov, A. P. — et al.: *Acta Geol. Acad. Sci. Hung.*, **7**, 235 (1961).
[8] Russel, R. D.—Farquhar, R. M.: *Geochim. et Cosmochim. Acta*, **19**, 41 (1960).
[9] Kovách, A.: *Egyetemi doktori értekezés*, Kossuth L. Tud. Egy., Debrecen, 1962.
[10] Nier, A. O.: *Phys. Rev.*, **79**, 450 (1950).
[11] Jantsky, B.: *Geologica Hung.*, Ser. Geol., **10**, 1 (1958)
[12] Kiss, J.: Személyes közlés.
[13] Földvári—Vogl. M.—Kliburszky, B.: *Acta Geol. Acad. Sci. Hung.*, **7**, 5 (1961).
[14] **Овчинников, Л. Н.** — и др.: *Труды девятой сессии Ком. по опр. абс. возраста геол. форм.*, Акадиздат, Москва, 1961, 228.
[15] **Виноградов, А. П.**: *Сесс. АН СССР по мирному исползованию атомной энергии*, 1—5 июль 1955, Зас. отд. хим. наук. Акадиздат, Москва, 1955, 320,
[16] Cahen, L. — et al.: *Geochim. et Cosmochim. Acta*, **14**, 134 (1958).
[17] Sámsoni, Z.: Személyes közlés.

(Beérkezett: 1962. XI. 14.)

*Magyar Tudományos Akadémia*
*Atommag Kutató Intézet, Debrecen*

# A HUMUSZSAVAK SZEREPE AZ URÁNIUM GEOKÉMIÁJÁBAN ÉS LEHETSÉGES SZEREPÜK MÁS KATIONOK GEOKÉMIÁJÁBAN

Írta: SZALAY SÁNDOR

1950-ben FÖLDVÁRI ALADÁRral együtt a magyarországi liász és miocén szenekben a *Clarke* számhoz képest 15—25-szoros urániumfeldúsulást találtunk [1]. Ez az akkor még meglepő észlelés felkeltette az érdeklődésemet az iránt, hogy milyen folyamat dúsította fel az urániumot a szenekben. Laboratóriumi kísérleti vizsgálataim 1951 végére ahhoz a felismeréshez vezettek, hogy az elhalt növények tőzegesedése folyamán keletkező humuszsavak kötik meg az urániumot a cirkuláló talajvizekből [2], [3]. További laboratóriumi szorpciós vizsgálataim közelebbről is tisztázták az uránium megkötésének a jelenségét. Sikerült egy adott tőzegpreparátum uránmegkötő tulajdonságait két laboratóriumban mérhető számállandóval jellemezni [4], [5], [6], amelyek közül az egyik „geokémiai dúsítási tényező"-nek nevezhető. E megállapításaimat talán éppen szokatlan voltuk miatt is élénk vita fogadta és nem hiányoztak az ellenvetések sem. Éppen ezért szükségesnek látszott a kísérleti bizonyítékok hiánytalan láncolatát kiépíteni, a kőzetekből oldódástól a természetes vizeken való migráción át a huminsavakon való dúsulásig.

E vizsgálatok, valamint geológusok észlelései a természetben minden kétséget kizáróan igazolták a huminsavak szerepét az uránium geokémiai megkötésében. Az is nyilvánvalóan látszik, hogy nemcsak az uranyl ionokkal szemben van a huminsavaknak igen jelentős geokémiai dúsítási tényezőjük, hanem más több vegyértékű kationokkal szemben is. Úgy látszik, hogy a huminsavak geokémiai jelentősége lényegesen általánosabb és egyáltalán döntő jelentőségű tényező a biogeokémiában.

## Bevezetés

A huminsavak geokémiai jelentőségének felismerését a természettudományos ismeretek általános fejlődése készítette elő, az a fejlődés, amelyben a biogeokémia terén V. I. VERNADSZKY is olyan felbecsülhetetlen szerepet játszott.

Már HESS, F. [7] felismerte az élő szervezet felbomlásakor keletkező szerves anyagok jelentőségét az uranylvanadátok dúsulásában. VERNADSZKY, V. I., a biogeokémia nagy úttörőjének könyvét [8] szó szerint idézem: „... die Anreicherung von Uran durch organische Substanz ist in der Geochemie dieses Elements von allergrösstem Einfluss. Denn alle anderen uns bekannten Prozesse begünstigen sein Auftreten in disperser Form".

A huminsavakra vonatkozó ismereteink is nagyon sokat fejlődtek ACHARD (1786), SPRENGEL (1826) és BERZELIUS (1839) óta, akik savas természetüket és a talaj kationjaival való asszociációjukat felismerték, oldhatóságukat megvizsgálták. Ezen a területen FISCHER, F. és SCHRADER, H. vizsgálatai [9] döntő jelentőségűek. Ők ismerték fel, hogy a növények ligninje igen ellenálló a baktériumos és gombás bomlással szemben, és miközben a többi anyagok (cellulóze, hemicellulózék stb.) gyorsan lebomlanak és visszatérnek az élet körfolyamatába, addig a ligninből keletkező huminsavak — legalábbis nem oxidáló környezetben — maradandóak, fosszilizálódnak és a szenek tömegének legjelentősebb részét képezik. A növényi anyag szénülési formái (tőzeg-lignit-barnaszén-kőszén-antracit) a lignin fosszilizálódásának formái és nagy részben huminsavakból épülnek fel. Míg a talajtanban a humusz egy gyűjtőfogalom, amely alatt a talajban levő összes elhalt és változó szerves anyagot értik, szeretném hangsúlyozni, hogy e dolgozat szempontjából huminsavak alatt a Fischer és Schrader által fejlődésükben és jelentőségükben felismert huminsavakat értem, amelyek kationkicserélő sajátsággal bírnak.

Míg a többi organikus anyag nagy része gyorsan lebomlik és visszatér az élet körforgásába, addig a ligninből származó huminsavak nagy kémiai stabilitásuk miatt kiválnak e körforgásból és nagy mennyiségben halmozódnak fel a természetben. (Széntelepek; erdők és termőföldek talaja; tengerek és tavak üledéke stb.) WAKSMAN, S. A.,: *Humus* című könyvében [11] becslést ad a humusz mennyiségéről a természetben. A humuszban organikusan megkötött szén mennyisége szerinte messze meghaladja az élőlényekben megkötött szén mennyiségét. (PUTNAM, P. könyve [12] újabb becsléseket tartalmaz a „gazdaságosan kitermelhető" szénkészletekről. A huminsav eredetű biolitok mennyisége ezeknél jóval nagyobb.) A bioszféra szerves anyaga nagy részben huminsavakból áll:

A bioszféra organikus kötésű (—C—C—) széntartalma

| | |
|---|---|
| Huminsavakban ................................ | kb. $60 \cdot 10^{11}$ tonna |
| Élő szervezetekben ........................... | kb. $7 \cdot 10^{11}$ tonna |

(Nem tekintjük itt szervesnek az atmoszféra és a tengervíz $Co_2$-tartalmát és a karbonátos kőzeteket, mert nem tartalmaznak egymáshoz kapcsolódó szénatomokat. VERNADSZKY [8], [10] az élő anyag széntartalmát jóval magasabbra becsüli, szerinte az nem haladhatja meg a $n \cdot 10^{13}$—$n \cdot 10^{14}$ tonnát.)

Nagyon elősegítette a huminsavak geokémiai szerepének felismerését és megértését az a tény, hogy sokat fejlődtek az ioncsere jelenségekre vonatkozó ismereteink a jelenségnek termőtalajjal kapcsolatban WAY [13] és THOMPSON [14] által a múlt század közepén történt első felismerése óta. BORROWMAN [15] már 1931-ben használt huminszerű anyagokat is ioncserélésre. Az ioncserélés az elmúlt évtizedekben vált laboratóriumokban és az iparban általánosan ismert és használt eljárássá, amióta törvényszerűségeit legalább közelítőleg megismerték, és amióta sikerült oldhatatlan, jól definiált tulajdonságú szintétikus ioncserélőket készíteni.

A talajhumusz kationokkal való asszociációját már nagyon régen, az első tudományos talajkutatók (ACHARD, SPRENGEL, BERZÉLIUS stb.) felismerték. Bár az asszociáció természetére nézve nagyon sok vizsgálat történt, amelyek a humusz „puffer" szerepét felderítették a kationokkal szemben a termőtalajban, (lásd WAKSMAN [16], valamint SCHEFFER és ULRICH [17] könyveit) mégis a jelenség helyes értelmezése késett [31]. Igen sok vizsgálatot végeztek a talaj cserélő kapacitására nézve, különösen a növények szempontjából fontos elemekre (K, Na, Ca, $H_4N$ stb.). Sok az ellentmondás az eredményekben, ami részben a használt „humusz" vagy talaj nem jól meghatározott összetételére, vagy az észlelt jelenségek eltérő észlelésére és értelmezésére vezethető vissza. A geokémiai dúsítási tényező fogalmát nem használják, értékét nem mérik. A megkötésre vonatkozó fizikokémiai elméletek között teret hódítanak azok, amelyek a szintetikus ioncserélőknél is beváltak. A talajkémikusok előtt mindenesetre jól ismert a humusz szorbeálóképessége több kationnal szemben (lásd SCHEFFER—ULRICH, S 70—81.) [17].

Mint ismeretes, GOLDSCHMIDT, V. M., [18] nagyszámú spektrálanalízist végzett szenek nyomelemtartalmán, és meglepte, hogy az elemek milyen nagy számánál milyen jelentős dúsulási tényező található, ha a szénhamu nyomelemtartalmát a földkéregre vonatkoztatott *Clarke*-számmal hasonlítjuk össze. A periódusos rendszer különböző oszlopaiba tartozó elemekről volt szó, és ezért egységes magyarázatot nem tudott adni. Urániumot nem talált, valószínűleg azért, mert a spektrálanalízis nem érzékeny az urániumra.

Ha a fent elmondottakat egyidejűleg szem előtt tartjuk és jelentőségüket helyesen mérlegeljük, akkor már nem látszik meglepőnek annak a feltételezése, hogy huminsavak egyes magasabb vegyértékű kationok geokémiai feldúsulásában jelentős szerepet játszhatnak. Az irodalomból már régen ismeretes sok olyan észlelés, amelyben huminsavtartalmú organikus anyagban kationok jelentős dúsulását tapasztalták a természetben, de ezen asszociációk okára vonatkozó ismeretek hézagosak maradtak, különösen a megkötés természetét, annak numerikus jellemzését illetően (geokémiai dúsítási tényező stb.).

A huminsavaknak a magasabb vegyértékű kationok dúsítása terén mind elterjedtségük, mind túlnyomó nagy mennyiségük, mind kationcserélő tulajdonságuk (egyes kationokkal szembeni nagy geokémiai dúsítású tényezőjük) miatt döntő jelentőséget kell tulajdonítanunk a biogeokémiában, olyan jelentőséget, amelynek pontosabb felmérése igen kiterjedt kutatómunkát kíván. Eddigi vizsgálataink csak szerény kezdő lépéseknek tekinthetők ezen az úton.

## I. Újabb bizonyítékok a huminsavak szerepére az uránium dúsításában

Szeretném röviden összefoglalni a tőzegek és szenek urántartalmának eredetére vonatkozó régi vizsgálataimat, amelyek már közlést nyertek, kiegészítve az újabb vizsgálatokkal, amelyek a humusz szerepét most már minden kétséget kizáróan bebizonyították.

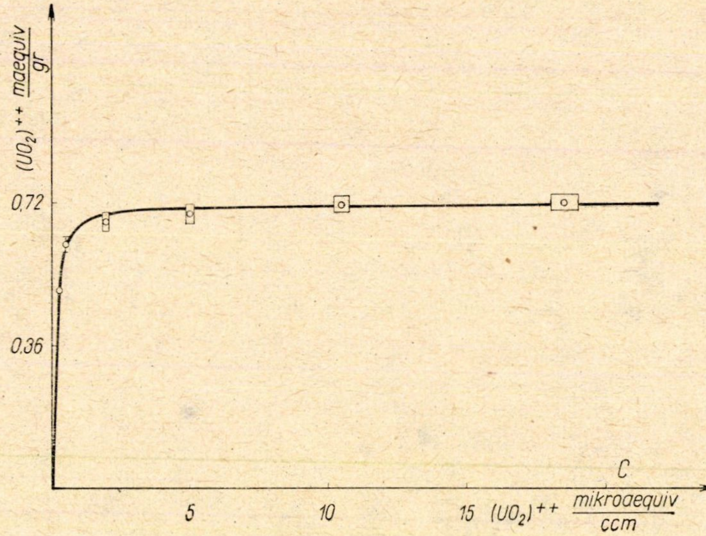
Még 1951-ben, F. Hess [7] és V. I. Vernadszky [8] nyomán arra a sejtésre jutottam, hogy ugyanaz a geokémiai tényező kötötte meg az urániumot a magyarországi szenekben, amelyik a colorádói homokkövekbe ágyazott fosszilis fatörzsekben a svédországi prekambriumi olajpalákban, kolm-palákban stb.

Az a Goldschmidt [18]-féle elképzelés, hogy az élő növények veszik fel a nyomelemeket és az organizmusukban oldhatatlan alakban lerakják azokat, sok elemre nézve helytálló lehet, de az urániummal kapcsolatban nem látszott valószínűnek. (Ő urániumra nem is tételezte fel.) Valószínűbbnek látszott, hogy az elhalt szénülő növényi anyagban valami organikus vegyület köti meg az uránt.

Egyszerű laboratóriumi szorpciós kísérleteket végeztem, amelyek megmutatták, hogy a tőzeg, lignit képesek az uranyl-kationt igen híg vizes oldatból is szinte tökéletesen megkötni. Először valami különleges vegyületre gondoltam (pl. tanninszerű és más ciklikus vegyületekre) és ilyenekkel kísérleteztem, de amikor Fischer és Schrader [9] munkáját megismertem az irodalomban, figyelmem a humuszsavakra terelődött, amelyek a tőzeg és lignit nagy részét alkotják. Ha tőzegből vagy lignitből, híg vizes NaOH-oldattal kioldjuk a humuszsavakat, akkor az oldhatatlan maradék elveszíti uránmegkötő kapacitását, viszont ha savval lecsapjuk a Na-humát oldatból a humuszsavakat, azok újból szorbeálják az uranyl-kationt. Nincsen tehát különösebb okunk, hogy e téren a tőzegben nagy számban, de kis mennyiségben jelenlevő más szerves vegyületeknek jelentőséget tulajdonítsunk.

Az első vizsgálatokat, amelyek az uranyl-kationnak tőzeg-huminsavak által való megkötését kvalitatíve igazolták, 1951-ben végeztem [2], [3]. Ezután 1952 és 1953-ban a laboratóriumi szorpciós vizsgálatokat kvantitatív irányba terjesztettem ki [4], [5], [6].

Lignitet és tőzeget használtam, amiből ismételt benzolos és alkoholos kezeléssel kioldottam a bitumenes, viaszos, gyantás anyagokat, valamint a könnyen oldódó alacsony molekulasúlyú huminsav frakciókat, és sósavas kezeléssel eltávolítottam a szorbeált kationokat.




*1. ábra.* Az uranyl-kation adszorpciós izotermája lignit-huminsav preparátumon. *Abszcissza:* uranyl-ion koncentrációja a vizes fázisban az egyensúly beállta után. *Ordináta:* az uranyl-kation koncentrációja huminsavon az egyensúly beállta után

Szorpciós izotermákat vettem fel, amelyek uránkoncentrációban az egymással összerázott víz és huminsav preparátum közötti szorpciós egyensúlyt mutatják (1. ábra). Az ábrán az abszcissza az urán egyensúlyi koncentrációja a vízben, az ordináta az egyensúlyi koncentrációja a tőzegen. Az izotermát kb. pH = 5-nél a legcélszerűbb felvenni, mert pH < 3 esetén már erősen csökken a szorpció, pH > 7 esetén pedig — különösen alkáli-kationok jelenlétében — a huminsavak oldódni kezdenek (a természetben ismert barna huminsavas víz).

A szorpciós izotermán két alapvetően fontos jelenséget figyelhetünk meg. Az egyik a telíthetőség, a másik a kezdeti résznek a nagy meredeksége. A telíthetőség különöbző huminsavtartalmú biolitoknál különböző. Tőzeg esetén maximálisan 2 m. equiv/g száraz tőzeg, lignit esetén 0,5—0,7 m. equiv/g szorpciós kapacitást tapasztaltam. Ez jó összhangban van a talajtani kutatók által a talaj huminsavakon más kationokra nézve talált szorpciós kapacitás értékekkel. Meglepő az izoterma kezdeti nagy meredeksége. Ez tulajdonképpen a jelenség nagy geokémiai jelentőségének az oka. A kezdeti meredekség kb. 10 000 : 1, és ezt geokémiai dúsítási tényezőnek nevezhetjük. Továbbá rendkívül fontos tény az, hogy ez a dúsítási tényező bármilyen kis uránkoncentráció esetén is fellép, ellentétben a kémiai reakciókban bekövetkező lecsapatás feltételezésével, ahol is az oldékonysági szorzat véges értéke miatt egy bizonyos koncentráción alul nem válhat le csapadék, mert a reakciótermék oldatban marad mindaddig, amíg a koncentrációja meg nem haladja az oldékonyság értékét. Tipikus kationkicserélő folyamatról van szó, amely bármilyen kis koncentráció esetén is 10 000-szeresen dúsít, mert maga a magas molekulasúlyú és polimerizálódott huminsav, urán megkötése nélkül is oldhatatlan, és ehhez az oldhatatlan vázhoz szorbeálódik a vízből az uranyl-kation.

A szorpciós jelenség fenomenológiai leírása a *Langmuir*-féle adszorpciós feltevések alapján jól sikerült. A következő formula számszerűen is jól visszaadja a mérési pontokat, amint azt grafikusan is igazoltuk és matematikailag ellenőriztük [4]:

$$N = N_\infty \frac{ac}{1+ac},$$

ahol $N_\infty$ az adott tőzeg telítési kapacitása m. equiv/g-ban;
$c =$ az uranyl-ion egyensúlyi koncentrációja a vízben (m. equiv/g);
$N =$ az uranyl-ion egyensúlyi koncentrációja a tőzegen;
$a =$ egy a tőzegre jellemző numerikus állandó.

A tőzeget ezek szerint két számadat jellemzi, az egyik $N_\infty$, amelyik azonos tulajdonképpen a talajtanban szorpciós kapacitásnak nevezett állandóval.

A másik állandó az „$a$", de helyette a geokémiában célszerű az „$N_\infty \cdot a$" szorzatot „geokémiai dusítási tényező"-nek nevezni, amint azt a következőkben könynyen beláthatjuk:

Egy 2 m. equiv/g kapacitású tőzeg telítés esetén mintegy 20% urániumot képes felvenni. A természetes vizekben az uránium koncentrációja nagyon alacsony és a biolitokban is csak kis koncentrációk lépnek fel (nagyságrend: 0,01%). A természetben az izotermának mindig a kezdeti meredek szakaszán dolgozunk, tehát a geokémia szempontjából csupán a dúsítási tényezőnek van jelentősége, a kapacitásnak nincs. A fenti formula nevezőjében igen kis koncentráció esetén $ac \ll 1$, ezért a formula a következő egyszerűbb alakba írható:

$$N = c \cdot N_\infty \cdot a, \quad \text{ha} \quad a \cdot c \ll 1.$$

Geokémiai dúsítási tényező alatt értjük azt a törtet, amelynek a számlálóját az uránkoncentráció képezi egy gramm huminsavban, nevezőjét az uránkoncentráció egy gramm vízben, egyensúly esetén. Geokémiai dúsítási tényező $= \frac{N}{c} = N_\infty \cdot a$.

A fenti formula tapasztalatunk szerint a jelenség leírására igen alkalmasnak bizonyult. Természetesen a jelenség a kationkicserélő gyantáknál használt más formalizmusok segítségével is leírható. Ha a huminsav (H-humát) és az uranylkation közötti reakciót megfordítható kémiai folyamatnak tekintjük, akkor leírhatjuk a tömeghatás törvényével is:

$$2H^+ - \text{humát} + (UO_2)^{++} \rightleftharpoons (UO_2)^{++} - \text{humát} + 2H^+.$$

Az egyensúly feltétele az, hogy a folyamat a két irányban egyforma sebességgel menjen végbe:

$$[h] \cdot c = \text{Konst.}\ N \cdot [H^+]^2,$$

ahol $[h]$ a huminsav molkoncentrációja, $[H^+]$ a hidrogénionok molkoncentrációja, $N$ és $c$ jelentése ugyanaz, mint az előzőekben.

$$\frac{N \cdot [H^+]^2}{c[h]} = \text{Konst.}$$

A kémiai egyensúlyból is levezethetjük a geokémiai dúsítási állandót igen kis koncentrációk esetére. Ilyenkor $[h]$ = konstans, mert az $(UO_2)^{++}$ által lekötött huminsavmennyiség elhanyagolható az összeshez képest és $[H^+]$ is konstans, mert azt a víz pH-ja (szénsavtartalma stb.) szabja meg, a humuszból az uranyl által felszabadított $H^+$ mennyisége nem változtatja meg lényegesen a $H^+$ koncentrációt.

Ezen feltevések mellett látható, hogy $\frac{N}{c}$ értéke állandó, az adott huminsavon $(UO_2)^{++}$ szorpcióra jellemző szám és azonos a fent definiált geokémiai dúsítási tényezővel.

Mindenesetre az általam használt izoterma *Langmuir*-szerű formalizmusa a telítésig jól leírja a jelenséget és ebből a következőket lehet megállapítani:

1. A szorpciós kapacitás véges és telíthető (ez a talajtanból már régen jól ismert jelenség más kationokra nézve).

2. A szorpciós folyamat reverzibilis.

Ez utóbbiról kísérletileg radioaktív indikátor módszerrel győződtünk meg. A szorbeált uranyl-kation más kationokkal kicserélhető. Minthogy a Th-ból rövid felezési idejű nyomjelző izotópok (pl. $UX_1$) állnak rendelkezésre, kísérletekkel meg tudtuk állapítani a szorpciós egyensúly dinamikus voltát. A szorbeált kationok állandó dinamikus cserében vannak a vízben levő nem szorbeált kationokkal. A $Th^{4+}$ kation még erősebben szorbeálódik, mint az $(UO_2)^{++}$.

A fenti fenomenológiai leírás és a geokémiai dúsítási tényező definiálása nem tartalmaz semmiféle elméletet arra nézve, hogy az uranyl-kation megkötése a humuszon milyen kémiai kötés formájában történik. Elvileg a kötés lehet a kation és a nagy molekulájú negatív iontöltésű, oldhatatlan huminsav közötti heteropoláris, kicserélhető ionkötés, amelyben a hydrátburok is szerepet játszik. Elképzelhető természetesen organikus komplexkötés is [19], de ez is reverzibilis, cserélhető. A fenti megfontolások és empirikus észlelések, valamint a levont geokémiai következtetés — a kötés természetétől függetlenül — érvényben marad. A kötés fizikokémiai problémájával kapcsolatban célszerűbb más kationok huminsav által történő szorpcióját is vizsgálva foglalkozni.

A huminsavak kémiai szerkezetére vonatkozó ismereteink nagyon sokat haladtak az utóbbi évtizedekben [9], [11], [17].

Röviden a következőkkel jellemezhetjük a huminsavakat:

A ligninből származnak és ennek megfelelően egy policiklikus vázból épülnek fel, amelynek nagy kémiai stabilitásukat köszönhetik. Ezt a vázat a szénhidrátokat és egyéb növényi anyagokat különben gyorsan lebontó gombák és baktériumok — legalábbis oxigénszegény környezetben (víz alatt, talaj alatt) — nem tudják lebontani. Ezen a vázon egyszerű poláros csoportok foglalnak helyet, amelyek közül elsősorban a karboxil-, valamint a hidroxilcsoportok savas karakterűek. A karboxilcsoportok kb. abban a pH-tartományban (kb. pH = 5) disszociálnak, amelyben az uránium szorpciója történik. Ezzel szemben a hidroxilcsoportok csak magasabb pH-nál (cca 9—10) disszociálnak, amikor a huminsavak már peptizálódnak, oldatba mennek alkáli-kationok hatására.

A huminsavak kationcserélő sajátságait nagyon jól összehasonlíthatjuk a szintetikus műgyantavázra felépített, karboxilizált típusú kationcserélő műgyantákkal. Csupán a következő mennyiségi és minőségi különbségek vannak a szintetikus műgyanták javára:

*a)* A szintetikus műgyanták nagyobb pH-tartományban oldhatatlanok, mint a humuszsavak;

*b)* Hasonló pH-tartományban disszociálnak, de a disszociációs állandójuk jobban definiált mint a humuszsavaké, mert a humuszsavak aktív karboxilcsoportjainak disszociációs állandóit többé-kevésbé befolyásolják a szomszédos különféle poláros csoportok ($-OH$, $-CH_3$ stb.).

*c)* A szintetikus műgyanták ioncserélő kapacitása valamivel nagyobb.

Nagyon sok eluciós kísérletet végeztünk különböző kationok radioaktív izotópjaival, tőzeg huminsavval töltött ioncserélő oszlopon, teljesen a szintetikus ioncserélőknél szokásos módon és eredménnyel.

Az anyag természetbeni állapotának megfigyeléséhez szokott terepgeológusnak és mineralógusnak egy geokémiai elmélet kísérletekre alapított felépítése idegennek és indokolatlannak látszhatik. Az az ellenérv merülhet fel, hogy a laboratóriumban kis mennyiségű, aránylag tiszta huminsavkészítményen végzett szorpciós kísérlet sok tekintetben nem azonos körülmények között történik, mint az urándúsulások a természetben. Ilyen ellenvetés valóban gyakran indokolt lehet. A geológiában a természetben önként lejátszódó folyamatok laboratóriumi megvalósítása általában igen nagy akadályokba ütközik. A legáthidalhatatlanabb akadály az, hogy a geokémiai folyamatok a természetben többnyire igen lassan, hosszú idő alatt játszódnak le. Nem tudunk laboratóriumban olyan kísérleteket beállítani, amelyek lefolyásához évezredekre, vagy éppen évmilliókra van szükség. A kationok szorpciója huminsavakon szerencsére nem ilyen lassú folyamat. Másodpercek — percek alatt bekövetkezik, így kísérletes megfigyelésre igen alkalmas, és a geokémiai dúsítási tényező numerikus meghatározását is lehetővé teszi. Így ezen probléma laboratóriumi kísérletes megfigyeléssel való felderítése indokolt.

Az utóbbi években a kísérleteket kiegészítettük természetbeni megfigyelésekkel és természetben végzett kísérletekkel is. Szerettük volna tudni, hogy a természetben egy kommerciális urándúsulásokat nem tartalmazó, sőt ilyen szempontból reménytelen, kiterjedt területen, milyen uránkoncentrációk fordulnak elő a természetes felszíni vizekben. Északkelet-Magyarországon a Zempléni-hegységben és annak pannon üledékes előterében, kb. 15 000 km$^2$ területen, mintegy 800 forrás és kis mélységű kút vizét analizáltuk meg uranyl-ionra a NaF olvadék gyöngy fluoreszkálása segítségével [20]. A statisztikai megoszlás végeredményben azt mutatja, amit a hydrogeológiai módszerrel urániumot kutatók „háttér"-nek (U background) neveznek. Ilyen vizsgálatokat világszerte nagy arányban végeznek [21], [22], a Szovjetunióban pl. SAUKOFF [23]. Mi figyelmünket nem U-aureola, helyi anomália kutatásra összpontosítottuk, hanem mintavételünket nagy területre (mintegy 15 000 km$^2$) szórtuk szét. Az így kapott statisztikai megoszlás nullától cca 100 mg U/tonna víz értékig terjed. Az utóbbi viszonylag nagy koncentráció e területen ritkán (800 között néhány mintában) fordul elő. A megoszlási görbe maximuma cca. 1—10 mg U/t leggyakoribb koncentrációk között van.

Érthetetlennek látszott előttünk a természetes vizek urántartalmának nagy ingadozása, egyébként azonosnak látszó üledékes pannon homokrétegekben, egymáshoz közel eső helyeken is, amikor itt rejtett földalatti koncentrálódások léte kizárt. Feltételeztük, hogy a szemcseméret, illetve a talaj specifikus felülete a döntő tényező [24], [25]. Újabb vizsgálataink azt mutatják, hogy a specifikus felületnek is van szerepe, de ez nem az egyetlen döntő tényező.

Szerettük volna az urándúsulást tőzegen a természetben közvetlenül megfigyelni, de sajnos e területen nincsenek tőzegtelepek a nagy U-koncentrációjú talajvizekkel érintkezésben. Éppen ezért egy kísérletet végeztünk természetes körülmények között. HORVÁTH ÉVA munkatársam [26] likacsos nylonzacskóban pár gramm tőzeget akasztott néhány hétre közel 100 mg U/t tartalmú kútvízbe. Az analízis mintegy 3000-szeres U-dúsulást mutatot, de a víz pH-ja cca 7 volt és a huminsavak egy része kioldódott a zacskóból. Ez a kísérlet talán felesleges is volt, mert az USA-ban találtak tőzegelőfordulásokat, ahol az U-tartalmú víz jelenleg folyik át és a dúsulás a jelenkorban játszódik le a tőzegben [27]. Az U friss dúsulását mutatja, hogy nincs egyensúlyban a radioaktív bomlási termékeivel, és így gammasugárzást alig ad. (A radiometriás uránkutatás tőzegmezőkön nem szolgáltat megbízható uránérték indikációt, így mennyiségét direkt kémiai analízissel kell meghatározni. Ugyanez okból az ilyen friss U-dúsulások a radiometriás kutatók figyelmét elkerülhetik.)

Hasonló urándúsulást észlelt Észak-Svédországban ARMANDS, G., [28] is. Kiruna-tól cca. 100 km-re délkeletre Masugnsbyn mellett több forrás vize tör át homok finomságú vastag gránit morénatörmeléken, majd egy tőzegmezőn. Észlelései rendkívül érdekesek a huminsavszorpciós elmélet igazolása szempontjából. Meganalizálta a források vizét és 100 mg U/t átlagot talált. A tőzegben átlagban 900 g U/t értéket talált, azaz a dúsulás az én laboratóriumi kísérleteimmel összhangban kb. 9000-szeres. Egyes tőzegrészekben az U-koncentrációja eléri a 3% értéket. A tőzegmező évente csak az egyik forrásból 6 kg friss urániumot szorbeál.

A talált 226 forrás közül 4 vize 730 mg U/t koncentrációjú volt, 32 forrás adott 15—100 mg U/t-t és 190 forrás koncentrációja 6 mg/t volt. Mesterséges kioldási kísérleteket is végzett hidrokarbonátos vízzel, zúzott gréniton és más helyi kőzeteken. E kísérletei jó összhangban vannak a forrásvizekben talált aktivitásokkal és a mi kioldási kísérleteinkkel (lásd később).

ARMANDS, G. ezen rendkívül érdekes geokémiai megfigyelései a természetben a legszebb analógiában vannak a huminsavakon végzett laboratóriumi szorpciós kísérletekkel és a huminsavak szerepére vonatkozó feltevést a folyamat természetbeni megfigyeléseivel igazolják. Az elmúlt évek folyamán sok más geológiai bizonyíték és szorpciós kísérlet is lett ismeretes, itt csak VINE, J. D. [27] kiváló referáló munkájának említésére szorítkozunk, amelyik ezeket ismerteti.

Még a mobilizáció, az U-oldódás kérdése foglalkoztat bennünket. Minthogy a bioszférában a huminsavak a legelterjedtebb anyagok, és a kedvező pH is létrejön a tőzegtelepeken áthaladó vízben, nyilvánvaló, hogy a dúsulás szűk keresztmetszetét a természetes vizek csekély urántartalma (az urán lassú oldódása a kőzetekből) képezi.

Irányításom mellett HORVÁTH ÉVA [29] kísérletileg vizsgálja az uránium oldódását a legfontosabb magmatikus kőzetekből, minthogy e kőzetek az üledékes kőzeteknek is eredeti forrását képezik. Gránitból, andezitből és riolitból mesterséges detrituszt készített különböző nagyságú szemcsére zúzás útján. A kapott kőtörmeléket mérsékelt hidrokarbonáttartalmú vízzel bő levegőztetés mellett szobahőmérsékleten 3 órán át keverte. A kioldott uránnyomokat a NaF olvadék gyöngy fluoreszcenciás eljárással határozta meg. Anélkül, hogy itt az eredményeket részletesen ismertetném, a következő tapasztalatokról számolhatok be:

*a)* Az urán kioldódása a különböző kőzetekből nagyon különböző. Gránitból több mint ötvenszer nagyobb uránkoncentrációjú vizet kapunk, mint andezitből.

*b)* A bicarbonáttartalom növelése a vízben elősegíti az oldódást.

*c)* Ha a kőzettörmelék specifikus felületét növeljük, azaz az átlagos szemcseméretet csökkentjük, akkor nő az urán oldódása, de a SCHERFF és SZALAY [24] által számítottnál kisebb mértékben.

*d)* Az andezitből cca. olyan koncentrációjú vizet kapunk, mint a természetes vizek közül a legkisebb U-tartalmúak, viszont a gránitból kapott víz U-koncentrációja megfelel a természetben található nagyobb koncentrációjú vizeknek. Az I. táblázat néhány tájékoztató számértéket mutat.

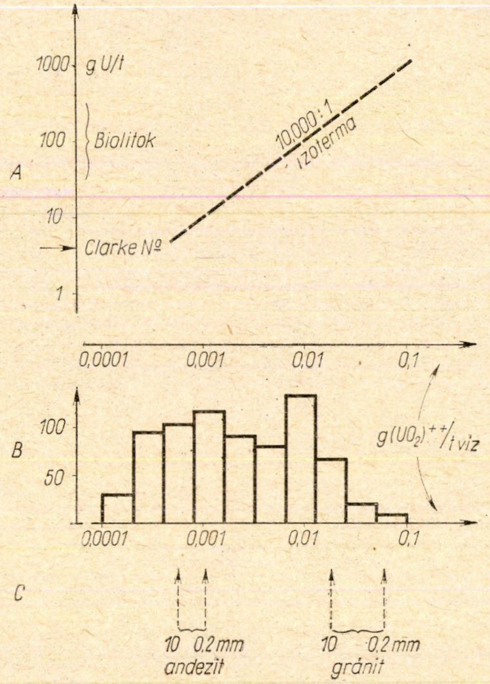
**I. táblázat**

Az urán oldódása különböző szemcseméretűre zúzott magmatikus kőzetekből 2g/liter Na—bicarbonáttartalmú vízben, 3 óra alatt

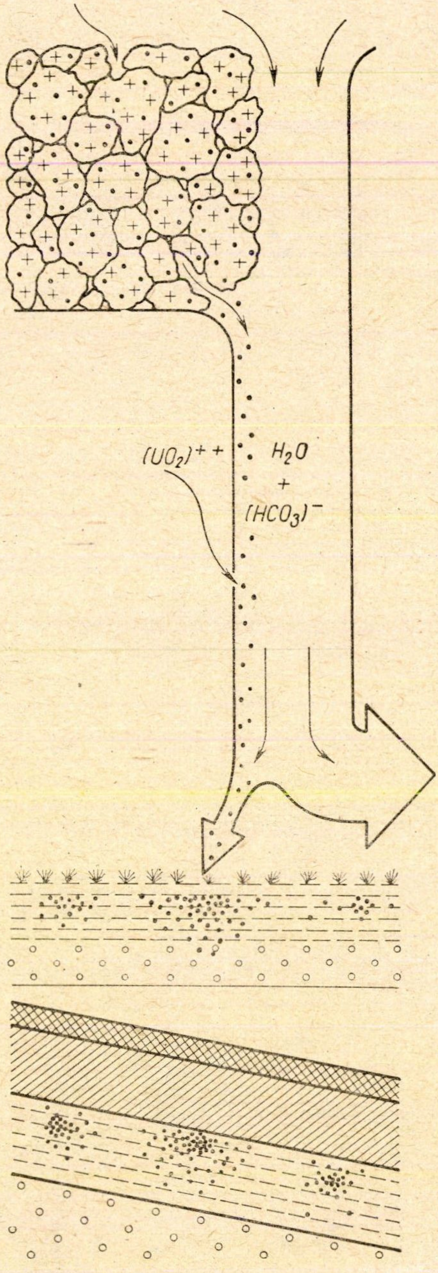
| Kőzet | U g/t | Szemcseméret mm | A víz U-tartalma mg $UO_2$ |
|---|---|---|---|
| gránit | 3,9 | 5—10 | 22,0 |
| gránit | | <0,2 | 64,0 |
| riolit | 2,7 | 5—10 | 12,0 |
| riolit | | <0,2 | 31,0 |
| andezit | 1,8 | 5—10 | 0,58 |
| andezit | | <0,2 | 1,10 |

A táblázatból látható, hogy a savanyú magmatikus kőzetekből cca. ötvenszer több U oldódik, mint az andezitből, bár az anyakőzet U-tartalma csak 2:1 viszonyt mutat. A természetes vizekben ott kaphatunk 100 mg U/t koncentrációt, ahol a víz nagy felületű finom szemcsés, közvetve vagy közvetlenül savanyú magmatikus kőzetből származó detrituszon halad át. Hogy miért oldódik sok a gránitból és kevés az andezitből, azt nem tudjuk. Oka nem e kőzetek U koncentrációjának különbözősége, hanem talán a kristályszerkezet matrixában való megkötés módja lehet.

Úgy látszik, hogy most már főbb vonásaiban értjük azon geokémiai migráció főbb fázisait, amelyik a természetben az uránnak biolitokban feldúsulásához vezet. A 2. ábrán egyesítve ábrázoljuk a laboratóriumi szorpciós kísérletek, a biolitokban, valamint a természetes vizekben talált uránkoncentrációk értékeit és feltüntettük a cca. 1:10 000-szeres dúsulásnak megfelelő izoterma kezdeti egyenes részét. A természetben mindig az izoterma kezdetén vagyunk, mert a szorbeált urántartalom csak csekély tört része a szorpciós kapacitásnak. (Tőzeg kapacitásának telítéséig 10—30% uránt tud felvenni.) A dúsulási folyamat szűk keresztmetszetét nem a biolit huminsavtartalma, hanem mindig az uránnak a kőzetekből való lassú oldódása képezi. A 2. ábrán alul feltüntettük a magmatikus kőzeteken végzett mesterséges oldási kísérletek eredményeit is. Az izoterma mintegy a fázisdiagramja az urántartalom tekintetében egymással egyensúlyban levő tőzegnek és víznek.

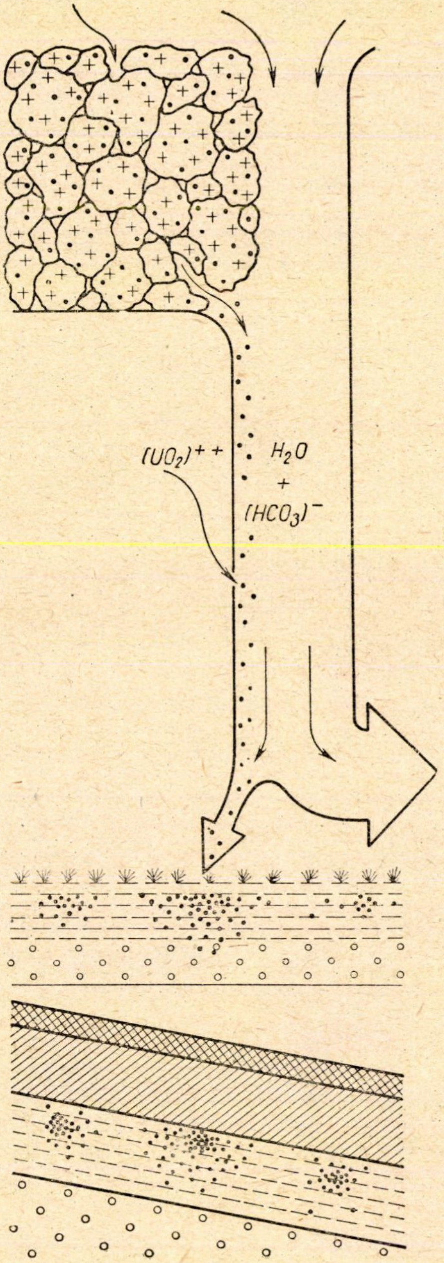



2. *ábra.* Korreláció három független kísérletsorozat eredménye és a biolitok U-tartalma között. *A)* Lignit-huminsavon felvett $(UO_2)^{++}$ szorpciós izoterma korrelációt ad a biolitok U-tartalma (ordináta) és a természetes vizek mintegy tízezerszer kisebb U-tartalma (abszcissza) között. *B)* ÉK-Magyarország U-dúsulásokat nem tartalmazó 15 000 km² területén meganalizált kb. 800 természetes víznek $(UO_2)^{++}$-tartalom szerinti statisztikai megoszlása. *C)* Andezit és gránit zúzása útján kapott 10 és 0,2 mm max. szemcsenagyságú zuzalékból 2 g/liter $NaHCO_3$-tartalmú vízzel 3 h alatt kioldott $(UO_2)^{++}$ koncentrációja a vízben (HORVÁTH, É. mérései)




3. *ábra.* Az urán huminsavakkal kapcsolatos dúsulásának fázisai a természetben, sematikusan leegyszerűsítve

Az ábra az MTA Matematikai és Fizikai Osztály Közleményei XIII. kötet 3. számában megjelent Szalay Sándor „A humuszsavak szerepe az uránium geokémiájában" című cikke 262. oldalán szereplő 3. ábra kiegészítésére szolgál, amelyről a magyarázó szöveg tévedésből lemaradt.




I. FÁZIS. OLDÓDÁS, MOBILIZÁCIÓ

Nagy felületű, finom szemcsés (homok, detritus) állapotú gránit, riolit, riolit-tufa, stb. vegyi málás állapotában U>4 g/t. A víz $(HCO_3)^-$ tartalma old az U-ból $(UO_2)^{++}$ alakban.

II. FÁZIS. MIGRÁCIÓ

A víz tonnánként $\lesssim$100 mg $(UO_2)^{++}$ kationt szállít tőzeges, huminsavtartalmú üledékre.

III. FÁZIS.
SZORPCIÓS MEGKÖTÉS, DÚSÍTÁS

Huminsavak 10 000 : 1 dúsítási tényezővel szorbeálják az $(UO_2)^{++}$ kationt a vízből (uranyl-humát).

IV. FÁZIS.
SZEKUNDER MINERALIZÁCIÓ

A huminsavban dús (tőzeg) réteget más rétegek fedik be. Fosszilizáció, szénülés. Helyi migrációk, az $(UO_2)^{++}$ tartalomban helyi dúsulások.
Szekunder mineralizáció.

*3. ábra*

3. ábránk sematikusan, nagyon leegyszerűsítve próbálja szemléltetni e folyamat főbb fázisait, és azokat kvantitative is jellemzi. Természetesen tisztában kell lennünk azzal, hogy a természetben a jelenség nem ilyen egyszerű, tiszta körülmények között jelentkezik, hanem sokféle alakban mutatkozhatik, mégis a dúsulásra vonatkozó számadatoknak a nagyságrendje feltétlenül helyes. A kb. 10 000-szeres dúsítási tényező elegendő ahhoz, hogy a nagyobb U-tartalmú (30—100 mg U/t) vizekből tőzegben létrejöjjön olyan U-dúsulás, amilyet a biolitokban találunk a természetben. Egy tonna tőzegen kb. 1000—10 000 tonna víznek kell átáramlania, hogy a tapasztalt urándúsulás létrejöhessen. Ez geológiai mértékkel mérve igen rövid idő alatt (évtizedek-évszázadok) bekövetkezhetik. A tőzegbe közben ásványi üledék is rakódik, és idővel fedő rétegek rakódnak rá. Az évmilliókon át tartó szénülés folyamán szekunder mineralizáció következik be az urántartalomban, amit nagymértékben befolyásol a kémiai és fizikai környezet. A szekunder minerilazáció vizsgálata terén a szükséges hosszú idő miatt laboratóriumi modellkísérletek eredménye kétséges, ezért inkább a mineralógusok természetet megfigyelő munkájára vagyunk korlátozva.

Megvizsgáltuk az oxidációs-redukciós viszonyok befolyását az U megkötésére huminsavakon. BRÜCHER, E. [30] munkatársam azt találta, hogy ha az $(UO_2)^{++}$ kationt a szokásos eljárással redukáljuk $U^{4+}$ kationná, akkor ezt a kationt a huminsavak sokkal erősebben kötik meg, mint az $(UO_2)^{++}$-t. Valószínű, hogy a dúsítási tényező közel hasonló a $Th^{4+}$ ionéhoz, de eddig nem határoztuk meg számszerűen. Vizsgálatai azt mutatták, hogy a huminsavakon megkötött $U^{4+}$ nem oxidáló savval (HCl) felszabadítás után újból $U^{4+}$ alakban szabadul fel, azaz a szorpciós kötés nem alakítja át $(UO_2)^{++}$-é. A tőzegből általunk készített huminsavban dús készítmények az általunk használt, levegőzött körülmények között még nyomokban sem redukálják az $(UO_2)^{++}$ kationt $U^{4+}$ alakra. E vizsgálatok mindenesetre azt mutatják, hogy az urániumot a humusz erősen redukáló környezetben is megköti a vízből.

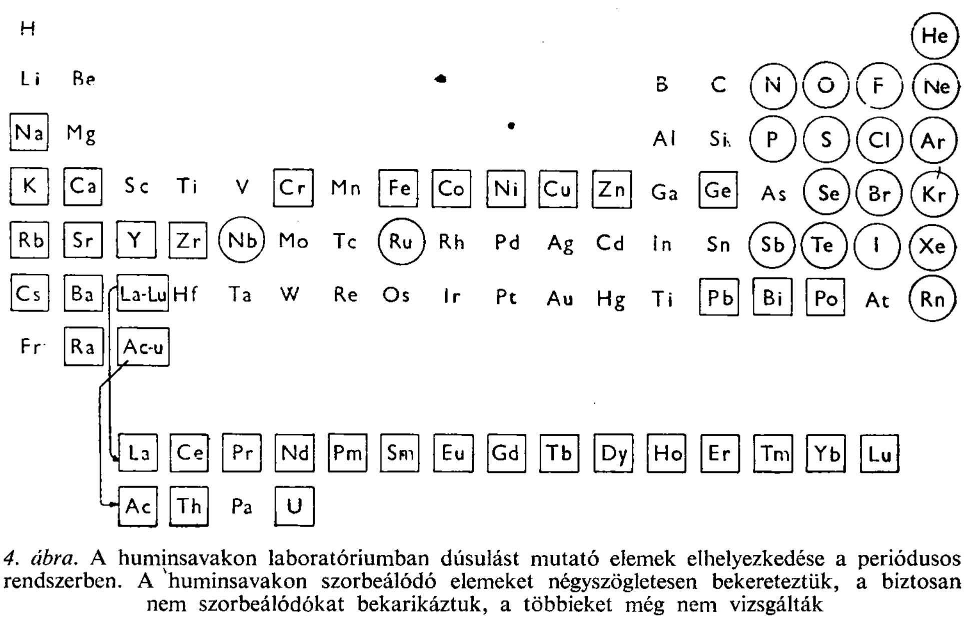
## II. Huminsavak lehetséges geokémiai jelentősége különböző kationok szorpciós megkötésében

A talajtanból régen ismeretes, hogy a huminsavak többféle kationt (Na, K, $H_4N$, Ca, stb.) megkötnek [11], [17]. Már első kísérleteimben kiderült, hogy az $(UO_2)^{++}$-hez hasonlóan kötődik a $Th^{+4}$ és sok más kation is [4]. A talajtanból régen ismeretes a vízben oldható huminsavaknak a kolloidális kölcsönhatása $Fe(OH)_3$-al, $Al(OH)_3$-al. Ba-ra KAWAMURA [32] már 1930-ban szorpciós izotermaszerű görbét vett fel, de nem jutott a dúsítási tényező fogalmához. Régen ismeretes a dopplerit, egy főleg Ca, Mg, de Fe és más kationokat is tartalmazó ásvány, amelyik olyankor keletkezik a természetben, amikor vízben oldott (kisebb molekulasúlyú) huminsavak találkoznak vízben oldott Ca és más ionokkal. A tucholit főleg ritka földfémeket és velük együtt gyakran radioaktív anyagokat is tartalmazó humát, amelynek esetében nem a tőzeg-huminsavak gyűjtik össze a kationokat, hanem a vízben oldott huminsavak csapódnak ki az ásványokra. Az irodalomban sok olyan tapasztalattal találkozunk, amelyek a természetben kationok és tőzeg, vagy szén közelebbről meg nem magyarázott asszociációját ismerik fel. A GOLDSCHMIDT, V. M., ([34] által szenekben talált nyomelemek nagy része kation karakterű, bár kétségtelen, hogy kimondottan anion karakterűek is vannak közöttük, melyek semmiképpen sem dúsulhattak kationcserélő jelenség következtében (B, Si stb.) A Ge-ról nemrégen MANSZKAJA és munkatársai [35] kimutatták, hogy erősen megkötődik humuszon, szerintük komplexkötésben. Nem tisztázott még, hogy milyen a migráló ion, van-e egy kation természetű Ge komplex, amelyik a természetes vizekben uralkodó körülmények között migrálni képes? A mi tapasztalataink szerint huminsavak anionokat még nyomokban sem kötnek meg.

KOVÁCH, A. munkatársam még 1953-ban oszlopkromatográfiás módszerrel megvizsgálta egész sor kation eluciós sorrendjét lignithuminsavon [4]. SZABÓ, I. [36] több kation szorpciós izotermáját vette fel lignithuminsav preparátumon és közelítőleg a geokémiai dúsítási tényezőket is meghatározta. ($Ni^{++}$, $Cu^{++}$, $Fe^{++}$, $Cr^{+++}$, $La^{+++}$, $Fe^{+++}$, $Th^{4+}$.) A $Th^{4+}$ és a $La^{3+}$ dúsítási tényezőjét jóval (mintegy kétszer) nagyobbnak találta az $(UO_2)^{++}$-ionénál.

Ezek alapján arra gondoltam, hogy a nem oldható, nagyobb molekulasúlyú huminsavakat tartalmazó, megfelelően előkezelt tőzegek igen alkalmasak lehetnek uránhasadásból eredő radioaktív termékek visszatartására atomipari szennyvizekből és hasonló szerepük lehet a természetben a talajban is. SZILÁGYI, M.-val közös [37], [38] vizsgálataink azt mutatták, hogy a huminsavak megkötik az uránhasadási termékek nagy részét, közöttük a biológiailag veszélyes hosszú felezési idejű Sr-90 és Cs-137 izotópokat is. Nem kötődnek meg az anion természetű hasadási termékek, közöttük a $J^-$, $Nb^{5+}$, Ru, Te, Se stb. még radioaktív módszerrel észlelhető nyomokban sem. E vizsgálatok a hasadási termékek nagy számára való tekintettel még folyamatban vannak. Újabban CSUVELOVA, NAZAROV és CSMUTOV [33] is vizsgálták a ritkaföldek megkötését huminsav által. A megkötést szelektív komplexkötésként értelmezik.

A 4. ábrán a periódusos rendszeren együtt mutatjuk meg saját vizsgálataink eredményét, kiegészítve már más szerzőktől ismert eredményekkel.




*4. ábra.* A huminsavakon laboratóriumban dúsulást mutató elemek elhelyezkedése a periódusos rendszerben. A huminsavakon szorbeálódó elemeket négyszögletesen bekereteztük, a biztosan nem szorbeálódókat bekarikáztuk, a többieket még nem vizsgálták

Alant összeállítottuk a megkötés erősségének hozzávetőleges sorrendjét, megjegyezve, hogy az mint a szintetikus kicserélőknél a pH és az ionok koncentrációjának függvényében változhatik:

$$Fe^{+2} < Cu^{+2} < (UO_2)^{+2} < Fe^{+3} < Y^{+3} < La^{+3} < Th^{+4} < Zr^{+4}$$

$$Li < Na < K < Rb < Cs; \quad Ca < Sr < Ba < Ra.$$

Ez az eluciós sorrend nagy hígítású HCl-el eluálás esetén igen kis koncentrációjú szorpcióra vonatkozik. Hozzávetőleg a geokémiai dúsítási tényező sorrendjét is adja.

A megkötés fiziko-kémiai természetére vonatkozó vizsgálataink folyamatban vannak. Eddigi tapasztalataink mind arra mutatnak, hogy a kötés kationkicserélő heteropoláris kötés, amelyet a kation hydrátburka befolyásol. A nagy molekulasúlyú oldhatatlan, nagyon rosszul disszociálódó huminsavhoz, mint negatív töltésű anionhoz elsősorban heteropoláris, elektrosztatikus erők kötik a pozitív töltésű és hydrátburokkal körülvett kationokat, amelyek vetélkednek a $H^+$ ionnal, vagy a többi kationnal.

Látva azt, hogy a huminsavak kationmegkötőképessége a periódusos rendszerben ennyire elterjedt, fel kell ismernünk azt, hogy ennek a jelenségnek nagy geokémiai jelentősége lehet, másrészt felmerülhet az a kérdés, hogy miért nem találtunk eddig a természetben humát természetű, tehát huminsavas szorpcióval kapcsolatos érceket nagyobb számban és változatosságban?

Ilyenek biztosan vannak. Nyilvánvaló e felmérések után, hogy a huminsavak fontossága a természetben főleg a $2^+$, $3^+$ és $4^+$ vegyértékű kationok dúsítása szempontjából lehet jelentős és geokémiai vizsgálatoknál ezt a lehetőséget kell szem előtt tartani. Az orosz és német bitumenes rézpalákról GOLDSCHMIDT már 1937-ben [39] felveti, hogy ezek a ritka elemeknek olyan asszociációit tartalmazzák, amilyenekkel szenekben és humuszos talajokban lehet találkozni. Valószínű, hogy egyes organikus, huminsavdús ércekben a dúsulásra ilyen magyarázatot találunk. A szenek nyomelemei közül is a 2—4 vegyértékű kation formában migrációképesek majdnem bizonyosan huminsavas szorpcióból származnak.

Hogy miért nem jönnek létre a periódusos rendszerben látható és laboratóriumi kísérletekben a huminsavakon jól szorbeálódó kationokból sokkal gyakrabban jelentős koncentrációjú üledékes ércek, arra magyarázatképpen a legszebb példa maga az uránium és thorium esete. A szűk keresztmetszet a mobilizálásban, az őskőzetekből való oldódásban rejlik, nem pedig a huminsavak hiányában. Ha a természetes vizek a legkülönfélébb kationokból jelentős koncentrációkat tartalmaznának, beleértve a ritka elemeket és a ritka fémeket is, akkor valószínűleg minden tőzegtelep ezen elemeknek mind tudományos, mind gyakorlati szempontból rendkívül sokoldalú és értékes gyűjteménye lenne. Sajnos, a legtöbb elem előfordulásának gyakorisága (*Clarke*-szám) a természetben eleve kevés és az is jól be van ágyazva a kőzetek kristályszerkezetének matrixába, úgyhogy a természetes vizek csak lassan tudják kioldani. Kioldhatóság szempontjából az ion atomi sajátságai is döntően fontosak. Jellemző példa erre a $Th^{4+}$ geokémiai viselkedése. Míg az anyakőzetekben az $U^{4+}$-al együtt izomorf keverékben annál mintegy 3—5-ször nagyobb *Clarke*-számmal fordul elő, addig a biolitokban alig találkozunk vele, pedig a huminsavak geokémiai dúsítási tényezője a $Th^{4+}$-ra nézve cca 20 000-szeres, feltétlenül nagyobb, mint az uranyl-kationokra nézve. A két elem dúsulása közötti nagy különbség oka nem a humuszon való szorpcióban rejlik, hanem a vízben való mobilitásban. A kőzetek felületén az $U^{4+}$ ion a víz és oxigén hatására $U^{6+}$ kationná oxidálódik, amely a vízben uranyl-ion $(UO_2)^{++}$ formájában a legkülönbözőbb pH mellett rendkívül jól oldódik és nagy mobilitású. Ezzel szemben a $Th^{4+}$ nem oxidálódik 6 vegyértékű alakra és 4 vegyértékű alakja, hasonlóan az $U^{4+}$-hoz nagyon csekély mobilitású a természetben.

Nyilvánvaló, hogy a geokémiai dúsítási tényező sem elég nagy egyes elemeknél, pl. az alkáli fémeknél. Mindenekelőtt laboratóriumi kísérletekben meg kell határozni az összes kationokra a geokémiai dúsítási tényezőt. Ezután meg kell vizsgálni, hogy a természetben a vizekben milyen kationos alakban és milyen koncentrációs határok között migrál a kiszemelt kation. A természetes vizekben talált legnagyobb koncentráció szorzata a geokémiai dúsítási tényezővel adja meg a tőzegben várható maximális koncentrációt. Az új szempont szerint sok új kutatásra lesz szükség, amelyből munkatársaimmal csak a dúsítási tényező meghatározását végezhetjük.

Ha egy kis optimizmussal tekintünk előre a jövőbe, úgy látszik, hogy a biogeokémia az a tudományág, amelynek fontosságát, perspektívváját VERNADSZKY az elsők között ismerte fel, talán egy új irányban fog kibővülni. Az élő növény elpusztulása után is tovább hat a természet nagy geokémiai laboratóriumában, mert élettelen anyagának egy része, a huminsavak alakjában további új dúsulásokat hoz létre. Ezek felismerése terén megtettük az első kezdő lépéseket.

## Összefoglalás

Sikerült újabb bizonyítékokat találni arra a szerző által még 1951-ben végzett laboratórium szorpciós kísérletek alapján felállított elméletre, amely szerint az uránium dúsulása a biolitokban a huminsavakon történő kationkicserélős szorpciós megkötés következménye. ÉK-Magyarországon egy 15 000 $km^2$ területen, amelyik urándúsulásokat, érceket nem tartalmaz, a Zempléni-hegységben (andezit, riolit) és előterének kiterjedt pannon üledékes rétegeiben 800 vízmintát analizáltak meg. Maximálisan 100 mg U/tonna víz koncentrációt találtak. Ilyen vízbe porózus zacskóban tőzeget helyezve, rövidesen a biolitokban szokásos U-dúsulás lépett fel. Gránitból, andezitből mesterséges detritust készítve azt találták, hogy 2 g/liter $NaHCO_3$-at tartalmazó víz a gránitból közel 100 mg U/t koncentrációt old, az andezitből jóval (cca. 60-szor) kevesebbet. E kísérletek a laboratóriumban mért szorpciós izotermával jó korrelációt adnak és arra mutatnak, hogy a biolitokban észlelt U-dúsulások a természetben primer U-ércek nélkül is létrejöhetnek, a gránitból eredő finomabb szemcséjű detrituszrétegekből, a szénsavtartalmú vizek kioldó hatásán át. Geológusok a természetben is találtak ilyen frissen végbemenő dúsulásokat. ARMANDS, G., Svédországban a szerző által laboratóriumban mért dúsítási tényezővel (10 000:1) megegyezőt talált a természetben, egészen fiatal tőzeg és forrásvizek között.

A tőzeg huminsavtartalma az $(UO_2)^{++}$ kationon kívül egész sor más kationt is megköt, különböző dúsítási tényezővel. Nem különleges szelektív megkötésről van tehát szó, hanem kationcsere folyamatról, amelyik a huminsavakkal kapcsolatban egyes kationokra nézve a talajtanban már régen ismeretes, de nagy atomsúlyú és 2-4 vegyértékű kationok esetén nagy dúsítási tényezőt ad. E jelenség igen fontosnak látszik a geokémiában, de jelentőségének felmérése még sok kutatást kíván. A természetben a huminsavakon (tőzegben) dúsulásnak nemcsak a dúsítási tényező kis számértéke szab határt, hanem az elemek kation formában való oldhatósága, mobilizálása a kőzetekből. A nagyobb atomsúlyú nyomelemek koncentrációja igen kicsiny a természetes vizekben.

## SUMMARY

Additional experimental evidences are given in support of the theory of the geochemical enrichment of U by humic acids. The statistical distribution of 800 analysed water samples from 15 000 $km^2$ non uraniferous area of NE-Hungary demonstrated, that about 100 mg U/metric tons

of water occur sometimes in natural waters without the presence of primary U ores. Leaching experiments by water, containing 2 g $NaHCO_3$/litres on crushed granite and andesite resulted in about this maximum concentration from granite, but much less from andesite. These facts present a very good correlation with the U-sorption isotherms measured on peat. The measured enrichment factor of 10 000:1 is sufficient to explain the U-enrichment observed in bioliths. Experimental exposure of porous nylon bags filled with peat resulted in such natural waters in producing uraniferous peat. Such enrichments have been observed recently by geologists occurring freshly in Nature in our times. E. g. ARMAND, G., observed in northern Sweden fresh deposition of U in peat with an enrichment factor of 9000:1 from source waters in excellent agreement with the authors laboratory experiments.

The fixation of $(UO_2)^{++}$ cation by humic acids is not a specific, unic phenomenon. A number of other cations are similarly fixed, especially those of higher atomic weight and 2—4 valency. The fixation is a cation-exchange process and is actually identical with the exchange of cations by humic acids in the soil, already known in soil chemistry. The enrichment factor is pronounced for cations of higher atomic weight and valency. This phenomenon seems to be of outstanding general importance in geochemistry. It must be stressed however, that the bottleneck of this biogeochemical enrichment process is in the slow leaching, slow migration of the cations from the rocks and not in the sorption on humic acids.

## IRODALOM


[1] SZALAY, S., FÖLDVÁRI, A.: Kőzetek radiológiai vizsgálata, *Magyar. Tud. Akadémia Mat. és Term.-tud. Oszt. Közleményei,* **1**, No 1, 60—72. (1951).

[2] SZALAY, S.: Hazai kőszenek radiológiai vizsgálata, *Magyar Tud. Akad. Műszaki Oszt. Közleményei,* **5**, No 3, (1952).

[3] SZALAY, A.: The Enrichment of Uranium in Some Brown Coals in Hungary, *Acta Geologica Hung.* (Edit: Hung. Acad. of Sci.) Tom. 2. pp. 299—311. (1954).

[4] SZALAY, S.: Vizsgálatok nagy atomsúlyú kationok adszorpciójára humusz kolloidokon, *Magyar Tud. Akad. Mat. és Fiz. Oszt. Közleményei* **4**, 327—342, (1954).

[5] SZALAY, A.: The Role of Humus in the Geological Enrichment of U in Coal and Other Bioliths, *Acta Physica Acad. Sci. Hung.* **8**, Fasc. 1—2, pp. 25—36, (1957).

[6] SZALAY, A.: The Significance of Humus in the Geochemical Enrichment of Uranium, *2 nd U. N. Geneva Conf.* P/1731, Vol. 2, pp. 182—186 (1958) U. N. Geneva.

[7] HESS, F.: *Econ. Geol.* **9**, 686, (1914).

[8] VERNADSZKY, V. I.: *Geochemie in ausgewählten Kapiteln,* S. 267., Leipzig 1930. Akad. Verlagsges.

[9] FISCHER, F., und SCHRADER, H.: *Brennstoff-Chem.* *2*, 37 (1921).

[10] VERNADSZKY, V. I.: 8/loc. cit. S. 217., és *Izbrannüje szocsinenija,* I. köt. 189 és 210. old. IZDVO. A. Nauk, SzSzSzR, 1954.

[11] WAKSMAN, S. A.: *Humus,* p. XII., The Williams and Wilkons Company, Baltimore, USA., 1938.

[12] PUTNAM, P.: *Energy in the Future,* p. 126, 133. 260., D. Van Nostrand, New York (1953).

[13] WAY, J. T., J. ROY, *Agr. Soc. Eng.* **11**, 313 (1850) és J. ROY, *Agr. Soc. Eng.* **13**, 123 (1852).

[14] THOMPSON, H. S.: J. ROY, *Agr. Soc. Eng.* **11**, 68 (1850).

[15] BORROWMAN, G.: U. S. PATENT, **1**, 793, 670 (Febr. 24, 1931).

[16] WAKSMANN, S. A.: loc. cit. pp. 307—331.

[17] SCHEFFER, F. und ULRICH B.: *Humus und Humusdüngung. Lehrbuch der Agrikulturchemie und Bodenkunde,* III. Teil, Erster Band Ferdinand Enke Verlag, Stuttgart, 1960.

[18] GOLDSCHMIDT, V. M.: *Journ. of the Chem. Soc.* (London) **1**, pp. 655—678, (1937) Part I.

[19] MANSZKAJA SZ. M., DROZDOVA, T. V., EMELJANOVA, M. P.: GEOHIMIJA, No 4, 10—23, 1956.

[20] SZALAY, S.: Vizsgálatok Kelet-Magyarország vizeinek radioaktivitásáról, *Acta Univ. Debreceniensis,* Tom VII/2 pp. 45—51, 1961.

[21] *Proc. Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy* Vol. 6. (1955) Geneva, U. N.

[22] *Proc. Sec. UN. Nat. Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy,* Vol. 2. (1958). Geneva U. N.

[23] SAUKOFF, A. A.: *Proc. Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy* Vol. 2. (1958) Geneva, U. N. P/626 pp. 756—759.

[24] SZALAY, S., SCHERF, E.: *ATOMKI Közlemények,* **2**, Nr. 2, pp. 71—107. (1960).

[25] SCHERF, E., MESZÉNA, GY.: *ATOMKI Közlemények,* **2**, Nr. 2. pp. 109—144., 1960.

[26] HORVÁTH, E.: *ATOMKI Közlemények*, **2**, Nr. 2, pp. 177–183 (1960).
[27] VINE, J. D.: *Geology of Uranium in Coaly Carbonaceous Rocks*, Geol. Survay Profess. Paper 356-D. U. S., Government Printing Office, Washington, 1962.
[28] ARMANDS, G.: *Geochemical Prospecting of a Uraniferous Bog Deposit at Masugnsbyn*, Northern, Sweden, Publ. No. AE-36, AB Atomenergi, Stockholm, 1961.
[29] HORVÁTH, E.: Doktori értekezés, *ATOMKI Közlemények*, megjelenés alatt.
[30] BRÜCHER, E.: *ATOMKI Közlemények*, **3**, No. 1., 11, 1961.
[31] STADNIKOFF, G., und KORSCHEW, P.: Zur Kenntnis der Huminsäuren, *Kolloid Ztschr.* **47**, 136–141, (1929); *Kolloid Ztschr.* **71**, 206–214, (1935).
[32] KAWAMURA, K.: Adsorption by humic acid. *Journ. Phys. Chem.*, **30**, 1364–1388, 1930.
[33] CSUVELOVA, E. A., NAZAROV, P. P., CSMUTOV, K. V.: *Zs. fiz. him.*, XXXVI. 825, 1962.
CSUVELOVA, E. A., NAZAROV, P. P., CSMUTOV, K. V.: Zs. fiz. him., XXXVI. 1378, 1962.
[34] GOLDSCHMIDT, V. M.: Rare Elements in Coal Ashes, *Indust. Eng. Chem.* **27**, 1100, 1935.
[35] MANSZKAJA, SZ, M., DROZDOVA, T. V., KRAVCOVA, R. P., TOBELKO, K. I.: *Geohimija*, No. 5. 433–439, 1961.
[36] SZABÓ, I.: Kationok adszorpciója humusz preparátumon, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **8**, 393, 1958.
[37] SZALAY, S., SZILÁGYI, M.: Vizsgálatok egyes uránhasadási termékek adszorpciójára humusz preparátumon, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **11**, 47, 1961.
[38] SZALAY, S., SZILÁGYI, M.: Investigations Concerning the Retention of Fission Products on Humic Acids, *Acta Phys. Hung.* **13**, 421, 1961.
[39] GOLDSCHMIDT, V. M.: *Journ. of the Chem. Soc.* (London) p. 671. 1937, Part. I.

(Beérkezett: 1963. III. 9.)

# INFINITÉZIMÁLIS MÓDSZEREK PASCAL MATEMATIKÁJÁBAN

Írta: VEKERDI LÁSZLÓ

MADAME PÉRIER — Pascal nénje — és MARGUERITE PÉRIER — unokahúga[1] — megegyezően mondják el PASCAL matematikához való „visszatérését". És mivel PASCAL életére vonatkozóan lényegében még ma is erre a két forrásra vagyunk utalva, az infinitézimális matematika, mint fogfájás elleni gyógyszer, klasszikus receptté vált a matematikatörténeti anekdoták iránt érdeklődő matematikusok körében.

MADAME PÉRIER leírása szerint öccsét, aki az 1654-es megtérése óta kizárólagosan vallási kérdésekkel foglalkozott, 1658 elején sajnálatos módon kezdte gátolni ebben az üdvös foglalkozásában betegsége. „Öcsém bajainak ez a kiújulása — írja — fogfájással kezdődött, ami teljesen meggátolta az alvását. De hogyan lehetne ébren egy olyan szellem, mint az övé, anélkül, hogy gondolkozna valamin. Ezért jutott eszébe az egyébként oly gyakori és kimerítő álmatlanságaiban egy éjjel valami a roulette-el kapcsolatban. Az első gondolatot második követte, a másodikat harmadik és végül egymást váltó gondolatok sokasága; s ezek, mintegy akarata ellenére, úgy-

[1] A PASCAL család a francia közéletben a XVII. század eleje óta egyre nagyobb szerepet játszó „hivatalnok nemesség" közé tartozott. BLAISE PASCAL születésének idején (1623) apja, ÉTIENNE PASCAL a clermont-i *Cour des Aides* elnöke volt. A kisfiú korán elveszíti anyját, s innentől kezdve apja részesíti rendkívül gondos, elsősorban a matematika és természettudományokra kiterjedő nevelésben. ÉTIENNE PASCAL 1631-ben három gyermekével Párizsba költözik. A legidősebb, GILBERTE, a későbbi Madame PÉRIER, ekkor 11 éves, a legkisebb, JACQUELINE hat, BLAISE, a két lány közötti egyetlen fiú, nyolc. A harmincas évek Párizsa páratlan méretű társadalmi kohó, ahol spontán alakuló és egymással több-kevesebb összefüggésben levő csoportokban mintegy kikísérleteződnek az újkori szellemi élet szervezeti formái. A szalón, az akadémia, a természettudományos és matematikai társaság és a szabadgondolkozó költőfilozófusok cabaret-klubjai a legfontosabbak ezek között a csoportosulások között. ÉTIENNE PASCAL elsősorban a MERSENNE atya körül összegyűlő természettudósokkal és matematikusokkal van jóban, de bejáratos a kalandos életű Mme SAINCTOT-hoz is, akinek a testvére, CHARLES VION DALIBRAY, a cabaret költők egyik legjellegzetesebb képviselője. DALIBRAYval és barátjával, LE PAILLEUR-rel BLAISE PASCAL később is jóban marad, hiszen pl. meghívja őket arra a nevezetes látogatásra is, amivel 1647 nyarán az éppen Párizsban tartózkodó DESCARTES tiszteli meg a két testvért, BLAISE-t és JACQUELINE-t, akik ekkor éppen BLAISE légnyomás-kísérleteit rendezik sajtó alá, s szenvedélyesen tanulmányozzák azt a vallási-világnézeti irányt, aminek nemrégiben az egész PASCAL család, de a francia hivatalnok nemesség nagy része is egyre inkább, a hívévé vált: a jansenizmust. BLAISE életét ettől kezdve a természettudomány, a matematika, a jansenizmus, JACQUELINE, a mély hit és az elegáns, nagyvilági élet ma már teljessséggel kibogozhatatlan keveredése determinálja. Keveredés, amely néhol már olyan tökéletes, hogy a szintézis látszatát kelti, de ez a szintézis mindvégig látszat marad, amin átütnek újra és újra az ellentétes tendenciák. Ez az ötvenes évek nagy műveinek a jellegzetessége és háttere. A PASCAL család azonban, amelyik a politikai reményeit vesztő hivatalnok nemességgel együtt egyre inkább áldozatul esik a megmerevedő, bigottá váló jansenizmusnak, PASCAL műveit és életét a szekta igényeinek megfelelően fésüli át. GILBERTE leánya, MARGUERITE PÉRIER, aki gyermekkorától a nagy jansenista apácakolostorban, Port Royal-ban nevelkedett, úgy él és ír, mint egy XII. vagy XIII. századi apáca. BLAISE életéről szóló leírása a borzalmas és realista részletek, a vakhit és a babona által átszőtt, jellegzetes „középkori" apáca krónika.

hogy még sajátmaga is meglepődött rajta, feltárták előtte a roulette bizonyítását. De mivel minden ilyesmiről már régen lemondott, nem is gondolt rá, hogy valamit is leírjon belőle. Mégis beszélt róla egy olyan személynek, akinek teljes tisztelettel tartozott, mind érdemeit illetően, mind az általa mutatott vonzalom elismeréseképpen, és ez a személy olyan tervet formált erről a felfedezéséről, ami csupán Isten dicsőségét tartotta szem előtt, és rávette öcsémet, hogy írjon csak le mindent, ami erről eszébe jut, és nyomtattassa ki."[2]

Ugyanígy, de a kegyes körítés helyett realista részletekkel gazdagon mondja el a történetet Marguerite, és megnevezi a „magas személyt" is: „M. de ROANNEZ jött látogatni és azt találva, hogy semmi baja sincs, megkérdezte, mitől gyúgyult meg. Azt felelte, hogy a roulette-től, amin a fejét törte, s amit megtalált. M. de ROANNEZ meglepődve ezen a hatáson, de magán a dolgon is, mert tudta, milyen nehéz probléma az, megkérdezte, mi vele a szándéka. Nagybátyám azt felelte, hogy ez pusztán gyógyszerként szolgált neki, és semmi másra nem akarja használni. M. de ROANNEZ azt felelte erre, hogy jobb hasznát is lehetne venni ennek; hogy az atheisták leküzdésére irányuló igyekezetükben jól meg lehetne mutatni ezáltal, hogy a geometriát és a bizonyítás alá eső dolgokat tekintve is többet tud, mint ők együttesen; és így, ha a hit kérdéseiben engedelmeskedik, az azért van, mert tudja, meddig érnek a bizonyítások, és azt tanácsolta neki, hogy helyezzen letétbe 60 pistole-t és hirdessen versenyt minden kitűnő matematikus között, akit csak ismer és ajánlja fel a nyereséget annak, aki megtalálja a probléma megoldását. M. PASCAL így tett, és letétbe helyezett 60 pistole-t M. de CARCAVY-nál, aki az egész Európából érkezendő pályamunkák egyik elbírólájává neveztetett ki, és a határidőt 18 hónapban tűzte ki."[3]

Próbáljuk megérteni először is a két elbeszélés tendenciáját. A Pascal család szemében PASCAL főműve a *Pensées* volt, s ez a nagy apologetikus mű az ő szemükben sajnálatos módon befejezetlen maradt, s elsősorban ezt a töredékességet kellett valahogyan megmagyarázni. „Gyengélkedései voltak azok, amik meggátolták abban, hogy tovább dolgozzon tervén" írja Mme PÉRIER. Olyan súlyos beteg lesz — írja —, hogy miután egy évet (1657—58) dolgozott a nagy művön, gyakorlatilag semmit sem képes többé végezni. Tudományra — világi hívság — természetesen már régen nem is gondol, de betegsége és súlyos álmatlansága addig fokozódik, hogy egy fogfájásos éjjel hirtelen, saját akarata ellenére eszébe jut a ciklois-probléma és megoldja. Közlésre — világi hiúság — természetesen nem is gondol, hiszen az egész csak „gyógyszer" volt számára, de barátja, akinek hálával és tisztelettel tartozik, s aki nem más, mint ROANNEZ herceg, Poitou kormányzója, rábírja a kiadásra: végül is Isten dicsőségére szolgál az, ha egy odaadó híve old meg olyasmit, amin a világ legnagyobb matematikusai hiába törték a fejüket. A tendencia nyilvánvaló: a mélyen vallásos Pascal család szemében a *Pensées* szigorú apologetikája után PASCAL matematikai hattyúdala kellemetlen zavart jelentene, tehát deus ex machina-val át kell siklani rajta. Ennél súlyosabb dolgokat is tett a Pascal család a geniális matematikus ellen; egyik matematikai főműve, amit még LEIBNIZ látott kéziratban, s sajnos visszaadott a családnak, eltűnt a kezük között.

[2] *La vie de Monsieur Pascal érite par Madame Périer, sa soeur, femme de Monsieur Périer, conseiller de la Cour des Aides de Clermont.* — Oeuvres completes de Pascal, édition Pléiade. Texte étebli et annoté par Jacques Chevalier. Paris 1954 (továbbiakban: Éd. Pléiade) 3—34, 19.

[3] *Mémoire sur la vie de M. Pascal. Écrit par Mademoiselle Marguerite Périer, sa niece.* — Éd. Pléiade 35—41, 40.

A különösebb inkább az, hogy a történészek máig mennyire hatása alatt állanak MADAME és MARGUERITE PÉRIER kegyes elbeszéléseinek. Még PASCAL életének olyan kitűnő ismerője is, mint JEAN MESNARD, törést lát 1658-ban PASCAL fejlődésében, amit 1659-ben egy újabb „megtéréssel" kellett a világi hívságba visszaeső PASCALnak kompenzálnia. Ez az újabb „megtérés" azért vált szükségessé, mert az 1658-as év matematikai műveinek — nevezzük továbbiakban rövidség kedvéért *Roulette-leveleknek* — a hangját mindennek lehet nevezni, csak keresztényi alázatnak nem. A Pascalok érthetően igyekeztek átsiklani e felett a számukra kellemetlen tény felett, de MESNARD-t már nem köti a családi és a jansenista diszkréció. „Látjuk, amint ellenfeleit piszkolja — írja Mesnard — amint hevesen reagál a legkisebb ellentmondásra, amint olyan versenyt tűz ki, ami azt hivatott kimutatni, hogy egyetlen európai tudós sem képes versenyezni vele. Úgy rendezi a dolgot, hogy a lehető legkisebbre csökkentse versenytársai esélyeit és minden megoldási kísérletet, amit elküldhettek neki, eleve félvállról kezel. Visszatért belé a gőg."[4]

De a *Roulette-levelekben* nem ez a „gőg" és sértő hang a legfeltűnőbb, ez nem hiányzik PASCAL vallásos írásaiból sem. S egyébként is a kor egyházi vitairodalmán edzett füleinek a *Roulette-levelek* sértő kitételei nem lehettek szokatlanok. S végül — ami a legfontosabb — Pascal az 1658-as matematikai kutatásaival párhuzamosan *folytatja* teológiai és egyházpolitikai harcait is, gyakorlati síkon a jezsuiták, elméleti téren a kálvinizmus ellen. A *Roulette-levelekben* nem a „gőg, még nem is a vitatkozókedv a legfeltűnőbb, hanem az, hogy éppen olyan céltudatos és jólszervezett propagandakampány benyomását keltik, mint az 1656-ban a jezsuiták ellen indított *Vidéki levelek.*[5] A *Roulette-levelekben* is teljes harci aktivitásában látjuk Pascalt, félelmetes vitakészsége csúcsán. S így egyszerre más megvilágításba kerülnek a *Roulette-levelek.* Nem egy haldokló nagybeteg fájdaloműző foglalkozását tükrözik többé, de nem is egy világi „gőgbe" visszaeső vallásos lélek válságát. A *Roulette-levelek* jelentését nem elég Pascal biografikus adatai és pszihológiája felől vizsgálni, meg kell kísérleni kibontani a mű tudományos és tudománypolitikai *környezetét* is. Ezt kísérli meg a jelen tanulmány.

1658-ban a ciklois-kérdés már nagyon régi. Magát a görbét[6] — amit az egyenesen legördülő kör egy pontja ír le — már a XVII. század elején vizsgálta GALILEI,

[4] MESNARD, Jean: *Les conversions de Pascal* — Blaise Pascal, l'homme et l'oeuvre. Cahiers de Royaumont. Philosophie № I. Paris 1956 (továbbiakban: P, CR.) 46—77, 60.

[5] *Les Provinciales ou les Lettres écrites par Louis de Montalte, à un Provincial de ses amis, et aux RR. PP. Jésuites: sur le sujet de la Morale et de la Politique de ces Pères.* Cologne 1657 — Éd. Pléiade 567—904. Az ötvenes évek során jezsuiták és jansenisták elkeseredett harcot vívnak a vezetőszerep megszerzéséért a kialakuló abszolutisztikus monarchiában. A harc ideológiai téren a kegyelemtan bizonyos tételei körül koncentrálódott, amiket az Egyház JANSENIUS tanításában eretneknek nyilvánított. A jansenisták vezetője, a „nagy ARNAULD" úgy próbál kisiklani az eretnekség vádja alól, hogy a pápa kiátkozáshoz való *jogát* elismeri, de tagadja, hogy a rekriminált tételek *tényleg* benne vannak JANSENIUS művében. PASCAL a *Vidéki levelekben* az ARNAULD álláspontjának a népszerűen megírt védelmét vállalja, miután ARNAULD védekezése a Sorbonne előt elbukott. PASCAL azonban messze túllát ARNAULD jogászi ügyeskedésén, a *Vidéki levelek* egyre inkább elegáns, világos, nagyvilági stílusban megírt moralizáló esszék lesznek, teológiai tekintetben pedig elhajlanak a hivatalos jansenista ideológiától a tradicionális, thomista felfogás felé.

[6] Görbék mozgások összetételéből való származtatása nem új, jól ismeri már a görög matematika is, de csak mint a kör és egyenes geometriájából adódó problémák — pl. kockamegkettőzés, körkvadratúra, szögharmadolás — segédgörbéivel foglalkozott velük. A XVII. században a mozgásösszetevésből származó görbék, közöttük a ciklois, vagy ahogy a generálására célozva nevezték, *roulette,* az érdeklődés központjába kerülnek. DESCARTES a mozgásösszetevés által generált görbék között elkülönít egy nagy csoportot, amelyikbe tartozó görbék minden egyes pontja véges

s a harmincas évek közepén az akkor éppen GALILEI műveivel foglalkozó MERSENNE atya körkérdést intézett leveleiben a francia matematikusokhoz a görbe jellegére, ívhosszára és a görbe alatti területre vonatkozóan. Bizonyos részletkérdésekre adott is valamiféle megoldást[7] a College de France matematikaprofesszora, GILES PERSONNE (1602—1672), vagy ahogy szülőhelyéről nevezte magát, ROBERVAL. Ez a megoldás nehézkes, mechanikus, inkább csak intuitive megsejtett, semmint bizonyított volt. Nem is mulaszthatta el ROBERVAL nagy ellenfele, DESCARTES, hogy egy ragyogó, egyszerű bizonyítással meg ne szégyenítse a hivalkodó párizsi professzort, aki élete egyik főfeladatának tekintette a hollandiai filozófus bosszantását.

1658-ban DESCARTES már nyolc éve halott, de híre egyre nő, nemcsak Hollandiában és Angliában, Párizsban is. Akadnak lelkes hívei a jezsuiták és a bencések között is, sőt, maga a jansenisták vezére a „nagy ARNAULD" is vonzódik bizonyos tanításaihoz. Csak két hely van Párizsban, ahol maradéktalanul ellenségei DESCARTES-nak: Mme de SABLIÈRE kényeskedő szalonja és a College de France. Mme de SABLIÈRE szalonjában DESCARTES régi ellenfelének, GASSENDInek a hívei uralkodnak és LA FONTAINE gúnyolja DESCARTES tanait az állatok és emberek közötti kölönbségről. A College de France-ban ROBERVAL gyaláz mindent, amit valaha is tanított DESCARTES.

ROBERVAL egyébként másokat is támadott, ha nem is olyan lelkesen mint DESCARTES-ot, ugyanis akárhová nézünk a XVII. század két középső negyedében, mindenütt ott látjuk ROBERVALt, prioritási harcokba keveredve. ROBERVAL rakoncátlankodását egyes történészek azzal magyarázzák, hogy három évenként egy-egy új felfedezéssel kellett megvédenie tanszékét, s így a közbeeső felfedezéseit a védelemre tartogatva, mások megelőzték. Azonban DESCARTES-al szembeni viselkedését semmiképpen sem lehet „önvédelemmel" magyarázni, s a prioritás-igényeit is alaposabban át kellene nézni ahhoz, hogy legalábbis részben jogos voltuk felől dönthessünk. Később egyébként sem szorult már tanszéke periodikus védelmére, s azért nem lett semmivel sem barátságosabb. ROBERVAL mindenütt támad, ahol a francia, közelebbről a köréje tömörülő párizsi matematikusok érdekeit sértve látja. Ebben a tekintetben hasonlít a viselkedése a JOHN WALLISéhoz[8], aki az angol matematikának tesz hasonló „szolgálatokat".

BLAISE PASCALnak még atyai jóbarátja ROBERVAL. Blaise apja, ÉTIENNE PASCAL még első párizsi tartózkodása alatt, a harmincas években köt vele szoros barátságot, s már együtt harcolnak a MERSENNE atya körül kialakuló kis tudóscsoport tagjaiként bizonyos, a csoporton kívül álló matematikusok által képviselt nézetek ellen. ÉTIENNE PASCAL és ROBERVAL kooperációja később átöröklődik a fiúra, s

---

algebrai egyenlettel adható meg, s rendszeres vizsgálataiban csak ezekre a görbékre szorítkozik. A nem ide tartozó görbékkel — amiket mechanikusoknak nevez — csak átmenetileg foglalkozik leveleiben. PASCAL nem tesz ilyen különbséget a görbék között. Az ő számára egy görbét nem a generáló mozgás, hanem két egyeneshez, a „bázishoz" és a „tengelyhez" való viszonya jellemez.

[7] ROBERVAL egy megfelelő módon definiált görbe — compagne de la cycloide, a mai sinusgörbe — segítségével határozza meg a ciklois területét, teljesen a CAVALIERI-féle indivisibiliamatematika szabályainak megfelelően. L. MORITZ CANTOR: *Vorlesungen über Geschichte der Matematik,* Zweiter Band. Erster Halbband, von 1200—1650. Leipzig [2]1899 (továbbiakban Cantor II) 878—880.

[8] JOHN WALLIS (1616—1703) foglalkozására nézve anglikán teológus volt, a restauráció után királypárti érzelmeinek jutalmaképpen II. Károly káplánja, majd püspök lett. A forradalom alatt az oxfordi egyetemen tanított, egyik alapító tagja a Royal Society-nek. Ahol csak alkalma nyílott rá, erélyesen — és többnyire igazságtalanul — védte az angol matematikusok prioritás-igényeit.

meglepő, milyen állhatatosan és hűséggel védi mindenütt BLAISE a ROBERVAL igazát, ott is, ahol a mérges professzornak — mi előttünk nyilvánvalóan — nincs igaza. Pl. a parabola és a spirális ívhosszáról írott értekezésében, ahol az itáliai matematikusok ROBERVALéval azonos, de sokkal korábbi eredményeit még csak meg sem említi[9].

A roulette versenyt lezáró vitában is PASCAL metsző gúnyja elsősorban ROBERVAL két ellenfele ellen irányul. Az egyik, LALOUÈRE Toulouse-i jezsuita professzor, azt „merészelte" állítani, hogy ugyanarra az eredményre jutott, de jobb módszerrel, mint ROBERVAL. A másik, JOHN WALLIS pedig ugyanazzal a módszerrel kapott az 1655-ben megjelent *Arithmetica infinitorum* c. művében sokkal általánosabb eredményeket, amelyik módszerrel ROBERVAL és FERMAT már hosszú évek óta dolgoztak, de eddig még csak az eredményeiket tették közzé. LAOUÉRE és WALLIS megsemmisítésén kívül a versenyt lezáró vitalevelek feladata a TORICELLI ROBERVALlal szembeni jogos prioritás-igényének a cáfolata és DESCARTES érdemeinek az elkendőzése volt. Őket úgyszólván teljesen kiirtja a ciklois-probléma előtörténetéből. A verseny résztvevői közül pedig egyedül WREN munkája iránt tanúsít megértést, de a WREN által beküldött pályamű nem a kitűzött kérdésekre adott válasz volt, s egyébként is WREN antik módszert alkalmazott, s nem az új, Itáliából elindult indivisibilia-módszert, amivel ROBERVAL és PASCAL dolgoztak, s aminek a teljesítőképességét és francia eredetét voltak hivatva igazolni a *Roulette-levelek*. Mert ezek az írások a ciklois ürügyén voltaképpen ezt a Roberval—Pascal-féle módszert védik mások jogos vagy jogtalan prioritás-igényeivel szemben.

A XVII. század egyik legtöbbre tartott, legféltettebb „szellemi tulajdona" ugyanis a módszer volt. Csalhatatlan módszereket dolgoztak ki az üdvözüléstől a szerencsejátékig, a drámaírástól az ABC tanításáig mindenre. S az a módszer, amit a *Roulette-levelek* ROBERVAL és PASCAL számára szeretnének biztosítani, semmiképpen sem nevezhető — ez már abban a korban világosan látszott — az ő tulajdonuknak. Hosszú fejlődés eredménye, amiben többek között TORRICELLI[11] és mesterei: GALILEI és CAVALIERI[12], továbbá DESCARTES és JOHN WALLIS is fontos szerepet játszottak. Ebben a fejlődésben az újkori matematika egyik leghatalmasabb eszközének, az infinitézimális módszernek a megszületését lehet nyomon követni. PASCAL propagandájának genialitását mi sem bizonyítja jobban, minthogy a legutóbbi időkig éppen a *Roulette-leveleket* tartották az első „integrálszámításról szóló értekezésnek."[13]

[9]. *Lettre de A. Dettonville a Monsieur A. D. D. S. en lui envoyant la démonstration a la manière des anciens de l'égalité des lignes spirale et parabolique.* — Éd. Pléiade 313—327, 313—314.

[10] Sir CHRISTOPHER WREN (1632—1723) építész, matematikus és csillagász, a restauráció korabeli London városképének a legfőbb kialakítója. Mint matematikust, a ciklois rektifikációja tette híressé, ami iránt PASCAL is elismeréssel adózott, s nem maradt rá hatás nélkül. L. Derek T. WHITESIDE: „Wren, the mathematician" *Notes and Records of the Royal Society* **15** 107—111, 1960.

[11] EVANGELISTA TORRICELLI (1608—1647) a XVII. század második negyedének egyik legjelentősebb matematikusa is. Működése mint kísérletezőnek, fizikusnak és matematikusnak egyaránt számos ponton érintkezik a PASCALéval és ROBERVALéval, s ez önmagában véve is kiindulópontot jelentett prioritás-vitákra, amit még fokozott, hogy a TORRICELLI módszereihez csatlakozó WALLIS „védelmébe vette" mesterét ROBERVAL—PASCAL igényeivel szemben.

[12] BONAVENTURA CAVALIERI (1598?—1647) GALILEI tanítványa, a GALILEI után fellendülő új itáliai matematikai fejlődés egyik elindítója és legnagyobb hatású mestere. 1621 és 29 között készült, 1635-ben megjelent műve, a *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* a XVII. század új infinitezimális módszereinek első összefoglalása.

[13] Például ÉMILE PICARD: „C'est le premier Traité de calcul intégral" cit. J. Chevalier, Ed. Pléiade 175.

Óvatosabb matematikatörténészek inkább szerettek „Integrálszámítás előtti integrálásról"[14] vagy indivisibilia-matematikáról beszélni. Az elnevezéseknél és dicsérő jelzőknél azonban súlyosabb hiba volt az, hogy az egész módszert sajnálatos módon „végtelen kicsi" elemekből összetevődő véges összeg előállításaként értették félre a matematikatörténészek[15], míg A. KOYRÉ egy alapvető tanulmányában meg nem magyarázta, hogy éppen ellenkezőleg, CAVALIERI indivisibiliageometriájában az ez ellen való tiltakozásról van szó.[16] CAVALIERI módszerének a lényege nem „végtelen sok" „végtelen kicsi" elem „összegezése", hanem az antik, *reductio ad absurdum*ra alapuló kimeríthetetlenségi elv megkerülése[17]. CAVALIERI a síkalakzatokat párhuzamos egyenesek halmazának (*aggregatum*) tekinti, nem összegének. Két ilyen halmaz kétféleképpen hasonlítható össze, *collective, hoc est comparando aggregatum ad aggregatum,* és *distributive, sc. comparando sigillatim quamlibet rectam figurae ABCcba ... cuilibet rectae figurae EFGefg ... in direction existenti.*[18] Azaz, ha két alakzat azonos irányban vett elemei között kölcsönösen egyértelmű megfelelkezés állapítható meg, a két alakzat egészében is megfelel egymásnak. Az indivisibilia módszerben kontinuum számosságú halmazok összehasonlításáról van

[14] Vö. ZEUTHEN, H. G.: *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert,* Leipzig, 1903, 248—300.

[15] Vö. Cantor II 877: Cavalieri betrachtete die Indivisibilien jeder Oberfläche nach Maassgabe unendlich vieler Linien, die eines Körpers nach Maassgabe unendlich vieler Flächen, und deshalb wurden Vorwürfe gegen Cavalieri erhoben, als meine dieser, die Oberfläche, der Körper beständen wirklich aus Linien, aus Flächen. — CANTOR ezzel a kifogással a kortárs-matematikusokra, elsősorban ROBERVALra utal, de modern matematika történészek sem mindig mutatnak mélyebb megértést CAVALIERI munkája iránt, mint ROBERVAL. Vö. pl. PIERRE HUMBERT: *Cet effrayant génie ... L'oeuvre scientifique de Blaise Pascal,* Paris 1947, 216: Cavalieri considérait les lignes, les surfaces et les volumes comme décomposables en une infinité d'éléments qu'il appelait indivisibles: une ligne était une accumulation de points, une surface une accumulation de droites, un volume, une superposition de plans. Telle qu'elle était ainsi proposée, l'idée était fausse, car il est bien évident qu'en entassant les uns sur les autres des plans, dont par définition l'épaisseur est nulle, on n'obtiendra jamais un volume d'épaisseur non nulle: accumulez zero, cela donnera toujours zero. — Ez az idézet nemcsak azért érdekes, mert bizonyítja a tévedések szívós életét (ROBERVAL-HUMBERT: 300 év), hanem azért is, mert a második mondat, amiben HUMBERT az indivisibiliamatematikát — ti. amit ő annak tart — kritizálja, éppen az indivisibilia módszer egyik alapelve. Végtelenül vékony elemek összegezésének érti félre *Cavalieri* módszerét még OTTO TOEPLITZ is, *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung.* Berlin—Göttingen—Heidelberg 1949, 57. — Érdemes kiemelni viszont, milyen tisztán látta már 1912-ben *Cavalieri* módszerének lényegét LEON BRUNSCHVICG: L'essentiel de la méthode est dans la comparaison des elements générateur, qui permet de traiter chaque figure, plane ou solide, " in ratione omnium suorum indivisibilium collective et (si in iisdem reperiatur una quaedam communis ratio) distributive ad invicem comparatorum". Si l'on fait de plus appel à la considération de leur infinité, c'est uniquement afin de ne pas avoir à tenir compte de leur nombre. LEON BRUNSCHVICG: *Les etapes de la philosophie mathématique,* Paris 1912, 166).

[16] KOYRÉ, A.: *Bonaventura Cavalieri et la géometrie des continues* — Évantail de l'histoire vivante. Hommage a Lucien Febvre I—II. Paris 1953, I 319–340.

[17] Az antik kimerithetetlenségi módszer jó összefoglalása található pl. B.L. van der WAERDEN: *Erwachende Wissenschaft,* Basel und Stuttgart 1956, 304—306, és főleg E. J. DIJKSTERHUIS: *Archimedes,* Copenhagen 1956, 130—133. DIJKSTERHUIS interpretációját foglalja össze és teszi modern matematikai logikai aparátussal könnyen hozzáférhetővé WHITESIDE alább idézett monográfiája.

[18] Kollektive, azaz halmazt halmazhoz hasonlítva, és disztributive, ti. adott irányban összehasonlítva *ABCcba* alakzat egy tetszőleges egyenesét ... *EFGefg* alakzat egy tetszőleges egyenesével. cit.: WHITESIDE, Derek Thomas: Patterns of Mathematical Thought in the Later Seventeenth Century." — *Archive for History of Exact Sciences* 1 (1961) 179—388 (továbbiakban: WHITESIDE), 313.

szó, s ezért nincs szükség határátmenetre. Az exhaustios eljárás és a limes módszer megbontja a kontinuumot, mert a természetes számok sora szerint rendezhető értékekkel közelít meg egy soha el nem érhető, ill. a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ összefüggésben egy pontosan definiált matematikai szerkesztés eredményeként adódó határértéket. CAVALIERI, a kontinuum számosságú halmazokban maradva, elkerüli ebből a kétféle — görög és modern — aritmetizációból adódó nehézségeket.

Ezt nem értették meg a matematikatörténészek, s ezért értették félre, egy helytelenül alkalmazott görög vagy modern eljárásnak, az indivisibiliamatematikát. PASCAL azonban tökéletesen tisztában volt az indivisibiliamatematika lényegével. Az aritmetikai háromszög problémaköréből kinőtt *Potestatum numericarum summa*ban pontosan az indivisibilia elmélet szellemének megfelelően adja meg az egész számok hatványai között talált összefüggésekből a folytonos mennyiségek között fennálló analóg összefüggésekre való áttérés szabályát. Az elv, amely a diszkontinuus mennyiségekről a folytonos mennyiségekre való áttérést lehetővé teszi az, hogy „bármely számban is adunk folytonos mennyiségeket egy náluk magasabbrendű folytonos mennyiséghez, utóbbin azok semmit sem növelnek. Így pontok a vonalhoz, vonalak a felületekhez, felületek a testekhez semmit sem tesznek hozzá: vagy hogy számokról szóló traktátushoz jobban illő szavakat használjak, semmit sem tesznek hozzá a gyökök a négyzetekhez, a négyzetek a köbökhöz, köbök a kvadratokvadrátokhoz. Úgyhogy az alacsonyabbrendű mennyiségeket, mint nulla értékkel rendelkezőket, nem kell tekintetbe venni. Fentieket, amik az indivisibilia elméletben járatosak előtt jól ismertek, azért fűztem hozzá, hogy kitűnjön ebből a példából, amelyben a folytonos mennyiségek dimenzióival való számolást az egész számok hatványainak az összegéhez lehet kapcsolni, hogy látszólag legtávolabb eső dolgokat hogyan fűz egybe az egységet kedvelő természet."[19]

A példa, amit az idézett szöveg említ, pár sorral feljebb olvasható, s nem egyéb, mint az akkor már jól ismert parabolakvadtarura általánosítása:

„A vonalak összessége úgy aránylik legnagyobbikuk négyzetéhez, mint ......1:2.
A vonalak négyzeteinek az összessége úgy aránylik a legnagyobbikuk köbéhez, mint ........................................................................1:3.
A vonalak köbeinek az összessége úgy aránylik a legnagyobb negyedik hatványához, mint ........................................................................1:4.

Tetszőleges fokú vonalak mindjének az összessége (*summa omnium*) úgy aránylik a legnagyobbjuk közvetlenül következő magasabb fokához, mint az egység eme magasabbfokú vonal kitevőjéhez."[20]

A mi jelölésünkben:

$$\frac{\int_0^x x^n dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

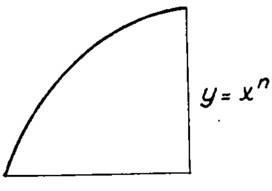
Azonban a mai formulák alkalmazása csak a megértés gyorsabbá tételére jó, a „summa omnium" nem $\int$ és a formula indoklásában nem összegezés, hanem

[19] *Potestatum numericarum summa* — Éd. Pléiade 166—171, 171.
[20] Uo. 171.

4*

az az analógia szerepel, amit PASCAL az aritmetikai háromszög segítségével egész számok sorainak a hatványaira talált. Pl. a négyzetre emelés esetében: „Természetes számok bármely számmal kezdődő sorában az utolsó tagot közvetlenül követő szám négyzetéből levonva a legkisebb tag négyzetét és a tagok számát, az eredmény egyenlő lesz a tagok összegének a kétszeresével."[21] Pl. ha a kérdéses számsor 5, 6, 7, 8, akkor $9^2-5^2-4=2\cdot(5+6+7+8)$.

Innen az indivisibiliamatematika fent megadott elvei szerint a parabolák kvadratúrájánál, mivel itt a „tagok összegé"-nek (*aggregatum ex omnibus*) maga a parabola alatti terület felel meg, s a vonalak négyzetéhez képest első hatványukat nem kell figyelembe venni, azonnal megkapjuk a másodfokú parabolára fent megadott szabályt.



*1. ábra*

Az egész számokra kapott eredmények kontinuumra való alkalmazását tehát a végtelenek „hierarchiája" tette lehetővé, aminek a felfedezését a matematika- és filozófiatörténészek egészen a legutóbbi időkig PASCALnak tulajdonították, holott maga PASCAL hangsúlyozta, hogy *quantum haec notitia ad spatiorum curvilineorum dimensioines conferat, satis norunt qui in indivisibilium doctrina tantisper versati sunt.*[22] A. KOYRÉ vette észre először, hogy PASCAL itt megelőző matematikusok munkájához kapcsolódik. „Ami az egész számok hatványainak az összegezése és az indivisibilia (folytonos mennyiségek) összegezése kötötti összefüggést illeti — írja KOYRÉ —, ez kétségkívül kevésbé ismert ügy volt, és sokkal újabb, de éppen ez alkotja az alapját FERMAT és ROBERVAL munkáinak, akinek a hatása úgy látszik felváltja PASCALnál DÉSARGUES hatását."[23]

Az egész számok hatványösszegei és a folytonos mennyiségek hatványai közötti párhuzam képezte azonban nemcsak FERMAT és ROBERVAL, hanem még inkább WALLIS munkájának az alapjait is. WALLIS *Arithmetica infinitorum*-át FERMAT és ROBERVAL jól ismerték, s régóta vitában állottak az angol matematikussal.[24] CARCAVY, a roulette ürügyén kitűzött metodikai verseny egyik döntőbírája pedig nemcsak MERSENNE utódja, hanem ROBERVAL és PASCAL barátja is volt, aki már PASCAL DESCARTES-al vívott prioritási vitájában is PASCAL mellé állott.[25] A roulette-kihívás

[21] Uo. 170.

[22] „Akik valamennyire is járatosak az indivisibilia elméletben, azonnal értik, mennyiben alkalmazhatók ezek a fogalmak görbék által határolt területekre". Uo. 170—171.

[23] KOYRÉ, A.: *Pascal savant.* P, CR. 259—295, 266. KOYRÉ ebben az alapvető fontosságú tanulmányában — melyik KOYRÉ tanulmány nem az? — azt mutatja ki, hogy PASCAL távolról sem emelkedett annyira kora tudományos vizsgálatainak a színvonala felé, mint azt az eddigi, hagiographikus-jellegű PASCAL irodalom állította. Pascal est un mathématicien d'un très grand talent, qui a eu la bonne chance d'avoir été, dans sa prime jeunesse, formé par Désargues ou, du moins, d'en avoir subi une profonde influence, et qui a eu la malchance d'avoir été, dans son âge mûr, profondément influencé par Roberval (im. 270). — Jelen közlemény KOYRÉ tanulmányának a téziséhez kapcsolódik, de szeretné kimutani, hogy szerencsére ROBERVAL hatása nem volt olyan mély, mint azt KOYRÉ — s talán maga PASCAL is — hitték. PASCAL a ROBERVAL-féle indivisibilia zsargon alatt visszatalál a tisztább görög forrásokhoz az infinitezimális matematika területén is.

[24] L. HOFMANN, J. E. *Geschichte der Mathematik* II., Berlin 1957, 36—37.

[25] DESCARTES és PASCAL között MERSENNE halála után romlik el véglegesen a viszony, amikor a nagy tapintattal rendelkező és jóindulatú MERSENNE feladatát, a tudósok egymás közötti levelezésének — ami akkor a tudományos folyóiratokat pótolta — lebonyolítását a jansenista-szimpatizáns CARCAVY veszi át. CARCAVY oly módon értesíti DESCARTES-ot pl. PASCAL barométer-kísérleteiről

eleve úgy volt megtervezve, hogy PASCAL dicsősége és ROBERVAL prioritása biztosítva legyen.

Ezekben a következtetésekben kétségkívül igazat kell adnunk KOYRÉnak. Azonban KOYRÉ szerint metodikában sem hoztak semmi újat a *Roulette-levelek*, az alkalmazott módszer egyszerűen az indivisibiliamatematika „félreértése". KOYRÉ véleménye szerint PASCAL „úgy látszik nem értette meg CAVALIERI fogalmainak a mélyebb értelmét, hiszen CAVALIERI számára egy geometriai objektum indivisibilis elemei eggyel kevesebb dimenzióval rendelkeztek, mint ez az objektum maga."[26] PASCAL viszont a *Roulette-levelek*ben úgy fogja fel a területet, mint „kis négyszögek indefiniált számának az összegét", s az így felfogott területet azonosnak veszi a CAVALIERI által definiált „vonalak összegével."[27]

Ugyanez a véleménye a matematikatörténetben is kitűnően járatos BOURBAKInak[28], s ez volt már lényegében CANTOR felfogása is.[29] Szerintük ROBERVAL és nyomában PASCAL „félreértették" vagy legalábbis átinterpretálták CAVALIERI infinitezimális módszerét, de ez a „félreértés" termékeny volt, mert ebből született meg LEIBNIZ kezén az integrálszámítás.

PASCAL fentebb ismertetett vizsgálatai azonban azt mutatták, hogy ő tökéletesen tisztában volt az indivizibilia módszerrel, s ha a *Roulette-levelek*ben a vonal aggregátumok helyett végtelenül finomítható négyszög beosztás összegeként állítja elő a területet, annak más oka kell legyen, nem az indivisibilia módszer „félreértése". ROBERVAL valóban azt hitte, hogy az indivisibilia módszert „javítja meg", amikor a „vonalösszeget" indefinit-kicsiny négyszögek összegével váltja fel. De PASCAL csupán elnevezéseiben követi ROBERVALt, PASCALnál egészen másról van szó, nem az indivisibilia módszer „megjavításáról". PASCAL a *Roulette-levelek*ben más módszert használ, mint amire még az aritmetikai háromszöggel kapcsolatos infinitézimális megfontolásaiban hivatkozott, a *Roulette-levelek* módszere nem az indivisibilia módszer többé.

Már CANTOR felhívta rá a figyelmet,[30] hogy a XVII. század NEWTON—LEIBNIZ előtti matematikájában az indivisibilia módszer mellett kifejlődik egy másik módszer is, amelyik az antikvitás megközelítő módszereihez kapcsolódva területeket keskeny területsávok, térfogatokat keskeny parallelepipeda számának a növelésével akart kimeríteni. *Exhaurire:* a szó is most lép fel először, GREGORIUS a SANTO VINCENTIO[31]

---

is, ami a nagy filozófusra fölöttébb sértő volt. S már ekkor, 1649-ben kénytelen DESCARTES a cikloisкérdésben is védekezni ROBERVAL prioritás-igényeivel szemben: Car, pour l'aire de la ligne décrite par la Roulette, dont il s'est fort vanté, c'est Torricelli qui l'a trouuée: & c'est moy qui luy ay enseigné à en trouuer les tangents (DESCARTES levele CARCAVYhoz, 1649. aug. 17-én. Ouvres, Adam-Tannery-féle kiadás V 391—401, 400.).

[26] KOYRÉ, A.: *Pascal savant.* P, CR. 269.

[27] Uo. 270.

[28] BOURBAKI, NICOLAS: *Éléments d'histoire des mathématiques,* Paris 1960., 194: Il est vrai que par la suite beaucoup de mathématiciens, tel que Roberval et Pascal, préfèrent voir, dans ces ordonnées de la courbe dont on fait la „somme", non des segments de droite comme Cavalieri, mais des rectangles de même hauteur infiniment petite, ce qui n'est pas un grand progrès du point du vue de la rigueur (quoi qu'en dise Roberval).

[29] Cantor II 877, de CANTOR haladásnak tartja ROBERVAL átértelmezését.

[30] Uo. 895.

[31] GREGORIUS a S. VINCENTIO (1584—1667) belga jezsuita páter 1647-ben megjelent, de évtizedek óta készen levő műve, az *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni,* Antwerpen 1647. számos nehezen érthető antik geometriai stílusban megírt tétel mellett néhány meglepően modern és a későbbiekben nagy jelentőségű elvet tartalmaz, amit elsősorban J. E. HOFMANN nyo-

munkájában. CANTOR nagy művét azonban G. ENESTRÖM kritikája s a nyomában orientálódó matematikatörténetírás „megbízhatatlannak” minősítette,[32] s mikor több mint egy félévszázad múlva WHITESIDE újra felfedezi a XVII. század matematikájának ezt a fontos irányát, már nem is hivatkozik CANTORRA.

WHITESIDE alapvető fontosságú monográfiájával egyebütt kell részletesen foglalkoznunk, itt csak az exhaustiós módszereket ismertető fejezetét futjuk át, mert enélkül PASCAL infinitezimális matematikáját nem lehet megérteni. WHITESIDE fedezi fel, hogy a CAVALIERI—ROBERVAL-féle indivisibilia módszerekkel ellentétben, amelyek végeredményben kontinuum számosságú halmazok megfelelkezésén alapulnak, az exhaustiós módszerek utat nyitnak a végtelen, ill. a kontinuum aritmetizálása felé. WHITESIDE szerint a XVII. század úgy általánosítja az „egyszerű” görög exhaustiós technikát, hogy az „aequivalenssé válik egy konvex ponthalmazon értelmezett CAUCHY—RIEMANN-féle határozott integrállal.”[33]

Egyelőre tekintsünk el attól a ténytől, hogy a görög módszer csak azért látszik „egyszerűnek” WHITESIDE előtt, mert a valós számok jólrendezhetőségéből indul ki, s így a görög módszer bonyolult arányelméleti struktúráját a ponthalmazok elméletének a szellemében fogalmazhatja át.[34] A mi szempontunkból most az a fontos, hogy WHITESIDE interpretációját elfogadva, a görög módszer, PASCAL módszere és a RIEMANN-integrál valóban nagyon közel kerülnek egymáshoz. A XVII. század matematikusainak a WHITESIDE által megfogalmazott „arkhimedészi modellt” csak az egyenlőség egyenlőtlenség melletti megengedésével kellett általánosítaniuk ahhoz, hogy alkalmassá váljon konvex görbék alatti területeknek a számítására.

Ebben a XVII. század által kibővített exhaustiós modellben centrális szerepet játszik a konvexitás fogalma. Már maga PASCAL tisztában volt ezzel, és a *Dimension des lignes courbes*-ban külön *avertissement*-ként, elvként emeli ki: „Feltételezem az arkhimedészi elv érvényességét: Ha két, azonos síkban fekvő, közös végpontú görbe vonal ugyanazon oldal felé görbül, az, amelyik benne foglaltatik a másikban, rövidebb lesz mint az, amelyik magában foglalja.”[35]

A matematikatörténetírás, folyton LEIBNIZ elődjét keresve PASCALban, PASCAL matematikai oeuvre-jéből az „előremutató” (értsd: LEIBNIZ felé mutató) vonásokat emelte ki: a „karakterisztikus háromszöget”, a „görbe mentén történő integrálást”, a „kettős integrálást”, a „parciális integrálást”, s átsiklott, mint az antikvitás felé való visszatérésen a *Dimension des lignes courbes* problematikáján.[36] PASCAL maga is az antik módszer alkalmazásának nevezte ezt a művét, s a matematikatörténetírás szívesen hitt neki. Ennek a műnek a módszere ugyanis valóban semmiképpen sem illeszthető be azokba a keretekbe, amiket a matematikatörténetírás gyártott

---

mán — csak a legutóbbi évek történetírása kezd igazán értékelni. L. pl. CH. NAUX: „L'Opus geometricum de Grégorie de Saint-Vincent”, *Revue d'Histoire des Sciences* **15** (1962), 93—104.

[32] Egyedül GEORGE SARTON kelt ismételten CANTOR nagy művének a védelmére. Kétségtelen, hogy CANTOR, mint a késő tizenkilencedik század többi nagy történésze is — talán csak BURCKHARDT és ACTON volt kivétel — túlságosan megértette a forrásait, ott is, ahol azok alig, vagy egyáltalán nem érthetőek. CANTOR a tudománytörténetírás kritika és interpretáció előtti korában írt, abban a boldog korban, amikor a történészek még elhitték, hogy a források valóban arról szólnak, ami le van írva bennük.

[33] WHITESIDE 335.

[34] Uo. 332—333.

[35] Éd. Pléiade 320.

[36] HOFMANN, J. E.: *Geschichte der Mathematik* II. Berlin 1947, 42.: azonban mint „*bedeutende Einzelleistung*”-ot emeli ki.

magának a CAVALIERI—TORRICELLI—ROBERVAL—PASCAL-féle „indivisibilia" elméletről, mint a LEIBNIZ-féle kalkulus „elődjéről".[37] WHITESIDE azonban kimutatta, hogy PASCAL éppen ebben a művében, a „kibővített exhaustios modell" egyik legmesteribb alkalmazásával, a kor legfontosabb matematikai tendenciáihoz csatlakozik. S így ez a mű, ahelyett, hogy az antikvitás felé való visszatérést jelentene, a kor legjellegzetesebb matematikai tendenciáinak egyikét fejleszti tovább.

Az alábbiakban megkíséreljük kimutatni, hogy ezt a módszert használta PASCAL már a *Roulette-levelek*ben is, csupán ott még az indivisibiliamatematikából származó elnevezések köntösébe öltöztette.[38] De ezt a módszert — WHITESIDEtől eltérően — nem tekintjük a CAUCHY—RIEMANN-féle integrál elődjének, vagy éppen korai megfogalmazásának, mert PASCAL módszeréből hiányzik a konvergencia, a határérték fogalma. PASCAL módszerének a lényegét a XVII. század hasonló módszereihez viszonyítva kell megérteni.

Az exhaustiós módszer területszámításra való adaptálásának az ötlete nem új, hiszen ezt használta már EUDOXOS a körterület számítására. S láttuk, hogy a XVII. században ez a módszer LUCA VALERIO,[39] GREGORIUS a SANTO VINCENTIO és tanítványaik kezén fokozatosan újraéled. GREGORIUS a SANTO VINCENTIO tanítványa volt A. TACQUET,[40] akinek kitűnő összefoglaló munkáit PASCAL is jól ismerte.

És ezt a módszert alkalmazza, s hozzá éppen a ciklois területének a kiszámítására, DESCARTES is.[41] De nem úgy, amint azt WHITESIDE modern matematikai-logikai apparátussal dolgozó strukturanalízise vázolja. És nem úgy, amint PASCAL a *Dimension des lignes courbes*-ban. A DESCARTES eljárásában sajátságosan keveredik indivisibilia módszer és exhaustiós módszer. Az indivisibiliamatematikából megtartja azt az elvet, hogy két geometriai alakzat — folytonos halmaz — összehasonlítását azok elemeinek az összehasonlítására vezeti vissza. De a területet nem ezeknek az eggyel kisebb dimenziójú elemeknek, a vonalaknak az „összességeként" adja meg,

[37] Még az egyébként olyan jól tájékozott BOURBAKI is. Im. 194. Egyedül KOYRÉ hívta fel a figyelmet arra, hogy PASCAL infinitezismális matematikájában nem szabad LEIBNIZ „elődjét" látni, s hogy pl. a „karakterisztikus háromszög" PASCAL számára egyáltalában nem „karakterisztikus", mivel PASCAL ne pense pas *rapport*, il pense *objet* et c'est pour cela qu'il manque la décuverte leibnizienne... KOYRÉ, im. 269.

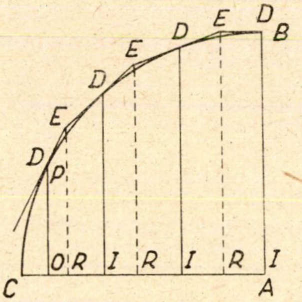
[38] JEAN ITARD felismeri ezt a tényt. A *Lettre de Monsieur Dettonville a Monsieur Carcavi*-ból idézve azt a részt, ahol PASCAL az indefinit számú négyszög összege helyett a somme des ordonnées elnevezés használatát indokolja (Éd. Pléiade 232), megjegyzi: En fait, c'est un résumé de la méthode d'exshaustion des Anciens, et de son expression plus rapide dans le langage des indivisibles. JEAN ITARD: „De l'algèbre symbolique au calcul infinitesimal." — *Histoire générale des sciences publiée sous la direction de René Taton, tome II. La science moderne (de 1450 a 1800).* Paris 1958, 207 207—241, 224.

[39] LUCA VALERIO (552—1608) 1604-ben megjelent *De centro gravitatis solidorum*-a éppen az antik exhaustiós eljárás felélesztésével hatott a XVII. századi infinitezimális módszerek fejlődésére. Már ez a mű is mutatja, hogy a XVII. századi infinitezimális módszerek szempontjából milyen jelentősek voltak a súlypont-problémák, amik PASCAL roulette-kihívásának a lényegét is teszik. Erre a kérdésre nézve l. PIERRE COSTABEL: „Autour de la méthode de Galilée pour la détermination des centres de gravité", *Revue d'Histoire des Sciences* 8 (1955), 116—128.

[40] A. TACQUET (1612—1660) szerepét ebből a szempontból már CANTOR felismerte, Cantor II 896. ANDREAS TACQUET: *Cylindricorum et annularium libri IV...* Antwerpen 1651 és a folytatását képező *Cylindricorum et annulorum liber quintus...* Antwerpen 1659 címen megjelent könyvei a kor kedvelt tankönyvei közé tartoznak. L. ELISABETH SAUVENIER—GOFFIN: Les sciences mathématiques et physiques a travers le fonds ancien de la bibliotheque de l'Université de Liège. II. Les XVII[e] et XVIII[e] siècles. — *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège.* Cinquième sérietome V., 135.

[41] DESCARTES levele MERSENNE-hez 1638 július 27-én. Adam—Tannery-féle kiadás, II 253—288.

mint ez az indivisibilia módszerben történik, hanem egy végtelenül finomítható területbeosztással kimeríthetetlen *összegként* definiálja. S éppen ez a keverés a lényege annak a módszernek is, amit PASCAL a *Roulette-levelek*ben és a *Traité des sinus du quart de cercle*-ben használ. PASCAL azonban sokkal világosabban, módszeresebben jár el, mint DESCARTES. Ami DESCARTESnál egyszerű, „evidens" ötletként jelentkezik, az PASCALnál propositiókkal alátámasztott levezetés formáját ölti. DESCARTES két végtelenül finomítható területbeosztást akkor tekint egyenlőnek, ha a beosztások egyes elemei — a kis részterületek — egyenlőek: „Mivel, ha egy mennyiség minden része egyenlő egy másik mennyiség minden részével, az egész is szükségszerűen egyenlő az egésszel; és ez annyira világos fogalom, hogy azt hiszem, csupán a minden dolognak az igazsággal ellentétes névadás szenvedélyének a megszállottai tagadhatják."[42]



2. ábra

PASCAL nem evidenciára hivatkozik, hanem *definiál:* „Legyen (2. ábra) *ABC* egy körnegyed, melynek *AB* sugarát tekintsük tengelynek és a reá merőleges *AC* sugarat bázisnak; legyen *D* a körív egy tetszőleges pontja, melyből meghúzzuk a *DI* sinust az *AC* sugárra; és a *DE* érintőt, amelyen tetszés szerint vegyünk fel két *E* pontot s húzzunk ezekből merőlegeseket az *AC* sugárra.

Azt állítom, hogy a *DI* sinus és az *EE'* érintő szorzata egyenlő a bázis két párhuzamos közé bezárt *RR'* szakaszából és az *AB* sugárból alkotott szorzattal (3 ábra). Az *AD* sugár ugyanis úgy aránylik a *DI* sinushoz, mint *EE'* aránylik *RR'*-höz vagy *EK*-hoz: ami világosan kitűnik a *DIA* és az *EKE'* derékszögű háromszögek hasonlóságából, utóbbi pedig az *EE'K* vagy *EDI* és *DAI* szögek egyenlőségéből következik.

*I. Propositio*

A körnegyed egy tetszőleges ívében vett sinusok összege egyenlő a bázis két szélső sinus közé zárt szakaszának és a sugárnak a szorzatával.

*A bizonyítás előkészítése*

Legyen *BP* egy tetszőleges körív, amit *D* pontokban indefiniált számú részre osztunk, ahonnan meghúzzuk a *PO*, *DI* stb. sinusokat: ... *AO* méri a *BAPO* ív szélső sinusai közötti távolságot. ...

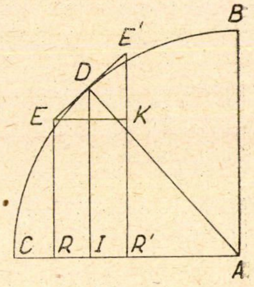
*Az I. Propositio bizonyítása*

Azt állítom, hogy a *DI* sinusok összege (megszorozva mindegyik a *DD* ívek egyikével, amint az magától értetődik) egyenlő az *AO* egyenes és az *AB* sugár szorzatával.

Mert minden *D* pontban meghúzva a *DE* érintőt, amelyek mindegyike *E* pontokban metszi a szomszédját, és meghúzva az *ER* merőlegeseket, látható, hogy mindegyik *DI* sinus és *EE* érintő szorzata egyenlő a megfelelő *RR* távolságok és az *AB*

[42] Uo. 262.

sugár szorzataival. Így tehát a *DI* sinusok mindegyikét megszorozva a saját (egymás között mind egyenlő) *EE* érintőjével, az így kapott négyszögek halmaza (ensemble) egyenlő lesz az egyes *RR* szakaszok *AB* sugárral képezett négyszögeinek a halmazával; azaz (mivel mindegyik érintő meg van szorozva a sinussal és mindegyik szakasz az *AB* sugárral) a *DI* sinusok összege (somme) megszorozva mindegyik az *EE* érintők egyikével egyenlő az *RR* távolságok összegének, vagyis *AO*-nak az *AB*-vel képzett szorzatával. De mindegyik érintő egyenlő az egymás között egyenlő *DD* ívek egyikével. Úgyhogy az egyenlő kis ívek egyikével megszorzott sinusok összege egyenlő a sugár és az *AO* távolság szorzatával."[43]



*3. ábra*

Mi sem egyszerűbb, mint ezt az eredményt a vonal mentén vett integrálás nyelvére lefordítani, s ha az ember LEIBNIZ felől gondolkozik, ez szinte elkerülhetetlen. De PASCAL még annyira se ismerte LEIBNIZ matematikáját, mint a mai matematikusok, viszont összehasonlíthatatlanul jobban ismerte náluk a görög matematikát és kora modern matematikai módszereit. Ismerte, egyetlen szóban utal is rá,[44] DESCARTES roulette területét megadó módszerét is. S ez a módszer lényegében, gondolati struktúráját tekintve ugyanaz, amit PASCAL használ a fentebb idézett szövegben. DESCARTES a következőképpen jár el: vesz két területet, az egyik, a kör területe adott, a másikat, a ciklois egy szegmentumának a területét úgy kell kis, végtelenül finomítható területrészletekből megszerkeszteni, hogy mindegyik kis területrészletnek feleljen meg az adott kör egy-egy kis részlete. Ezt a ciklois-szegmentumban s a neki megfelelő félkörben létesített háromszögbeosztással éri el, a két beosztás különböző alakú, de egyenlő területű háromszögeit megfeleltetve egymásnak. Magát a ciklois-szegmentumot egy jellegzetesen indivisibiliamatematikai megfontolással hozza olyan alakra, ahol ez az összehasonlítás könnyen elvégezhetővé válik: kimutatja két, a kérdéses ciklois-szegmentumban s egy félkörben felvett egyenes sereg egyes egyeneseiről, hogy egyenlő hosszúak. Ahhoz, hogy ebből a két terület egyenlőségére lehessen következtetni, az indivisibiliamatematika alapszabálya szerint a két egyenes seregnek azonosan irányítottnak kell lenni, azonos párhuzamos egyenesekből kell állani. De ezt az azonos irányítottságot létrehozva, DESCARTES a kör és a ciklois-szegmentum azonos hosszúságú, párhuzamos egyenes szakaszai közötti összefüggést nemcsak arra használja fel, hogy segítségével a két terület egyenlőségét bizonyítsa. Ezen túlmenően egy-egy területbeosztást létesít a két összehasonlítandó területben az indefinit párhuzamos egyenesek felhasználásával, s az egyes részterületek páronkénti egyenlőségéből következtet a két egész terület egyenlőségére.[45]

[43] *Traité des sinus du quart de cercle,* Éd. Pléiade 275—282, 275—277.

[44] *Histoire de la roulette* ... lo octobre 1658. Éd. Pléiade 194—200, 195: on reçut leurs solution — írja MERSENNE régi felhívására célozva — presque en même temps, l'une de M. de Fermat, conseiller au parlament de Toulouse, l'autre de feu M. Descartes; et toutes deux différentes l'une de l'autre, et encore de celle de M. de Robrval, de telle sorte néanmoins qu'en les voyant toutes il n'est pas difficile de reconnaître qu'elle est celle de l'auteur, car il est vrai qu'elle a un caractère particulier, et qu'elle est prise par une voie si belle et si simple qu'on connaît bien que c'est la naturelle.

[45] Az *AKFGCHELA* ciklois-szegmentumot DESCARTES egy egyszerű, de hosszadalmas indivisibilia geometriai megfontolással $\varphi\gamma\kappa\psi\omega\epsilon\varphi$ alakra hozza, ebben és egy $\alpha\delta\beta$ félkörben azonos

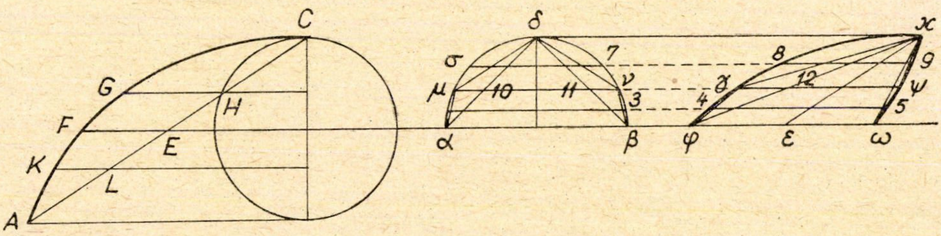
A kis részterületek számát úgy kell szaporítani, *qu'on voudra à l'infini*,[46] írja DESCARTES, hogy közben a két összterület egymásnak megfelelő részterületei egyenlőek maradjanak.

PASCAL bizonyításában az adott terület — ami DESCARTESnál a félkör volt — egy négyszög, az összehasonlítandó, kis részterületekből megszerkesztendő terület a sinusgörbe egy része alatti terület. A két területbeosztás egyenlőségének a kimutatására szolgál a *BC* körívet helyettesítő érintősokszög egyes kis *EE'K* elemi háromszögeire alapított bevezető lemma, amit a matematikatörténetírás a „karakterisztikus háromszög" bevezetéseként ismert félre. PASCALnál azonban szó sincs egy „véges" és egy „végtelen kicsi" háromszög összehasonlításáról, mint LEIBNIZnál. PASCALnál ez a lemma egyszerűen két indefinit területbeosztás területegyenlőségének a kimutatására szolgál. PASCAL matematikája, éppen úgy, mint a DESCARTESé, sokkal precízebb, mint LEIBNIZ és a LEIBNIZ nyomában orientálódó matematika. Az infinitezimális módszerek területén egész a XIX. század elejéig nem érik el újra a pascali precizitást.

De ez a pascali precizitás egészen más jellegű, mint a XIX. századi. A végtelen finomítás ugyanis PASCALnál éppen úgy nem határátmenet jellegű, mint DESCARTESnál. Nem szabad megtévesszen PASCAL olyan megfogalmazása sem, hogy az *EE* sokszögbeosztás a végtelen finomítás esetében egyenlő lesz a *DD* körívvel, „mert ekkor az összes, egymás között egyenlő *EE* érintőknek az összege nem különbözik az egész *BP* ívtől, ill. az egymással egyenlő *DD* ívek összegétől, csak egy bármely adottnál kisebb mennyiséggel."[47]

Csak mi ismerjük itt fel az érintősokszög beosztás „határértékét" a körívben, PASCALnál szó sincs a függvényfogalom által lehetővé tett, a limes-összefüggésben szereplő végtelenről. A PASCAL végtelenje még az antik „kimeríthetetlen". De a kimeríthetetlenséget a körülményes reductio ad absurdumra való hivatkozás helyett elvként mondja ki, s ezzel túllép a görög kimeríthetetlen-végtelen fogalmán a modern limes-végtelen felé. Ahhoz azonban, hogy a modern végtelennel összeejthető lenne, hiányzik belőle a konvergencia kritérium. Az a megállapítás hiányzik, hogy az egyre

párhuzamos egyenes sereg egyeneseinek $\alpha\beta$ és $\varphi\omega$, $\mu\nu$ és $\gamma\psi$ szegmentumairól kimutatja, hogy egyenlőek, s ebből az indivisibilia geometria szabályai szerint következik a két idom, $\alpha\delta\beta$ és $\varphi\gamma\varkappa\psi\omega\varepsilon\varphi$




4. ábra 5. ábra 6. ábra

egyenlősége. De DESCARTES nem elégszik meg ezzel a bizonyítással. A két idomon átfutó, indefinit számú párhuzamos vonalat arra is felhasználja, hogy egy-egy, a félkört, ill. a $\varphi\gamma\varkappa\psi\omega\varepsilon\varphi$ ciklois-szegmentumot egyre jobban megközelítő, indefinit számú háromszögbeosztást is létesítsen a segítségükkel, amelyeknek az egyes elemi háromszögeiről kimutatja, hogy egyenlő területűek.

[46] Idézett levél, Adam—Tannery-féle kiadás II., 262.

[47] *Traité des sinus du quart de cercle*, Éd. Pléiade 277.

kisebb oldalhosszúságú érintősokszögek és a körív közötti különbségek természetes számok szerint rendezett sorában mindig találhatunk olyant, amelyiktől kezdve minden tag kisebb mint egy tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon$, s hogy csak az $\varepsilon$-tól függ, hanyadik lesz ez a különbség a természetes számok szerint elrendezett különbségek sorában.

Formulában: ha a $K_m = |(EE)_m - BP|$ különbségek $K_1, K_2, \ldots, K_m, \ldots$ sorában minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $N = N(\varepsilon)$ természetes szám úgy, hogy az $n$-ik különbség $K_n = |(EE)_n - BP| < \varepsilon$ hacsak $n > N$, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat konvergens és határértéke $BP$; $\lim_{n\to\infty} K_n = BP$.

A mi számunkra ez az összefüggés definiálja a végtelent. A XVII. század azonban nem ismeri a határérték fogalmát,[48] és nem ismeri a függvény fogalmát sem úgy, ahogy azt ma értjük. De a végtelent, azt ismeri a XVII. század is, mint ahogy ismerték a görögök is. Azonban mind a háromféle végtelen más és más. A XIX. század a függvényfogalom segítségével definiálta, mondhatnánk „skatulyába zárta" a végtelent. A görögök nem ismerték a függvényt, de valamire, ami bizonyos fokig helyettesítette ezt a matematika szívét jelentő fogalmat, nekik is szükségük volt. Ez volt az arány. De míg a függvény szinte természetéből következően kívánja magába zárni a zérust és a végtelent, az arány éppen ellenkezőleg, kiveti magából. Az arányelmélet számára a végtelen a nem-arány, az *alogos*, az irrationális. S ahol, mint pl. a körterület kiszámításánál nem lehet kiküszöbölni, ott megkerülik: azt bizonyítják, hogy a körterület soha nem meríthető ki semmiféle egyenes vonalak által határolt sokszöggel, bármilyen kicsire választjuk is a sokszögek oldalait. Ez a nem-kimeríthetőség azonban bizonyítható, s amit bizonyítani lehet, az van. SZABÓ ÁRPÁD vizsgálatai mutatták meg,[49] hogy a bizonyíthatóság kriteriuma milyen óriási jelentőségű volt a matematika kialakulása szempontjából. S arra is ő hívta fel a figyelmet, hogy ez a kriterium a pontosan megadható és pontosan meg nem adható ellentétpárba alakulva még a PLATON korabeli matematikai aranykorban is milyen nagy szerepet játszott a görög matematika fogalomalkotásában.[50]

A mi esetünkben ez a kriterium kétféle terület megkülönböztetésére vezetett. Vannak olyan területek, amik egyenes vonalalak által határolt idomokkal kimeríthetők, s vannak olyanok, amik nem. Az előbbi területeket mindig pontosan át lehet alakítani négyzetté, utóbbiakat nem. Ezeket csak megközelíteni lehet, tetszés szerinti pontossággal. A görög matematika nagy hiányossága, hogy kitér ennek a megközelíthetőségnek a direkt, exakt definíciója elől, sohasem jut el a limes fogalom szilárd aritmetikai konstrukciójához. A görög matematika számára nincs határérték, a görög matematika számára csak „kimeríthetetlen" van. Ez a kimeríthetetlen, tartalmát illetően persze nagyon hasonlít a mi limes fogalmunkhoz, úgyannyira, hogy a modern és a görög matematikát egyaránt oly kitűnően ismerő és művelő B. L. van

[48] A végtelen sorok elméletének a kialakulása előtt nem célszerű határértékről beszélni, még abban az óvatosabb és módosított értelemben sem, ahogyan pl. UGO CASSINA teszi: *Il cocetto di limite in Luca Valerio e Pietro Mengoli,* Actes du Symposium International des sciences physiques et mathématiques dans la première moitié du XVIIe siècle. Pise—Vinci 16—18 Juin 1958. Paris 1960, 8—18.

[49] SZABÓ ÁRPÁD: „Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? I—II". *Matematikai Lapok,* 8 8—36, 232—247.

[50] SZABÓ, Á.: „Anfänge des euklidischen Axiomensystems." *Archive for History of Exact Sciences,* 1 (1960) 37—106. Továbbá „Der mathematische Begriff *δυναμισ* und das sog. geometrische Mittel." (Megjelenés alatt.)

der WAERDEN azonosnak veszi a kettőt.[51] S ez így is van, ha a modern limes fogalom ismeretében interpretáljuk át a görög eljárást. De a görögök számára ott, ahol mi most jóldefiniált aritmetikai konstrukcióval dolgozunk, s pontok egymásbatolt végtelen soraival sűrítjük tele a teret, a görögök számára ott nem volt semmi. Ahol mi most egy korlátos halmaz egyetlen sűrűsödési pontját, a határértéket látjuk, ott a görögök egy általuk abszolútnak elismert érvényű, de *közvetett* bizonyítás, a reductio ad absurdum segítségével igazolják valaminek a létezését — adott esetben a körét —, de ezt a valamit nem tudják egy aritmetikai konstrukció segítségével megragadni.

A görög gondolkozás hanyatlásakor, a későhellenisztikus korban, amikor a matematika újra épp olyan szorosan összefonódik metafizikai megfontolásokkal, mint a görög gondolkozás kezdetekor,[52] a kör és a gömb esetében ez a bizonyíthatóság és mégis konkrétan meg-nem-ragadhatóság speciális metafizikai értelmet nyer. A körterület, ami nem mérhető és mégis van, mert értelemmel megragadható, magassabbfokú létezést jelent, mint az érzékszervekkel megragadható négyzeté. A kör és a gömb a neoplatonizmusban a magasabbfokú létezés szimbóluma lesz. Azonos az Egy-gyel, ami megint nem más, mint maga a létező, az Isten.

A keresztény gondolkozás ezt a kört kapja örökségül, a kört, amelyik magába zárja az egyet és a végtelent. A keresztény középkor egyik utolsó nagy gondolkozója, NICOLAUS CUSANUS foglalja talán össze legfrappánsabban ezt a szétágazó, évezredes kommentár-irodalmat: a végtelen a *coincidentia oppositorum* realizációja, ahol az Egyik és a Másik összeesnek, a végtelen egyenes kör, de egyúttal háromszög is, négyszög, ötszög, sokszög.[53] Kör, amelyiknek a középpontja mindenütt van, s kerülete nincsen sehol. A végtelennek csak a *létezését* ismerjük, a természetét nem.

*Nous connaissons qu'il y a un infini et ignorons sa nature* ... írja PASCAL a híres *Infini. Rien* fragmentumban.[54] A végtelen világmindenség *est une sphère infinie dont le centre est partout, la circonférence nulle part.*[55] Még a szavak is ugyanazok, mint CUSANUSnál, akit egyébként PASCAL valószínűleg nem ismert első kézből.[56] De erre nem is volt szüksége. Mióta M. de GANDILLAC kimutatta,[57] hogy a *Pensées*

[51] WAERDEN, B. L. van der: *Erwachende Wissenschaft*, Basel und Stuttgart 1956., 306: Der moderne Limesbegriff ist in seiner vollen Schärfe darin vorhanden: Die einbeschriebenen Polygone nähern sich dem Kreis in dem präzisen Sinn, dass die Differenz kleiner gemacht werden kann als ein beliebig vorgegebenes Flächenstück. — Ugyanezzel a felfedezéssel MORITZ CANTOR még WALLISt ajándékozta meg (Cantor II 901). Leghelyesebb talán, ha megtarjuk CAUCHYnak. A végtelen aritmetizációja — a határérték fogalma — a sorelmélet olyan fokú fejlettségét követeli meg, ami a XIX. század előtt nem található meg.

[52] Vö. JOJA, ATHANASE: „Éléatisme et logique formelle" — *Études d'Histoire et de Philosophie des Sciences*. Éditions de l'Académie de la République Populaire Roumaine 1962., 243—287, 287: Dans la conception des Éléates, PHYSIS s'est transformée en META-physis. Mais tout cela ne fut pas l'avanture personnelle d'un certain Parménide fils d'un certain Pyres, mais une avanture de la pensée humaine. Et point une simple aventure, mais une étape, une halte nécessaire.

[53] TÓTH I. hívta fel rá a figyelmet, hogy ezzel a definícióval túllép a görög fogalmon az *aktuális végtelen* felé (I. Tóth: „La géométrie non euclidienne dans le développement de la pensée." — *Études d'Histoire et de Philosophie des Sciences* 53—70, 68), ami bizonyos fokig könnyíti az „exhaustios végtelen" és az „indivisibilia végtelen" közelítését.

[54] PASCAL, BLAISE: *Pensées sur la Religion et sur quelques autres sujets.* Avantpropos et notes de Louis Lafuma. Édition Delmas I—II Paris 1947, I C, 188.

[55] Uo. I 14°, 203.

[56] MESNARD szerint a hasonlóságok valószínűleg GASSENDI közvetítésével magyarázhatók (P, CR. 380), de a *Pensées* végtelen fogalmához nagyon hasonló gondolatok találhatók, mint JEAN ORCIBAL kimutatta, CHARRONnál is („Le fragment infini-rien et ses sources", P, CR. 159—195).

[57] GANDILLAC, M. de: „Pascal et le silence du monde". — P, CR. 342—385.

végtelenre vonatkozó kitételei milyen ősi, elterjedt és sokszor banalitásszámba menő megfogalmazásokon alapulnak, a filozófiatörténészek is egyre nagyobb súlyt helyeznek az irodalomtörténész G. LANSON figyelmeztetésére: PASCALnál csillogó stílus sokszor sejtet eredetit ott is, ahol a kor közismert banalitásait ismétli el.[58] A *Pensées*-ban az indivisibiliamatematika végtelenje — Le fini s'anéantit en présence de l'infini et devient un pur néant[59] — mellett megjelenik a görög-neoplatonikus végtelen is, a *Pensées* végtelen fogalmán ugyanazt a keverést látjuk, mint az 1658-as év matematikai termésében, aminek a kedvéért egy alkalmi fogfájás következtében abbahagyta volna a *Pensées*-n való munkát.

S ha hinni lehet a *Pensées* kronológiáját és eredeti elrendezését illetően oly nagy nehézségekkel küzdő PASCAL-filológiának, akkor a matematikai szempontból centrális jelentőségű *Infini. Rien* töredék a *Pensées* genezise és felépítése szempontjából is központi jelentőségű, s lehet, hogy az egész nagy apologetikus mű alapötletét jelentené.[60] S akkor AMOS DETTONVILLE[61] és SALAMON de TULTIE[62] megmaradhat ugyanaz a BLAISE PASCAL. A *Roulette-levelek* és a *Pensées* ugyanazon a végtelen fogalmon épülnek.

A görögök megkerülték a végtelent, mint „kimeríthetetlent", a modern matematika befogta a limes fogalommal. PASCAL a görögök által nyíltan feltárt „kimeríthetetlenséget" elrejtette az indivisibilia geometriából átvett elnevezések és néhol fogalmak mögé. Matematikai munkája legvégén, a *Dimension des lignes courbes*-ban szétválasztja az indivisibilia fasszádtól a görög lényeget, s ehhez a művéhez szinte törés nélkül csatlakozhatna CAUCHY munkája. De PASCAL itt is a XVII. század keretei között marad, a „kimeríthetetlenség" nála nem axiomatikus jellegű, a valós számtest jólrendezhetőségén alapuló fogás, mint nálunk, a „kimeríthetetlenség" nála metafizikai realitás. Ugyanúgy, mint még CUSANUS számára, ugyanúgy, mint a kortársgondolkozás számára általában.

Ez elől a végtelen elől menekült DESCARTES az algebrai egyenletek pontos, tiszta világába. A behelyettesíthető világába. Amiből a függvények és a modern matematika formavilága nő ki, aminek a segítségével a XIX. század definiálja majd a végtelent.

(Beérkezett: 1963. IV. 1.)

[58] BRUNET, GEORGES: *Un prétendu traité de Pascal. Le Discours sur les passions de l'amour.* Paris 1959, 47—48.

[59] „A véges megsemmisül a végtelen jelenlétében és puszta semmivé válik" — *Pensées*, Éd. Lafuma I C, 188.

[60] Vö. BRUNET, GEORGES: *Le Pari de Pascal*, Paris 1956, 47—48 és 50—51.: Or le Pari porte sur l'existance de Dieu, et a pour point de départ cette affirmation que „nous sommes incapables de connaitre ni ce qu'il est ni s'il est.." S így nem érvényes az Isten végtelenségére alapozó Istenbizonyíték, mert a végtelen létezését tudjuk." Nous connaissons l'existance de l'infini et ignorons sa nature, parce qu'il a étendue comme nous, mais non pas des bornes comme nous. Mais nous ne connaissons ni l'existence ni la nature de Dieu, parce qu'il n'a ni étendue ni bornes." (*Pensées* éd. Lafuma I C, 188). BRUNET szerint a Pari — az Isten létére történő „fogadáson" alapuló Istenbizonyíték — az infini-rien fragmentumból nő ki: A l'origine on trouve un projet de réfutation de la preuve de l'existence de Dieu fondée sur l'idée de l'infini (im. 118).

[61] *Louis de Montalte*ból, amely név alatt PASCAL a *Vidéki levelek*et kiadta, készített anagramma, amely alatt a *Roulette-levelek* és általában az 1658-as év matematikai termése megjelent.

[62] *Louis de Montalte*ból készített másik anagramma, amelyen PASCAL a nagy apologetikus művét szándékozott publikálni.

# A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

# AZ AUTOMATÁK ABSZTRAKT ELMÉLETE (I)

Írta: V. M. GLUSKOV[1]

TARTALOM



## Bevezetés

Ez a cikk a diszkrét módszerekkel foglalkozó matematikának egy olyan új területét ismerteti, amely a diszkrét (digitális) automatákat absztrakt algebrai nézőpontból tanulmányozza. Az automaták absztrakt elméletének nevezett terület konstruktív szemléletben közbenfekvő helyet foglal el egyik oldalról a logikai hálózatok elmélete, másik oldalról pedig az algoritmusok elmélete közt. Ezzel egyidejűleg az automaták absztrakt elmélete szoros összefüggésben áll ismert modern algebrai elméletekkel (mindenekelőtt a félcsoportok elméletével), és így ezt az elméletet úgy is lehet tekinteni, mint egyikét az absztrakt algebra fejezeteinek.

Az elmélet elnevezésében szereplő „absztrakt" jelző ellenére az automaták absztrakt elméletének nagy jelentősége van az alkalmazások szempontjából is: az elméletnek számos fejezete ugyanis igen közvetlen alkalmazást talál az elektronikus számológépek és más diszkrét (digitális) automaták tervezésénél.

Ezzel kapcsolatban két különböző forma kínálkozik lehetőségül az automaták absztrakt elméletének a megfogalmazására: vagy az alkalmazási vagy pedig az általános elméleti oldalnak a kiemelése.

Az automaták absztrakt elméletét alkalmazási szempontból a szerző [12] dolgozatában tárgyalta.

A jelen dolgozatnak más a célja: itt az alapvető figyelem az elmélet absztrakt algebrai szemléletére irányul, és az alkalmazási kérdések csak alárendelt szerepet játszanak.

[1] Абстрактная теория автоматов, *Успехи Мат. Наук* **16** (1961) 1—62. Az itt közölt fordítás az eredeti cikk 1—2. §-át, valamint az idézett irodalom jegyzékét tartalmazza. — A fordító e helyen mond köszönetet mindazoknak, akik a fordítás során és az irodalomjegyzék kiegészítéséhez tanácsot adtak.

Meg kell jegyeznünk továbbá azt is, hogy azoknak a dolgozatoknak a túlnyomó többsége, amelyekben a szerzők az automaták absztrakt elmélete különféle kérdéseit tárgyalják, alkalmazási szempontból íródtak. Azok a publikációk pedig, amelyeket az elmélet absztrakt algebrai szemléleti módjának szenteltek, egymástól nagyon eltérő jellegűek, és semmiféle közös eszme nem egyesíti őket. Ezért az automaták absztrakt algebrai elméletének a területén az anyag rendszerezése meglehetősen nehéz feladatot jelent.

Ennek a feladatnak a megoldása volt az alapvető célja annak az automaták absztrakt elméletével foglalkozó szemináriumnak, amelyet 1959 őszétől kezdődően Kijevben a jelen cikk szerzője irányított. Ez a dolgozat a szeminárium munkájának az eredményeit foglalja össze.

A cikket eredetileg összefoglaló ismertetésnek terveztük, de az automaták elmélete jelenlegi helyzetének fentebb említett sajátosságai mégis oda vezettek, hogy szükségessé vált a már rendelkezésre álló anyag jelentős átdolgozása, és annak olyan új eredményekkel való kiegészítése, amelyek korábban sehol sem kerültek publikálásra. Ezzel kapcsolatban megemlíthető, hogy a dolgozatban bebizonyított tételek többsége vagy teljesen új, vagy pedig már ismert eredményeknek a módosítása, illetve általánosítása. Az utóbbi esetben minden alkalommal utalások történnek az előzményekre.

A szerző eredményein kívül a dolgozat néhány olyan új eredményt is tartalmaz, amely a kijevi szeminárium többi résztvevőitől, V. G. BODNÁRCSUKtól és A. A. LETICSEVSZKIJtől származnak. Az ebben a dolgozatban tárgyalt anyag, az 1960 szeptemberében Szverdlovszkban megrendezett általános algebrával foglalkozó össz-szövetségi kollokviumon a szerző előadásának a tárgyát képezte.

## 1. §. Az automaták homomorfizmusa és ekvivalenciája

Az automata fogalma, amellyel az automaták absztrakt elmélete foglalkozik, úgy merül fel, mint a modern számítástechnikában, valamint a diszkrét automatikus vezérlés és távirányítás rendszereiben használt ténylegesen létező diszkrét (digitális) automatákból alkotott értelmes elvonatkoztatás. Az absztrakt automata fogalma implicit formában és pontos definíciók nélkül abban az időben keletkezett, amikor tanulmányozni kezdték az úgynevezett *szekvenciális* (vagy nemprimitív) rendszereket.

Az absztrakt automaták első önálló (az automatát megvalósító rendszer struktúrájától elvonatkoztatott) tanulmányozását HUFFMANN [29] dolgozatában találjuk meg. Ebben a dolgozatban azonban még nem volt elég szabatosan értelmezve az absztrakt automatának a fogalma. Ez az említett dolgozat teljesen alkalmazási jellegű, és a tárgyalás alapjában a jelfogó-érintkező rendszerek nyelvezete segítségével történik. Az automaták absztrakt elméletének sokkal szabatosabb felfogását és megfogalmazását adta MEALY [19] és MOORE [20] dolgozatában. A tárgyalás felépítéséhez MEALY és MOORE az absztrakt automatának két, egymástól valamennyire különböző fogalmát használta fel. SESHU [25] értekezése nyomán az automatának ezt a két különböző típusát *Mealy-féle automatá*nak, illetve *Moore-féle automatá*nak nevezik. Mi először is megadjuk a *Mealy*-féle automata egy általánosabb fogalmának a definícióját, miközben a rövidség kedvéért a *Mealy*-féle automatákat egyszerűen csak automatáknak fogjuk nevezni.

1. DEFINÍCIÓ: *Automatának (tehát Mealy-féle automatának)* nevezzük az $A=A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \delta, \lambda)$ objektumot, amely az $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ nem üres halmazokból, továbbá a $\delta=\delta(a, x)$ és $\lambda=\lambda(a, x)$ függvényekből áll, ahol ezek a függvények a megadott halmazokon vannak értelmezve. Az $\mathfrak{A}$ halmazt az *automata állapot-halmazának*, az $\mathfrak{X}$ halmazt az *automata bemenőjel-halmazának*, az $\mathfrak{Y})$ halmazt pedig az *automata kimenőjel-halmazának* nevezzük. A $\delta(a, x)$ függvényt, amely az $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}$ halmazt egyértelműen leképezi az $\mathfrak{A}$ halmazba, az *automata átmeneti függvényének nevezzük*. A $\lambda(a, x)$ függvény pedig egyértelmű leképezést létesít az $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}$ halmazról az $\mathfrak{X}$ halmazba, ezt a függvényt az *automata kimeneti függvényének* nevezzük. Az $A$ automatát *iniciális automatának* nevezzük, ha az $A$ automata $\mathfrak{A}$ állapot-halmazában valamilyen $a_0$ elem ki van tüntetve. Ezt az $a_0$ elemet az *$A$ automata kezdő állapotának* nevezik.

Az automatának az 1. definícióban bevezetett fogalma abban különbözik a MEALY által használt fogalomtól, hogy az $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ halmazok gyanánt tetszőleges, tehát nem szükségképpen véges halmazokat is lehet választani. Ezenkívül aláhúztuk a különbséget az 1. definícióban az *iniciális* automaták és a *nem-iniciális* automaták közt. Az automaták absztrakt elméletéről szóló munkákban az automaták eme két fajtája megkülönböztetésének a hiánya gyakran a fogalmak káros összezavarásához vezet.

Felhasználva az 1. definíciót, könnyű természetes módon értelmezni az automaták *homomorfizmusának* és *izomorfizmusának*, valamint tetszőleges automata *részautomatájának* a fogalmát. Itt, mivel az automata megadásánál az $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ halmazok szerepelnek, lehetségesnek látszik a homomorfizmus, részautomata stb. több különböző fogalmát bevezetni. Ezeknek a fogalmaknak a bevezetésénél sajátos jelölésmódot fogunk használni, amely világosan mutatja, hogy az $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ halmazok közül melyikre vonatkozik a megfelelő fogalom.

A használt szimbolika értelmét könnyen megvilágíthatjuk az automaták homomorfizmusának a példáján. Az $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \delta, \lambda)$ automatának a $B(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y})_1, \delta_1, \lambda_1)$ automatába való $\Psi$ homomorfizmusát úgy adhatjuk meg, mint a $\Psi_1: \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}_1$, $\Psi_2: \mathfrak{X}\to\mathfrak{X}_1$ és $\Psi_3: \mathfrak{Y})\to\mathfrak{Y})_1$ (egyértelmű) leképezések együttesét, amelyek eleget tesznek tetszőleges $a\in\mathfrak{A}$ és $x\in\mathfrak{X}$ elemek mellett a

$$\Psi_1(\delta(a,x))=\delta_1(\Psi_1(a), \Psi_2(x))$$
$$\Psi_3(\lambda(a,x))=\lambda_1(\Psi_1(a), \Psi_2(x))$$

összefüggéseknek.

Kihangsúlyozva azt, hogy az ilyen módon definiált $\Psi$ homomorfizmus az $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ halmazokra vonatkozik, a $\Psi$ homorfizmust $(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$-*homomorfizmusnak* nevezzük.

A homomorfizmusoknak lehetségesek más alakjai is. Gyakran előfordul például az az eset, amikor az $A$ és $B$ automatáknál mind a bemenőjel-halmazok, mind pedig a kimenőjel-halmazok egybeesnek, azaz: $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y})=\mathfrak{Y})_1$. Ebben az esetben az $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \delta, \lambda)$ automatának a $B(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \delta_1, \lambda_1)$ automatába való homomorfizmusa megadható egyetlen $\Psi: \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}_1$ leképezés által, amely eleget tesz a

$$\Psi(\delta(a, x))=\delta_1(\Psi(a), x)$$
$$\lambda(a, x)=\lambda_1(\Psi(a), x)$$

összefüggéseknek. Az ilyen homomorfizmust természetes módon nevezhetjük $\mathfrak{A}$-*homomorfizmusnak*. Hasonló módon lehet értelmezni az $\mathfrak{X}$-*homomorfizmusokat*, $\mathfrak{Y}$-*homomorfizmusokat*, ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{X}$)-*homomorfizmusokat*, ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Y}$)-*homomorfizmusokat* és ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$)-*homomorfizmusokat*.[2]

Szükséges aláhúzni speciálisan még azt is, hogy a homomorfizmusok, izomorfizmusok, részautomaták stb. definíciójával összefüggő szimbolikában egyszer s mindenkorra lerögzítjük az ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$) jelöléseket az automata állapotainak, bemenőjeleinek és kimenőjeleinek a halmazára, *függetlenül attól*, hogy ezek milyen módon vannak jelölve az egyes *konkrét* automatákban, amelyekkel dolgunk van.

Az *iniciális* automaták homomorfizmusainak és izomorfizmusainak értelmezésénél mindig feltesszük (hacsak éppen nincs kötve ennek az ellenkezője), hogy a megfelelő leképezés az egyik automata kezdő állapotát a másik automata kezdő állapotába viszi át. Abban az esetben, amikor alá akarjuk húzni a különbséget az iniciális és nem-iniciális automaták homomorfizmusai (illetőleg izomorfizmusai) közt, akkor használni fogjuk az „iniciális" és „nem-iniciális" homomorfizmus (illetve izomorfizmus) elnevezéseket.

Miként szokásos, az *automaták izomorfizmusán* a kölcsönösen egyértelmű homomorfizmust fogjuk érteni. Az $A$ és $B$ automatákat *egymás között izomorfoknak* nevezzük akkor, ha létezik az egyik automatának a másikra történő kölcsönösen egyértelmű homomorfizmusa. A homomorfizmusok különböző fajtáinak megfelelő módon léteznek az automaták izomorfizmusainak különböző típusai. Ennek megfelelően az az állítás, hogy az $A$ és $B$ automaták egymással $\mathfrak{A}$-*izomorfok*, nyilván azt jelenti, hogy az $A$ és $B$ automatáknál egybeesnek mind a bemenőjelek, mind pedig a kimenőjelek halmazai, és ugyanakkor létezik az egyik automata állapot-halmazának a másik automata állapot-halmazára való kölcsönösen egyértelmű leképezése, amely átörökíti az átmeneti függvényt és a kimeneti függvényt.

A jelölések lerövidítése céljából állapodjunk meg abban, hogy az ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$)-homomorfizmust (-izomorfizmust) ezentúl egyszerűen csak *homomorfizmusnak (izomorfizmusnak)* fogjuk nevezni. Nyilvánvaló módon ugyanis a homomorfizmusnak (izomorfizmusnak) minden egyéb esetét úgy lehet tekinteni, mint az ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$)-homomorfizmusnak (-izomorfizmusnak) egy speciális esetét, amikor is a homomorfizmust meghatározó leképezések közül az egyik vagy a másik az azonos leképezés.

[2] Miként pl. a csoportelméletben (és általában a homológikus algebrában) ki vannak tüntetve speciális homomorfizmusok, úgy az $A$, $B$ automata-pár esetén is beszélhetünk az $A$ automatának a $B$ automatába való speciális homomorfizmusairól, feltéve azt, hogy az utóbbi leképezések (az $A$ és $B$ egymáshoz való viszonyától függően) léteznek. Így pl. beszélhetünk az $A$ automatának a $B$ automatába való kölcsönösen egyértelmű (monoform) leképezéséről, vagy az $A$ automatának az egész $B$ automatára történő homomorf (epimorf) leképezéséről. Az előbbi esetben a $\Psi_1$, $\Psi_2$ és $\Psi_3$ leképezések egyidejűleg mind kölcsönösen egyértelműek (lásd a homomorfizmus definícióját), az utóbbi esetben pedig a $\Psi_1$, $\Psi_2$ és $\Psi_3$ leképezés mellett a $B$ automata $\mathfrak{A}_1$ állapot-halmazának, $\mathfrak{X}_1$ bemenőjel-halmazának és $\mathfrak{Y}_1$ kimenőjel-halmazának minden eleme fellép mint képelem. (Így pl. $\mathfrak{A}_1$ minden eleme az $A$ automata $\mathfrak{A}$ állapot-halmazából valamilyen $a$ elemnek a $\Psi$ leképezés mellett vett képe lesz.) Továbbá, ha $A=B$ (és persze $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1$), akkor egy nem feltétlenül identikus $\Psi_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ leképezés mellett definiálható csoportelméleti analógiára az $A$ automatának $\mathfrak{A}$-endomorfizmusa (azaz önmagába való $\mathfrak{A}$-homomorf leképezése), továbbá $\mathfrak{A}$-meromorfizmusa (azaz önmagába való $\mathfrak{A}$-izomorf leképezése), valamint $\mathfrak{A}$-autohomorfizmusa (azaz önmagára való $\mathfrak{A}$-homomorf leképezése). Hasonlóan definiálható pl. $\mathfrak{X}$-meromorfizmus, vagy ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{X}$)-autohomomorfizmus stb. és érdekes feladat volna annak a megvizsgálása, hogy ezek az absztrakt (homológikus algebrai) fogalmak a konkrét, elektronikus számológépek, a digitális automaták milyen viszonyainak az absztrakt visszatükröződései. (A fordító megjegyzése.)

Az $\mathfrak{A}$-homomorfizmusokat (izomorfizmusokat) *állapot szerinti homomorfizmusoknak*, továbbá az $\mathfrak{X}$- és $\mathfrak{Y}$-homomorfizmusokat az automata *bemenőjel szerinti*, illetve *kimenőjel szerinti* homomorfizmusainak nevezhetjük.

Valamilyen automata részautomatájának a fogalmát természetes módon így lehet értelmezni: a $B(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \delta_1, \lambda_1)$ automatát az $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ automata *részautomatájának* (pontosabban $(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-részautomatának) nevezzük akkor, ha $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}, \mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}$ és $\mathfrak{Y}_1 \subseteq \mathfrak{Y}$, továbbá a $\delta_1$ és $\lambda_1$ függvények megegyeznek a $\delta$, illetve $\lambda$ függvényekkel az $\mathfrak{A}_1$ és $\mathfrak{X}_1$ részhalmazokon.

Más típusú részautomatákat is lehet még tekinteni az $(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-részautomatákon kívül: így például a $B(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta_1, \lambda_1)$ automatát az $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ automata *$\mathfrak{A}$-részautomatájának* nevezhetjük akkor, ha $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}$, továbbá a $\delta_1$ és $\lambda_1$ függvények egybeesnek a $\delta$, illetve $\lambda$ függvényekkel a megfelelő részhalmazokon.

Az iniciális automaták esetében meg fogjuk egymástól különböztetni az *iniciális* és *nem-iniciális részautomatákat.* Az első esetben az $A$ iniciális automatának a $B$ részautomatája iniciális, éspedig $B$-nek a kezdő állapota egybeesik az $A$ automatának a kezdő állapotával, a második esetben pedig a $B$ automatát mint nem-iniciális automatát tekintjük, ekkor az is előfordulhat, hogy állapothalmazában $B$ nem is tartalmazza az $A$ automata kezdő állapotát.[3]

Valamely automatát *véges*nek nevezünk akkor, ha mindhárom meghatározó $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ halmaz véges. Ugyancsak lényeges szerepük van az automaták absztrakt elméletében az $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-*véges* automatáknak, azaz az olyan automatáknak, amelyeknél a bemenőjelek és kimenőjelek halmazai egyaránt végesek, viszont az állapotok halmaza lehet tetszőleges számosságú, akár véges, akár végtelen. Hasonló módon lehet értelmezni az automaták többi végességi típusát is.[4]

Az automaták absztrakt elmélete további kiépítésének az érdekében minden $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ automatához két szabad félcsoportot fogunk hozzárendelni, legyenek ezek $F(\mathfrak{X})$ és $F(\mathfrak{Y})$, amelyek a bemenőjelek $\mathfrak{X}$, illetve a kimenőjelek $\mathfrak{Y}$ halmaza által szabadon vannak generálva. Ennek megfelelően az $F(\mathfrak{X})$ félcsoportot az automata *bemenő félcsoportjának*, az $F(\mathfrak{Y})$ félcsoportot pedig az automata *kimenő félcsoportjának* nevezzük. Ezeknek a félcsoportoknak az elemeit az $A$ automata *bemenő szavainak*, illetve *kimenő szavainak* szokás nevezni. Ezzel kapcsolatban megjegyzendő, hogy maguknak az $\mathfrak{X}$ és $\mathfrak{Y}$ halmazoknak az elemeit némelykor *bemenő betűknek*, magukat az $\mathfrak{X}$ és $\mathfrak{Y}$ halmazokat pedig az $A$ automata bemenő, illetve kimenő ábécéjének nevezik.

Az $F(\mathfrak{X})$ és $F(\mathfrak{Y})$ félcsoportok elemei szavak, éspedig ezek a bemenő ábécének, illetve a kimenő ábécének a betűiből álló véges sorozatokat jelentenek. A szót alkotó betűk számát a szó *hosszának* nevezzük. A pozitív hosszúságú ($\geqq 1$) szavakkal egyidejűleg igen természetesnek mutatkozik az $F(\mathfrak{X})$ és $F(\mathfrak{Y})$ félcsoportokhoz

[3] Előfordulhat elméletileg az is, hogy a $B$ automatának van kezdő állapota, de az különbözik az $A$ automata kezdő állapotától. (A fordító megjegyzése.)

[4] Az automaták absztrakt elméletében előre megadott $\aleph_\nu$ számossághoz is lehet hasonló számossági korlátozásokat kiszabni. Így pl. a véges automaták az$(\aleph_0, \mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-jelölésű automaták lesznek, az $\mathfrak{A}$-véges automatákat pedig $(\aleph_0, \mathfrak{A})$-automatáknak is nevezhetjük. Általában pedig $(\aleph_\nu, \mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-automatáról akkor beszélünk, ha az $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ halmazok számossága kisebb, mint $\aleph_\nu$. Az $(\aleph_\nu, \mathfrak{A})$-automatáknál csak az $\mathfrak{A}$ állapot-halmaztól kívánjuk meg, hogy $\aleph_\nu$-nél kisebb számosságú legyen. Hasonlóan értelmezhetők az $(\aleph_\nu, \mathfrak{A}, \mathfrak{X})$-automaták, az $(\aleph_\nu, \mathfrak{A}, \mathfrak{Y})$- és $(\aleph_\nu, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-automaták stb. Nyilvánvalóan bármely $(\aleph_\nu, \mathfrak{A}, \mathfrak{X})$-automata egyszersmind $(\aleph_\nu\ \mathfrak{A})$-automata és persze $(\aleph_\nu, \mathfrak{X})$-automata is lesz, továbbá $\aleph_\nu \leqq \aleph_\mu$ esetén bármely $(\aleph_\nu, \mathfrak{A})$-automata még inkább $(\aleph_\mu, \mathfrak{A})$-automata is lesz stb. (A fordító megjegyzése).

hozzávenni az *üres szót*, azaz olyan szót, amelynek nulla a hosszúsága. Az üres szó jelölésére az $e$ betűt rögzítjük.[5]

Az $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ automatára vonatkozó bemenő és kimenő félcsoporttal egyidejűleg célszerűnek mutatkozik az is, hogy az $\mathfrak{A}$ halmaz által szabadon generált) $F(\mathfrak{A})$ szabad félcsoportot tekintsük, amelyet tehát az automata állapotainak a halmaza generál szabadon. Állapodjunk meg abban, hogy ezt a félcsoportot az $A$ automata *állapot-félcsoportjának* nevezzük, elemeit pedig az automata *állapot-szavainak*.

Ennek alapján elvégezhető az $A$ automata $\delta(a, x)$ átmeneti függvénye és $\lambda(a, x)$ kimeneti függvénye értelmezési tartományának a *természetes kiterjesztése* az $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}$ halmazról az $\mathfrak{A}\times F(\mathfrak{X})$ halmazra, a következő előírás szerint: bármely $p=x_1\cdot x_2 \dots x_k$ bemenő szóra és bármely $a\in\mathfrak{A}$ állapotra nézve legyen $\delta(a,p)= =a_1\cdot a_2 \dots a_k$, ahol $a_1=\delta(a, x_1)$, $a_2=\delta(a_1, x_1), \dots, a_k=\delta(a_{k-1}, x_k)$ és $\lambda(a,p)= =y_1\cdot y_2 \dots y_k$, ahol $y_1=\lambda(a, x_1)$, $y_2=\lambda(a_1, x_2), \dots, y_k=\lambda(a_{k-1}, x_k)$. Az $e=p$ esetre pedig legyen $\delta(a,p)=\lambda(a,p)=e$.

Állapodjunk meg abban is, hogy az ilyen módon kapott $\delta(a, x)$ és $\lambda(a, x)$ függvényeket az $A$ automata *kiterjesztett átmeneti-*, illetve *kiterjesztett kimeneti függvényének* fogjuk nevezni; ezek megadják az $\mathfrak{A}\times F(\mathfrak{X})$ halmaznak az $F(\mathfrak{A})$ halmaznak az $F(\mathfrak{A})$, illetve $F(\mathfrak{Y})$ halmazba való leképezését. Az $a_1\cdot a_2 \dots a_k$ és $y_1\cdot y_2 \dots y_k$ szavakat a $p$ bemenő szónak megfelelő *állapot-szónak*, illetve *kimenő-szónak* nevezzük az $a$ állapotban.

Bevezetjük a következő fontos fogalmakat:

2. DEFINÍCIÓ.: Az $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ automata $a\in\mathfrak{A}$ *állapota által indukált* $\varphi_a$ *leképezésnek* nevezzük a bemenő félcsoportnak a kimenő félcsoportba való olyan leképezését, amely a $p$ tetszőleges bemenő szónak a $\varphi_a(p)=\lambda(a,p)$ kimenő szót felelteti meg. Az $A$ automata által indukált *leképezési családnak* nevezzük az összes, páronként különböző $\varphi_a(a\in\mathfrak{A})$ leképezések sokaságát. Valamely iniciális automata *által indukált leképezésnek* fogjuk nevezni a kezdő állapota által indukált leképezést.

3. DEFINÍCIÓ: *Az olyan A és B automatákat, amelyeknél* mind a bemenő, mind pedig a kimenő ábécék egymással egybeesnek, *ekvivalenseknek* nevezzük akkor, ha azok a leképezéseknek egy és ugyanazon családját indukálják. Az $A$ és $B$ iniciális automatákat *iniciálisan ekvivalenseknek* nevezzük akkor, ha a kezdő állapotaik egy és ugyanazon leképezéseket indukálják. Végül, két állapotot, akár ugyanazon automatához tartoznak, akár nem, akkor nevezünk *egymással ekvivalensnek*, ha azok egy és ugyanazon leképezéseket indukálnak.

A 3. definícióból közvetlenül folyik a következő állítás:

1. TÉTEL: *Az A és B automaták egymással akkor és csak akkor ekvivalensek, ha az A automata tetszőleges állapotához található a B automatának egy vele ekvivalens állapota és viszont.*

Könnyű látni, hogy két $\mathfrak{A}$-izomorf (az állapotra vonatkozólag izomorf) automata egymással ekvivalens (a megfordított állítás, magától értetődően, nem érvényes). Érvényes a következő, sokkal általánosabb állítás.

[5] Itt nem árt hangsúlyozni azt, hogy a félcsoportnak az egységeleme az üres szó lesz, továbbá a félcsoportban az elemek szorzása a szavak juxtapozíciója (egymás mellé való írása) révén történik. (A fordító megjegyzése.)

2. TÉTEL. *Ha létezik az* $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ *automatának a* $B(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta_1, \lambda_1)$ *automatára való* $\Psi$ $\mathfrak{A}$*-homomorfizmusa (állapot szerint való homomorfizmusa), akkor az A és B automata egymással ekvivalens.*

BIZONYÍTÁS: Az 1. tétel értelmében nyilván elegendő a 2. tétel bizonyításához azt igazolni, hogy az $a$ és $\Psi(a)$ állapotok ekvivalensek. Jelölje $p=x_1\cdot x_2 \ldots x_k$ az $A$ automata egy tetszőleges bemenő szavát, $\delta(a,p)=a_1\cdot a_2 \ldots a_k$ az ennek megfelelő állapot-szót az $a$ állapotban, továbbá $\delta_1(b,p)=b_1 b_2 \ldots b_k$ a megfelelő állapot-szót a $B$ automatának a $b=\Psi(a)$ állapotában. Ekkor az $\mathfrak{A}$-homomorfizmus értelmezésénél fogva azt kapjuk, hogy

$$\Psi(a_1)=\Psi(\delta(a,x_1))=\delta_1(b,x_1)=b_1;$$

$$\Psi(a_2)=\Psi(\delta(a_1,x_2))=\delta_1(\Psi(a_1),x_2)=\delta_1(b_1,x_2)=b_2$$

$$\Psi(a_k)=\Psi(\delta(a_{k-1},x_k))=\delta_1(\Psi(a_{k-1}),x_k)=\delta_1(b_{k-1},x_k)=b_k.$$

Ha $q=\lambda(a,p)=y_1\cdot y_2 \ldots y_k$ azt a kimenő szót jelöli, amely az $A$ automata $a$ állapotában a $p$ szónak felel meg, és $q'=\lambda_1(b,p)=y_1'\cdot y_2' \ldots y_k'$ azt a kimenő szót, amely a $p$ bemenő szónak felel meg a $B$ automata $b=\Psi(a)$ állapotában, akkor az $\mathfrak{A}$-homomorfizmus definíciója szerint ezt kapjuk:

$$y_1=\lambda(a,x_1)=\lambda_1(\Psi(a),x_1)=\lambda_1(b,x_1)=y_1';$$
$$y_2=\lambda(a_1,x_2)=\lambda_1(\Psi(a_1),x_2)=y_2';$$
$$y_k=\lambda(a_{k-1},x_k)=\lambda_1(\Psi(a_1),x_k)=\lambda_1(b_{k-1},x_k)=y_k'.$$

Ilyen módon $q=q$, és ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A 2. tételből az automaták ekvivalenciájának nyilvánvalóan szimmetrikus és tranzitív sajátossága alapján közvetlenül adódik a következő eredmény.

KÖVETKEZMÉNY: *Ha a B és C automatákhoz létezik olyan A harmadik automata, amely* $\mathfrak{A}$*-homomorf módon képezhető le a B és C automatákra, akkor B és C ekvivalensek egymással.*

Ugyancsak érvényes ennek az állításnak a következő (élesített) megfordítása.

3. TÉTEL: *Az összes egymással ekvivalens automata* $\mathfrak{M}$ *halmazában létezik egy, éspedig* $\mathfrak{A}$*-izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott olyan automata, amelyre az* $\mathfrak{M}$ *halmazból bármely automata* $\mathfrak{A}$*-homomorf módon leképezhető. Ennek az automatának az állapotai páronként nem ekvivalensek, és állapothalmazának a számossága legfeljebb annyi, mint az* $\mathfrak{M}$ *halmazból egy tetszőleges automata állapot-halmazának a számossága.*

BIZONYÍTÁS: Jelöljön $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ tetszőleges automatát az $\mathfrak{M}$ halmazból. Az $A$ automatának az $\mathfrak{A}$ állapot-halmaza felbontható olyan páronként idegen részhalmazokra, hogy egy osztályon belül bármely két állapot-halmaz egymással ekvivalens legyen. Ezeket a részhalmazokat nevezzük az automata ekvivalencia-osztályainak. Jelölje $\mathfrak{B}$ az összes ilyen osztálynak a halmazát, és készítsük el a $B(\mathfrak{B}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta_1, \lambda_1)$ automatát, amelynél tehát az állapotok halmaza éppen $\mathfrak{B}$.

A $B$ automata $\lambda_1(b,x)$ kimeneti függvényét a következőképpen definiáljuk: a $B$ automata tetszőleges $b$ állapotához és tetszőleges $x\in\mathfrak{X}$ bemenő jeléhez értelmezzük a keresett függvényt úgy, hogy $\lambda_1(b,x)=\lambda(a,x)$ legyen, ahol $a$ tetszőleges állapot az $A$ automata $b$ ekvivalencia-osztályából. Az ilyen módon értelmezett $\lambda_1(b, x)$ függvény értéke nem függ attól, hogy a $b$ ekvivalencia-osztályból speciálisan hogyan választjuk ki az $a$ állapotot.

Az automata valamely állapota által indukált leképezés értelmezéséből közvetlenül kapjuk, hogy az $A$ automata $a_1$ és $a_2$ állapotainak ekvivalenciájából következik a $\delta(a_1, x)$ és $\delta(a_2, x)$ állapotok ekvivalenciája. Ilyen módon tetszőleges $x$ bemenő jel a $b$ ekvivalencia-osztályt alkotó összes állapotot ugyanazon $b_1$ ekvivalencia-osztályhoz tartozó állapotokba viszi át. Ennek megfelelően a $\delta_1(b, x)=b_1$ előírással definiálhatjuk a $B$ automata átmeneti függvényét.

Könnyű belátni, hogy az $A$ automatának egy tetszőleges $a$ állapota ekvivalens a $B$ automatának az őt tartalmazó $b$ állapotával (amely az $A$ automatának ekvivalencia-osztálya). Legyen ugyanis $p=x_1 \cdot x_2 \ldots x_k$ az $A$ és $B$ automaták tetszőleges bemenő szava és legyen

$$a_1 \cdot a_2 \ldots a_k = \delta(a, p)$$

$$y_1 \cdot y_2 \ldots y_k = \lambda(a, p).$$

(Itt $\delta$ és $\lambda$ az $A$ automata kiterjesztett átmeneti, illetve kimeneti függvénye.) Jelölje $b_i$ az $a_i (i=1, 2, \ldots, k)$ állapotokat tartalmazó ekvivalencia-osztályokat, és készítsük el a $B$ automatának a $\delta_1(b, p)$ és $\lambda_1(b, p)$ kiterjesztett átmeneti, illetve kimeneti függvényét. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\delta_1(b, p) = b_1' \, b_2' \ldots b_k'; \quad \lambda_1(b_1 \, p) = y_1', y_2' \ldots y_k',$$

ahol

$$b_1' = \delta_1(b_1 \, x_1), b_2' = \delta_1(b_1', x_2), \ldots, b_k' = \delta_1(b_{k-1}', x_k);$$
$$\vdots$$
$$y_1' = \lambda_1(b, x_1), y_2' = \lambda_1(b_1', x_2), \ldots, y_k' = \lambda_1(b_{k-1}', x_k).$$

Jelölje most $\Psi$ azt a leképezést, amely hozzárendeli az $A$ automatának bármelyik állapotához az azt tartalmazó ekvivalencia-osztályt. Összhangban a $\delta_1$ és $\lambda_1$ függvények értelmezésével azt kapjuk, hogy

$$b_1' = \delta_1(b, x) = \Psi(\delta(a, x_1)) = \Psi(a_1) = b_1$$

$$b_2' = \delta_1(b_1', x_2) = \Psi(\delta(a_1, x_2) = \Psi(a_2) = b_2$$

$$\vdots$$

$$b_k' = \delta_1(b_{k-1}', x_k) = \delta_1(b_{k-1}, x_k) = \Psi(\delta(a_{k-1}, x_k)) = \Psi(a_k) = b_k$$

$$y_1' = \lambda_1(b, x_1) = \lambda(a, x_1) = y_1$$

$$y_2' = \lambda_1(b_1', x_1) = \lambda_1(b_1, x_2) \ \lambda(a_1, x_2) = y_2$$

$$\vdots$$

$$y_k' = \lambda_1(b_{k-1}', x_k) = \lambda_1(b_{k-1}, x_k) = \lambda(a_{k-1}, x_k) = y_k.$$

Ilyen módon az $y_1 \cdot y_2 \ldots y_k$ és az $y_1' \cdot y_2' \ldots y_k'$ szavak egybeesnek, ami a $p=x_1 \cdot x_2 \ldots x_k$ tetszőleges megválasztásánál fogva azt jelenti, hogy az $a$ és $b=\Psi(a)$ állapotok egymással ekvivalensek. Az 1. tétel értelmében ez azt eredményezi, hogy az $A$ és $B$ automaták egymással ekvivalensek. A $B$ automata tehát benne van az $\mathfrak{M}$ halmazban.

Ha most a $B$ automatának két különböző $b'$ és $b''$ állapotát egymással ekvivalensnek tételeznénk fel, akkor kiválasztva belőlük az $A$ automatának a hozzájuk tartozó $a'$, ill. $a''$ állapotait, a fentieknek megfelelően azt kapnánk, hogy az $a'$ állapot ekvivalens a $b'$ állapottal és az $a''$ állapot pedig ekvivalens a $b''$ állapottal. Ennélfogva ezek az állapotok átmennek egy és ugyanazon ekvivalencia-osztályba, más szavakkal a $b'$ és $b''$ állapotok egymással egybeesnének. Ilyen módon bebizonyítottuk, hogy $B$ automata állapotai páronként nem ekvivalensek.

Legyen most $C(\mathfrak{C}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta_2, \lambda_2)$ egy tetszőleges automata az $\mathfrak{M}$ halmazból. A fentebb bebizonyítottak alapján a $B$ és $C$ automaták egymással ekvivalensek. Következésképpen a $C$ automata tetszőleges $c$ állapotához található az 1. tétel értelmében a $B$ automatának egy vele ekvivalens $b$ állapota. Minthogy pedig a $B$ automatának nincsenek egymással ekvivalens különböző állapotai, ezért a $b$ állapot egyértelműen meg van határozva a $c$ állapot által. Ilyen módon, megfeleltetve a $C$ automata bármely $c$ állapotának a vele ekvivalens $\varphi(c)=b$ állapotot a $B$ automatából, a $C$ automata $\mathfrak{C}$ állapot-halmazának egyértelmű leképezését definiáljuk a $B$ automata $\mathfrak{B}$ állapot-halmazába. Bebizonyítjuk, hogy ez a $\varphi$ leképezés $\mathfrak{A}$-homomorfizmus.

Valóban, a $C$ automata tetszőleges $c$ állapotára és tetszőleges $x$ bemenőjelére nézve a $c$ és $\varphi(c)$ állapotok ekvivalenciája alapján azt kapjuk, hogy $\lambda_2(c,x)= =\lambda_1(\varphi(c),x)$. Továbbá, minthogy tetszőleges bemenőjel hatására az ekvivalens állapotok ugyancsak egymással ekvivalens állapotokba mennek át, azt fogjuk kapni, hogy $\Psi(\delta_2(c,x))=\delta_1(\Psi(c),x)$. Ennélfogva a leképezés valóban $\mathfrak{A}$-homomorfizmus lesz. A $\varphi$ leképezés egyértelműsége miatt a $B$ automata $\mathfrak{B}$ állapot-halmazának a számossága nem haladja meg a $C$ automata $\mathfrak{C}$ állapot-halmazának a számosságát. Ezzel a 3. tételt teljesen bebizonyítottuk.

A most bebizonyított tétel alapján természetes módon adható meg a következő:

4. DEFINÍCIÓ: Egy automatát (*Mealy*-féle automatát) *redukáltnak* nevezünk akkor, ha bármely két különböző állapota egymással nem ekvivalens.

A 3. tétel bizonyítása lényegileg egy tetszőleges $A$ *Mealy*-féle automata *redukálásának* az eljárását adja, azaz más szavakkal: egy olyan redukált *Mealy*-féle automatának a megszerkesztését szolgáltatja, amely az adott $A$ automatával ekvivalens. Ez az eljárás a véges *Mealy*-féle automatákkkal kapcsolatban bevezetett eljárásnak a tetszőleges automatákra való általánosítása, amely magából az eredeti *Mealy*-féle [19] eljárásból, valamint az *Aufenkamp—Hohn*-féle tökéletesített későbbi [1] eljárásból fejlődött ki, továbbá a *Netherwood*-féle [21], és a *Paull—Unger*-féle [22] eljárásból. (Lásd még a [12] dolgozatot is.) A fent említett továbbfejlesztések főképpen az ekvivalencia-osztályok tényleges megtalálására vonatkoznak a *véges* automaták esetében, és ugyanarra az alapgondolatra vezethetők vissza.

Ennek a gondolatnak az a lényege (lásd [12]), hogy kiindulásképpen az automata összes állapotának a halmazát szétbontjuk úgynevezett *1-osztályokra*: az $a, b, \ldots$ állapotok akkor tartoznak egy és ugyanazon 1-osztályhoz, ha a $\lambda(a,x)$, $\lambda(b,x), \ldots$ kimenőjelek az $x$ bemenőjel tetszőleges megválasztása mellett egymással megegyeznek. Az 1-osztályok szétbonthatók úgynevezett *2-osztályokra*, éspedig úgy, hogy az egy és ugyanazon 1-osztályba tartozó $a, b, \ldots$ állapotok akkor tartoznak ugyanabba a 2-osztályba, ha az $x$ bemenőjel tetszőleges megválasztása mellett a $\delta(a,x)$ és $\delta(b,x)$ állapotok egy és ugyanazon ($K_1(x)$-szel jelölt) 1-osztályba tartoznak. Ez a $K_1(x)$ osztály függ $x$-től, de független attól, hogy a 2-osztályból melyik $a, b, \ldots$ állapotot tekintjük.

Az 1-osztályok 2-osztályokra való *tovább-bontásának* ez a művelete szóról szóra átvihető a 2-osztályoknak a további felbontására. Ennek eredményeképpen adódnak a 3-osztályok; ezekre alkalmazva a felbontási eljárást, kapjuk a 4-osztályokat stb. Véges automaták esetében véges számú lépés után valamilyen $i(\geqq 1)$ mellett az $(i+1)$-osztályok feltétlenül egybeesnek az $i$-osztályokkal. Ekkor az $i$-osztályok lesznek az alapul vett automata keresett ekvivalencia-osztályai.

Az automaták absztrakt elméletének gyakorlati alkalmazásaiban olykor dolgunk akad olyan automatákkal is, amelyeknél a $\delta(a, x)$ átmeneti függvény és a $\lambda(a, x)$ kimeneti függvény nincs értelmezve az összes $a, x$ elempáron, hanem csak bizonyos ilyen elempárokon. Az ilyen automatákat természetes módon *parciális automatáknak* nevezik. A parciális automaták elmélete abban különbözik a közönséges automaták elméletétől (az utóbbiakat lehetne *teljesen értelmezett automatáknak* is nevezni), hogy a parciális automaták állapotai nem mindenhol értelmezett leképezéseket, hanem csak parciális leképezéseket létesítenek. Ekkor az automaták és állapotaik ekvivalenciájának fogalmai az *összeegyeztethetőség* sokkal általánosabb fogalmával helyettesítődnek, amely a létesített leképezéseknek az értelmezési tartományok *metszetében* való egybeesésén alapul (Vö. [12]).

A parciális automaták redukálásának az elmélete lényegesen bonyolultabbnak mutatkozik, mint a teljesen értelmezett (azaz közönséges) automaták redukálási elmélete, mindenekelőtt azért, mert a 3. tételhez hasonló tétel a parciális automatákra vonatkozólag már nem érvényes. E cikk terjedelmének korlátozottsága nem engedi meg azt, hogy ennek az elméletnek a részleteit megtárgyaljuk.[6] Itt csupán azt említjük meg, hogy gyakorlati célokra az esetek többségében elegendőnek mutatkozik az a módszer, amelynek lényege az, hogy a parciális automatát közönséges (azaz teljesen értelmezett) automatává *„átdefiniáljuk"*[7] és aztán az ilyen módon nyert automata redukálását végezzük el.

A véges parciális automaták redukálására szolgáló speciális módszerek AUFENKAMP [2], NETHERWOOD [21], PAULL és UNGER [22] dolgozataiban, valamint GINSBURG több dolgozatában (pl. [6]) fejlődtek ki. Mindezek a módszerek kifejezetten alkalmazási jellegűek, és ebben a dolgozatban nem részletezzük őket.

A parciális automaták fent említett „átdefiniálása" lehetőséget nyújt arra, hogy bármely parciális automatát valamilyen teljesen értelmezett automata parciális részautomatájaként tekintsük. Azokra a célokra, amelyeket jelen dolgozat tart szem előtt, elegendő az, hogy csupán utaljunk az ilyen lehetőségekre, és ezért a továbbiakban csak a teljesen értelmezett automatákra korlátozzuk magunkat. Ennek megfelelően a továbbiakban az „automata" elnevezésen mindig közönséges, mindig azaz teljesen értelmezett automata értendő.

A már értelmezett (*Mealy*-féle) automatákkal egyidejűleg célszerűnek mutatkozik megvizsgálni egy fontos speciális esetet, az ún. *Moore-féle automatákat.*

[6] Az érdeklődők a részletekkel megismerkedhetnek pl. a szerző [12] cikkéből.

[7] Ennél az „átdefiniálásnál" természetesen nincs szó két nem azonos fogalom helytelen azonosításáról, sem pedig a $\delta(a, x)$ és $\lambda(a, x)$ függvények értékeinek a megváltoztatásáról, hanem csupán az értelmezési tartományok kibővítéséről és az említett függvények kiterjesztéséről. Ha tehát a parciális automata állapot-halmaza $\mathfrak{A}$, bemenőjel-halmaza $\mathfrak{X}$, akkor választunk alkalmas bővebb $\mathfrak{A}'(\supseteqq\mathfrak{A})$ és $\mathfrak{X}'$ $(\supseteqq\mathfrak{X})$ halmazokat, és az említett függvények az $\mathfrak{A}'\times\mathfrak{X}'$ halmazon nyilván az $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}$ halmazon vett eredeti $\delta(a, x)$ és $\lambda(a, x)$ függvények folytatásai, kiterjesztései lesznek. (A fordító megjegyzése.)

5. DEFINÍCIÓ: Az $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ automatát akkor nevezzük *Moore-féle automatának*, ha a $\lambda(a, x)$ kimeneti függvény előállítható $\lambda(a, x) = \mu(\delta(a, x))$ alakban, ahol $\delta(a, x)$ az $A$ automata átmeneti függvénye, $\mu(a)$ pedig olyan egyértelmű függvény, amely megadja az $A$ automata $\mathfrak{A}$ állapothalmazának az $\mathfrak{Y}$ kimenőjelhalmazba történő leképezését. Ezt a $\mu(a)$ függvényt az automata *jel-függvény*ének, vagy másképpen az automata *retardált kimeneti függvény*ének nevezik. Ennek a $\mu(a)$ függvénynek az értékét valamely $a$ állapotra vonatkozólag az *a állapot jel*ének nevezik.

A *Moore*-féle automata első fogalma MOORE [20] dolgozatában szerepelt (lásd még MEDVEGYEV [17]), de csak a véges automaták esetére, és figyelmen kívül hagyva a *Mealy*-féle automatákkal való kapcsolatot. Megjegyezzük, hogy a *Moore*-féle automaták csak az absztrakt elmélet szintjén tekinthetők úgy, mint a *Mealy*-féle automaták speciális esetei. Az automatákat megvalósító rendszerekre való áttérésnél, figyelembe véve az idő tényezőt is, célszerű az automatáknak ezt a két típusát (praktikus szempontból) lényegesen különbözőnek tekinteni.

Ezzel egyidejűleg a *Moore*-féle automaták az absztrakt elméletben is külön vizsgálatra figyelemre méltó objektumoknak tekinthetők. Sok esetben a *Moore*-féle automaták sajátságos tulajdonságai megengedik, hogy rájuk vonatkozólag természetesebb és mélyebb elméletet építsünk ki, mint a tetszőleges *Mealy*-féle automatákra vonatkozólag. Ezzel kapcsolatban fontos szerep jut annak a körülménynek, hogy a *Moore*-féle automaták az általuk létesített leképezések sokfélesége szempontjából nem szegényesebbek a tetszőleges *Mealy*-féle automatáknál.

4. TÉTEL: *Tetszőleges $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ Mealy-féle automatához létezik egy vele ekvivalens B Moore-féle automata, továbbá ha az A automata véges, akkor a B automata ugyancsak végesnek választható oly módon, hogy B állapotainak száma $(m+1)\cdot n$ legyen, ahol m az A automata bemenőjeleinek és n az A automata állapotainak a száma.*

BIZONYÍTÁS: Az $A$ automata minden egyes $a$ állapotának feleltessük meg az $(a_0, a_\alpha = (a, x_\alpha))$ állapotoknak a halmazát, ahol $x_\alpha$ befutja a bemenőjelek $\mathfrak{X}$ halmazát. Az ilyen módon kapott állapotokat tekintsük egy $B$ automata állapotaiként. A $B$ automata $\delta_1$ átmeneti függvényét értelmezzük a következőképpen:

$$\delta_1(a_0, x_\beta) = (a, x_\beta); \ \delta_1((a_1, x_\alpha), x_\beta) = (\delta(a, x_\alpha), x_\beta).$$

A $B$ automata $\lambda_1$ kimeneti függvénye legyen

$$\lambda_1(a_0, x_\beta) = \lambda(a, x_\beta); \ \lambda_1((a, x_\alpha), x_\beta) = \lambda(\delta(a, x_\alpha), x_\beta).$$

Jelölje $\mu(b)$ azt a függvényt, amely hozzárendeli a $B$ automata $b = (a, x_\beta)$ állapotához a $\lambda(a, x_\beta)$ kimenőjelet. Akkor

$$\lambda_1(a_0, x_\beta) = \mu(\delta_1(a_0, x_\beta))$$

$$\lambda_1((a, x_\alpha), x_\beta) = \mu(\delta_1(a, x_\alpha), x_\beta).$$

Következésképpen a $B$ automata *Moore*-féle automata.

Jelöljön most $a_1 \cdot a_2 \ldots a_k$ olyan állapot-szót, $y_1 \cdot y_2 \ldots y_k$ olyan kimenő szót, amelyek a tetszőleges $p = x_1 \cdot x_2 \ldots x_k$ bemenő szóhoz rendelődnek hozzá az $A$ automata $a$ állapotában. A $\delta_1$ és $\lambda_1$ függvények értelmezéséből következik, hogy a $B$

automata $a_0$ állapotában a $p$ bemenő szóhoz a $b_1 \cdot b_2 \dots b_k$ állapot-szó rendelődik hozzá, amelynek elemeit (betűit) a következő módon definiáljuk:

$$b_1 = \delta_1(a_0, x_1) = (a, x)$$
$$b_2 = \delta_1(b_1, x_2) = (\delta(a, x_1), x_2) = (a_1, x_2)$$
$$\vdots$$
$$b_k = \delta_1(b_{k-1}, x_k) = (\delta(a_{k-2}, x_{k-1}, )x_k) = (a_{k-1}, x_k).$$

Hasonló módon definiáljuk az $y_1' \cdot y_2' \dots y_k'$ kimenő szót, amely a $B$ automatának az $a_0$ állapotában hozzárendelődik a $p$ bemenő szóhoz:

$$y_1' = \lambda_1(a_0, x_1) = \lambda(a, x) = y_1$$
$$y_2' = \lambda_1(b_1, x_2) = \lambda_1((a, x_1), x_2) = \lambda(\delta(a, x_1), x_2) = \lambda(a_1, x_2) = y_2$$
$$y_k' = \lambda_1(b_{k-1}, x_k) = \lambda_1((a_{k-2}, x_{k-1}), x_k) = \lambda(\delta(a_{k-2}, x_{k-1}), x_k) =$$
$$= \lambda(a_{k-1}, x_k) = y_k.$$

Ilyen módon az $y_1, y_2, \dots, y_k$ és $y_1', y_2', \dots, y_k'$ kimenő szavak egymással egybeesnek, amely a $p$ szó tetszőleges megválasztása következtében azt jelenti, hogy az $a$ és $a_0$ állapotok ekvivalensek. Minthogy pedig ugyanazon bemenőjel által az ekvivalens állapotok ugyancsak ekvivalens állapotokba mennek át, ezért tetszőleges $x_\alpha \in \mathfrak{X}$ mellett a $B$ automata $(a, x_\alpha)$ állapota ekvivalens az $A$ automata $\delta(a, x_\alpha)$ állapotával. Ilyen módon a $B$ automata egy tetszőleges állapotához található az $A$ automatának egy vele ekvivalens állapota. A megfordított reláció ugyancsak bizonyított. Ezért az 1. tétel alapján megállapíthatjuk, hogy az $A$ és $B$ automaták valóban ekvivalensek.

A 4. tételnek az az állítása, amely a $B$ automata állapotainak a számára vonatkozik, közvetlen következménye annak a bemutatott eljárásnak, amellyel a $B$ automatát megszerkesztettük. Ezzel a tételt teljesen bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy az imént bebizonyított tétel az A. S. Bloh (lásd [4], 1. tétel) eredményének az élesítése.

A *Moore*-féle automatákkal való műveleteknél figyelembe kell venni azt a körülményt is, bár egy *Moore*-féle automatának akármilyen részautomatája, és tetszőleges olyan automata, amely izomorf egy *Moore*-féle automatával, ugyancsak *Moore*-féle automata lesz, homomorfizmusnál azonban nem őrződik meg az automatának az a tulajdonsága, hogy a kép-automata is *Moore*-féle automata lesz. Ugyanígy előfordulhat az is, hogy egy *Moore*-féle automatával ekvivalens automata nem lesz *Moore*-féle automata.

Ezért szükséges bevezetni a *Moore-féle homomorfizmus* és a *Moore-féle ekvivalencia* fogalmát.

Ennek a célnak az érdekében mindenekelőtt megjegyezzük azt a nyilvánvaló tényt, hogy az 5. definíció értelmében a *Moore*-féle automata $\mu(a)$ jel-függvénye egyértelmű módon értelmezhető az automata átmeneti és kimeneti függvénye segítségével az összes olyan $a$ állapotra vonatkozóan, amelyeket az automata átmeneti függvénye értékként felvesz. A többi állapotra vonatkozólag a jel-függvény nincs értelmezve, ezeket az állapotokat „*nem-megjelölteknek*" fogjuk nevezni. Állapodjunk meg a *Moore*-féle automaták vizsgálatánál a továbbiak során abban, hogy valamilyen módon a jel-függvényt úgy *definiáljuk át*, hogy az összes állapot már „megjelölt" legyen.

Ezzel kapcsolatban *az összes további vizsgálatnál a Moore-féle automatákat nem az átmeneti és kimeneti függvényekkel fogjuk megadni, hanem az átmeneti függvénnyel és a jel-függvénnyel, amikor a kimeneti függvényt szükségképpen az átmeneti függvénynek és a jel-függvénynek az egymásbahelyettesítésével értelmezzük:*

$$\lambda(a, x) = \mu(\delta(a, x)).$$

Most már be lehet vezetni a *Moore-féle homomorfizmusnak* és a *Moore-féle ekvivalenciának* a fogalmát.

6. DEFINÍCIÓ: *Az* $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \mu)$ *Moore-féle automatának a* $B(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \delta_1, \mu_1)$ *Moore-féle automatába való* $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ *homomorfizmusát Moore-félé*nek nevezzük, hogyha $\varphi$ megőrzi a jel-függvényt, azaz tetszőleges $a \in \mathfrak{A}$ állapot mellett $\varphi_3(\mu(a)) = \mu_1(\varphi_1(a))$, és speciálisan az $\mathfrak{A}$;-homomorfizmus esetére: $\Psi(\mu(a)) = \mu_1(\Psi(a))$. Az ekvivalens állapotokat *Moore-féle módon ekvivalens* állapotoknak nevezzük akkor, ha azok egyformán „megjelöltek". *Két Moore-féle automatát Moore-féle módon ekvivalensnek* nevezünk akkor, ha az egyik automatának akármilyen állapotához létezik a másik automatának egy vele *Moore*-féle módon ekvivalens állapota, és megfordítva. A *Moore*-féle homomorfizmusra és *Moore*-féle ekvivalenciára vonatkozólag az előzőekhez teljesen hasonló módon az alábbi tételek, amelyek a 2. és 3. tételeknek felelnek meg.

5. TÉTEL: *Ha létezik az A Moore-féle automatának a B Moore-féle automatára való* $\Psi$ *Moore-féle* $\mathfrak{A}$*-homomorfizmusa, akkor az A és B automaták egymással Moore-féle módon ekvivalensek. Az A automata tetszőleges a állapota Moore-féle módon ekvivalens lesz a hozzátartozó* $\Psi(a)$ *állapottal.*

6. TÉTEL: *Az összes, egymás közt Moore-féle módon ekvivalens automatának az* $\mathfrak{M}$ *halmazában létezik egy, éspedig Moore-féle* $\mathfrak{A}$*-izomorfizmustól eltekintve pontosan csak egy olyan automata, amelyre az* $\mathfrak{M}$ *halmazból bármely automata Moore-féle homomorf módon leképezhető. Ennek az automatának az állapotai páronként Moore-féle módon nem ekvivalensek, és állapot-halmazának számossága legfeljebb annyi, mint az* $\mathfrak{M}$ *halmazból egy tetszőleges automata állapot-halmazának a számossága.*

Az 5. és 6. tételek bizonyítása majdnem szó szerint ugyanúgy végezhető el, mint a 2. és 3. tételek bizonyítása, ezért a bizonyításokat nem végezzük el.

7. DEFINÍCIÓ: Egy Moore-féle automatát *Moore-féle módon redukáltnak* nevezünk akkor, ha tetszőleges két különböző állapota egymással *Moore*-féle módon nem ekvivalens.

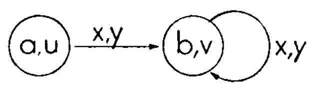
A *Moore-féle módon való redukálásnak* a művelete a redukálás általános műveletéhez hasonlóan végezhető el. A különbség csupán abban áll, hogy a *Moore*-féle ekvivalencia-osztályok képzésénél nem az 1-osztályok megszerkesztésével kell a dolgot kezdeni, hanem a 0-osztályoknak a megszerkesztésével, amikor egy és ugyanazon 0-osztályhoz tartozik az adott automatának az összes egyformán megjelölt állapota.

Bemutatjuk még az automaták megadására szolgáló eljárásokat. A véges automaták esetében a *Mealy*-féle automatákat teljesen meg lehet adni az átmenetek és kimenetek kétbemenetelű *műveleltáblázataival*, amelyek az automata átmeneti, illetve kimeneti függvényét írják le. Ezeknek a műveleltáblázatoknak a sorai a bemenő jeleknek, oszlopai pedig az automata állapotainak felelnek meg.

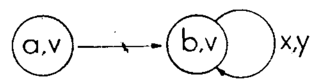
A véges *Moore*-féle automaták általában az átmenetek úgynevezett *megjelölt műveleltábláival* vannak megadva, ahol a tábla különböző oszlopait megjelölő állapotok fölé írják az állapotoknak a jeleit is.[8]

Lényegesen szemléletesebb az az eljárás, amely lineáris, irányított *gráfok* segítségével adja meg az automatákat. Jelöljék ezen a gráfon körök az automata állapotait. Ha az $a$ és $b$ állapotok a $b=\delta(a, x)$ kapcsolatban állanak, akkor az a kör, amely a gráfon az $a$ állapotnak felel meg, legyen összekötve a $b$ állapotnak megfelelő körrel egy olyan nyíl által, amelyet $x$ betűvel jelölünk. Ha az $(a, x)$ párnak az $y=\lambda(a, x)$ kimenő jel felel meg, akkor a *Mealy*-féle automaták esetében az a nyíl, amely az $a$ körtől halad a $b=\delta(a, x)$ kör irányába, egy másik betűjelet is kap: az $y$ kimenő jelnek megfelelően. Az állapotoknak egy és ugyanazon (rendezett) párját összekötő nyilakat általában egy nyíllal helyettesítjük.

Egy másik jelölési mód is használatos a *Moore*-féle automaták esetében: az automatának az állapotait megjelölő köröcskékben ezeknek az állapotoknak a megnevezéseivel egyidejűleg be vannak írva ezeknek az állapotoknak a jel-függvényei is. Az 1. és 2. ábrán két *Moore*-féle automatának a gráfja látható (itt az $a$ és $b$ betűk állapotokat, az $x$ és $y$ betűk bemenő jeleket, az $u$ és $v$ betűk pedig kimenő jeleket jelentenek).




*1. ábra*




*2. ábra*

Könnyű igazolni, hogy az ezekkel a gráfokkal megadott automaták izomorfok, de ugyanakkor nem *Moore*-féle módon izomorfok egymással. Ezeknél az automatáknál az átmenetek megjelölt táblázatai a következő alakot öltik:

| | u | v |
|---|---|---|
| | a | b |
| x | b | b |
| y | b | b |

| | v | v |
|---|---|---|
| | a | b |
| x | b | b |
| y | b | b |

*3. ábra*

A fenti automaták példáján meggyőződhetünk arról, hogy a *Moore*-féle automaták (amelyeket a *Mealy*-féle automaták speciális esetének tekintünk) izomorfizmusának a fogalma általánosabb fogalom, mint a *Moore*-féle izomorfizmusainak a fogalma.

[8] A fordító emlékeztet arra, hogy az állapot jele a $\mu(a)$ függvényt jelenti, ahol $a\in\mathfrak{A}$ tetszőleges állapot.

## 2. §. A leképezések előállítása automatákban

Ebben és a következő paragrafusokban nagy szerepet játszanak a szabad félcsoportok. Tegyük fel, hogy $F(\mathfrak{X})$ és $F(\mathfrak{Y})$ stb. egységelemes szabad félcsoportokat jelölnek, amelyeket az $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \ldots$ stb. ábécéjű szavak halmazának tekintünk. Itt nem zárjuk ki a végtelen ábécék esetét sem, amelyek az adott esetben szintén a megfelelő félcsoportok szabad generátorrendszerének a szerepét játszák. Az $F(\mathfrak{X})$, $F(\mathfrak{Y}), \ldots$ stb. félcsoportokat $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \ldots$ stb. ábécéjű szabad félcsoportoknak fogjuk nevezni.

Azt mondjuk, hogy az $F(\mathfrak{X})$ szabad félcsoportnak az $F(\mathfrak{Y})$ szabad félcsoportba való leképezése az $A$ automatában elő van állítva, ha a leképezést az $A$ automatának valamelyik állapota indukálja.[9] Az automata valamely állapota által indukált leképezések definíciójából közvetlenül következik, hogy az $F(\mathfrak{X})$ szabad félcsoportnak az $F(\mathfrak{Y})$ szabad félcsoportba való bármely $\varphi$ leképezése automatákban nem állítható elő. Ebből a definícióból ugyanis két szükséges feltétel is következik, amelyeket a $\varphi$ leképezésnek ki kell elégítenie.

1. FELTÉTEL: *Az $F(\mathfrak{X})$ szabad félcsoport tetszőleges olyan $p$ szavának, amelyen a $\varphi$ leképezés értelmezve van, $\varphi(p)$ képe ugyanolyan hosszú, mint maga a $p$ szó.*

2. FELTÉTEL: *Az $F(\mathfrak{X})$ szabad félcsoport bármely két $p$ és $q$ szavára teljesül $\varphi(pq) = \varphi(p)\cdot r$, ahol $r = \Psi(pq)$ az $F(\mathfrak{Y})$ szabad félcsoport egy szava.*

8. DEFINÍCIÓ: Az $F(\mathfrak{X})$ szabad félcsoportnak az $F(\mathfrak{Y})$ szabad félcsoportba való $\varphi$ leképezését *automata-leképezésnek* nevezzük akkor, ha teljesülnek rá az előbb megfogalmazott 1. és 2. feltételek. Ezeket a feltételeket a $\varphi$ leképezés *automata-feltételeinek* nevezik. Az $F(\mathfrak{X})$ félcsoportot a $\varphi$ *leképezés bemenő félcsoportjának*, az $F(\mathfrak{Y})$ félcsoportot pedig a $\varphi$ *kimenő félcsoportjának* nevezzük, az $\mathfrak{X}$ és $\mathfrak{Y}$ halmazt pedig ennek a leképezésnek a *bemenő*, illetve *kimenő ábécéjének*.

Az automata-leképezéseket különféle elnevezések mellett (retrospektív szekvenciális függvények, szekvenciális operátorok stb.) sok szerző vizsgálta (lásd pl. [24], [4], [12]).

Megmutatható, hogy a leképezés fentebb megfogalmazott automata-feltételei nemcsak szükségesek, hanem elegendőek is ahhoz, hogy a leképezés valamely automatában előállítható legyen. Ennek az állításnak a bizonyítása legegyszerűbben a *szabad automata* fogalmának a felhasználásával végezhető el. Ennek a fogalomnak a forrásai visszanyúlnak HUFFMAN már idézett [29] dolgozatához. A szabad automata definícióját explicit formában JU. I. SZORKIN fogalmazta meg [38] dolgozatában, amely jelenleg sajtó alatt van a „Проблемы кибернетики" c. folyóiratban. Az alábbiakban megadott definíció csak abban különbözik SZORKIN definíciójától, hogy benne nemcsak az automata átmeneti függvényeiről, hanem a kimeneti függvényeiről is beszélünk.

9. DEFINÍCIÓ: Legyenek $B$, $\mathfrak{X}$ és $\mathfrak{Y}$ tetszőleges nem üres halmazok, $F(\mathfrak{X})$ egységelemes szabad félcsoport, amelyet az $\mathfrak{X}$ halmaz generál, $\mathfrak{A}$ az összes $b\cdot p$ alakú szó halmaza, ahol $b \in B$, $p \in F(\mathfrak{X})$. Az $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \mu)$ *Moore*-féle automatát *szabad automatának* nevezzük akkor, ha az automata $\delta(a, x)$ átmeneti függvénye a $\delta(bp, x) = bpx$ összefüggés által van értelmezve tetszőleges $a = bp \in \mathfrak{A}$ és tetszőleges $x \in \mathfrak{X}$

[9] Lásd a 2. definíciót. (A fordító megjegyzése.)

elemek esetében. A $\mu(a)$ jel-függvény tetszőleges lehet. A $B$ halmazt az $A$ automata *szabad generátorai halmazának nevezzük.*

Érvényes a következő

7. TÉTEL: *Közös $F(\mathfrak{X})$ bemenő félcsoporttal és közös $F(\mathfrak{Y})$ kimenő félcsoporttal rendelkező $\varphi_\alpha(\alpha \in M)$ automata-leképezéseknek tetszőleges halmazát elő lehet állítani egy olyan Moore-féle automatában, amelynél a szabad generátoroknak a halmaza kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozható az összes $\varphi_\alpha$ $(\alpha \in M)$ leképezés halmazával.*

BIZONYÍTÁS: Szerkesszük meg az $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \mu)$ *Moore*-féle automatát, amelynél az állapotok halmaza az összes lehetséges $\varphi$-$\cdot p$ alakú szóból áll, ahol $p$ tetszőleges szó az $F(\mathfrak{X})$ félcsoportból (az $e$ üres szó is előfordulhat), míg a $\varphi$- leképezés szimbólumát egyszerűen csak valamilyen betűnek tekintjük. Az $A$ automata tetszőleges $a=\varphi$-$p$ állapotára és az $\mathfrak{X}$ bemenő ábécének tetszőleges $x$ betűjére vonatkozólag a $\delta(a, x)$ átmeneti függvény értékét a $\delta(\varphi_\alpha p, x)=\varphi_\alpha px$ összefüggéssel értelmezzük. Az $a=\varphi_\alpha p$ állapot mellett a $\mu(a)$ jel-függvény értékét egyenlőnek vesszük az $F(\mathfrak{Y})$ kimenő félcsoport $\varphi_\alpha(p)$ szavának az utolsó betűjével abban az esetben, ha a $p$ szó nem üres; ha pedig a $p$ szó üres, akkor az $\mathfrak{Y}$ kimenő ábécé tetszőleges betűjével. (Itt, a szokásos módon, $\varphi_\alpha(p)$ jelenti a $p$ szó képét a $\varphi_\alpha$ leképezés mellett.)

Legyen $q = x_1 \cdot x_2 \dots x_k$ tetszőleges nem üres szó az $F(\mathfrak{X})$ bemenő félcsoportból, $r = y_1 \cdot y_2 \dots y_k$ pedig ennek a szónak a képe a $\varphi_\alpha$ leképezés mellett. Az $A$ automata $\varphi_\alpha \cdot e$ állapota, az elvégzett konstrukció értelmében a $q$ bemenő szóhoz hozzárendeli a $\varphi_\alpha x_1 \cdot \varphi_\alpha x_1 x_2 \dots \varphi_\alpha x_1 x_2 \dots x_k$ állapot-szót.[10]

A $q$ szóhoz a $\varphi_\alpha \cdot e$ állapotban hozzárendelt kimenő szó nyilván előállítható $\mu(\varphi_\alpha x_1)\mu(\varphi_\alpha x_1 x_2) \dots \mu(\varphi_\alpha x_1 x_2 \dots x_k)$ alakban, másrészt pedig a $\mu$ függvény definíciója miatt $y_1' \cdot y_2' \dots y_k'$ alakban is, ahol $y_i'$ a $\varphi_\alpha(x_1 \cdot x_2 \dots x_i)$ $(i=1, \dots, k)$ szó utolsó betűje. A $\varphi_\alpha$ leképezésre vonatkozó második automata-feltétel alapján viszont $\varphi_\alpha(x_1 \cdot x_2 \dots x_i) = y_1 y_2 \dots y$ , ahonnan $y_1' \cdot y_2' \dots y_k' = y_1 y_2 \dots y_k$.

Ilyen módon az $A$ automata $\varphi_\alpha \cdot e$ állapotú egy tetszőleges $p$ bemenő szóhoz ennek a szónak a $\varphi_\alpha$ leképezés mellett vett képét rendeli hozzá. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az automatában az összes $\varphi_\alpha$ $(\alpha \in M)$ leképezés elő van állítva, amit bizonyítani kellett.

A szabad automatákban előállított automata-leképezések nem mindig gazdaságosak a használt állapotok számának a szempontjából: ez a szám mindig végtelennek bizonyul, még olyankor is, amikor az adott leképezések véges automatákban is előállíthatók volnának. Annak az érdekében, hogy csökkentsük az adott leképezések előállításához szükséges automata-állapotok számát, figyelemre méltó az automata-leképezések tanulmányozásának RANEY [24] által indítványozott módszere.

Vizsgáljuk meg ezt a módszert csupán egyetlen $\varphi$ automata-leképezés előállításának az esetére. Jelölje $F(\mathfrak{X})$ a $\varphi$ leképezés bemenő (szabad) félcsoportját, $F(\mathfrak{Y})$ pedig a kimenő szabad félcsoportját. Az $F(\mathfrak{X})$ félcsoportból vett tetszőleges $p$ szóhoz megszerkesztjük a $\varphi_p$ : $F(\mathfrak{X}) \to F(\mathfrak{Y})$ leképezést, amelynél $\varphi_p(q)$ értékét tetszőleges

[10] A szerző nem definiálta valamely $a$ állapot által egy $q$ bemenő szóhoz hozzárendelt állapotszónak, illetve kimenő szónak a fogalmát, de nyilván a $q$ bemenő szónak az $a$ állapotban megfelelő állapot-szót, illetve kimenő szót érti rajta, amely az $F(\mathfrak{X})$, ill. $F(\mathfrak{Y})$ félcsoportoknak egy-egy eleme. (A fordító megjegyzése.)

$q$ bemenő szóra vonatkozólag a következőképpen határozzuk meg. Minthogy $\varphi$ automata-leképezés, ezért $\varphi(pq) = \varphi(p)\cdot r$, ahol $r$ valamilyen kimenő szó, amelynek a hossza egyenlő a $q$ szó hosszával. Ekkor legyen $\varphi_p(q) = r$. Könnyen belátható, hogy az ilyen módon kapott összes $\varphi_p$ leképezés automata-leképezés lesz. A kapott összes $\varphi_p$ leképezést (beleszámítva magát a $\varphi$ leképezést is, amelyet az $e$ üres szóval vett $\varphi_e$ leképezésként lehet tekinteni), RANEY javaslatára a *$\varphi$ leképezés állapotainak nevezzük*.

Felhasználva ezt a bevezetett fogalmat, bebizonyítható a következő állítás.

8. TÉTEL: *Tetszőleges $\varphi$ automata-leképezés előállítható egy olyan Mealy-féle automatában, amelynek az állapot-halmaza egybeesik a $\varphi$ leképezés állapot-halmazával.*

BIZONYÍTÁS: Jelölje $\mathfrak{A}$ a $\varphi$ leképezés összes $\varphi_p$ állapotának a halmazát, ahol $p$ tetszőleges szó a $\varphi$ leképezés $F(\mathfrak{X})$ bemenő félcsoportjában. $F(\mathfrak{Y})$-nal jelölve a $\varphi$ leképezés kimenő félcsoportját, megszerkesztjük az $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ *Mealy*-féle automatát. Ennek az automatának az átmeneti függvényét a $\delta(\varphi_p, x) = \varphi_{px}$ kapcsolattal definiáljuk, míg a kimeneti függvényt a $\lambda(\varphi_p, x) = \varphi_p(x)$ összefüggéssel, ahol $x$ az $\mathfrak{X}$ bemenő ábécének tetszőleges betűje.

Megmutatjuk, hogy a $\varphi = \varphi_e$ állapot által létesített leképezés (ahol $e$ az üres szó) egybeesik a tételben szereplő $\varphi$ leképezéssel. Legyen ugyanis $p = x_1x_2 \dots x_k$ tetszőleges bemenő szó. Az $A$ automata $\varphi_e$ állapota a $p$ szóhoz a $\varphi_{x_1}\cdot\varphi_{x_1\cdot x_2} \dots \varphi_{x_1x_2\dots x_k}$ állapot-szót rendeli hozzá. Ha mármost $y_1y_2 \dots y_k$ jelöli a $\varphi$ leképezésnél a $p$ szó $\varphi(p)$ képét, akkor a leképezés állapotainak a definíciója alapján azt fogjuk kapni, hogy $\varphi_e(x_1x_2 \dots x_k) = y_1y_2 \dots y_k$, $\varphi_{x_1}(x_2x_3 \dots x_k) = y_2y_3 \dots y_k)$ $\varphi_{x_1x_2\dots\, xk-1}$ $(x_k) = y_k$.

A $\varphi_e$ állapot a $p$ szóhoz a $q = \lambda(\varphi_e, x_1)\cdot\lambda(\varphi_{x_1}, x_2) \dots \lambda(\varphi_{x_1x_2 \dots x_{k-1}}, x_k)$ kimenő szót rendbeli hozzá. Tekintettel a $\lambda(a, x)$ függvény definíciójára, valamint arra, hogy $\varphi_e, \varphi_{x_1}, \varphi_{x_1x_2\dots x_{k-1}}$ automata-leképezések, azt kapjuk, hogy $q = y_1y_2 \dots y_k$. Ez a $p$ szó tetszőleges megválasztása miatt azt jelenti, hogy az $A$ automata $\varphi_e$ állapota által indukált leképezés egybeesik a $\varphi$ leképezéssel, amely ilyen módon az $A$ automatában előállítottnak bizonyult. Ezzel a tételt teljesen bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy bár RANEY [24] dolgozatában megtalálható mindaz, ami a 8. tétel bebizonyításához szükséges, ő mégsem bizonyítja be a tételt, sőt azt még csak ki sem mondja. Egyébként gyakorlati vonatkozásban a 8. tétel mindaddig nem bizonyul nagyon értékesnek, amíg nem állnak rendelkezésre elég hatékony módszerek egy adott automata-leképezés állapotainak megtalálására. (E feladat megoldásának egyes közvetett módszereit a következő paragrafusban fogjuk kifejezni.) Elméletileg azonban a 8. tétel kétségtelenül érdekesnek tekinthető, minthogy a benne megmutatott módszerrel megvalósítható az automata-leképezésnek *minimális* számú állapottal rendelkező automatában való előállítása. Érvényes ugyanis a következő állítás:

9. TÉTEL: *Egy tetszőleges olyan automata állapot-halmazának a számossága, amelyben egy adott $\varphi$ automata-leképezést elő lehet állítani, legalább akkora, mint annak a halmaznak a számossága, amelyet a $\varphi$ leképezés állapotai alkotnak.*

BIZONYÍTÁS: Tekintsünk egy tetszőleges olyan $A$ automatát, amelyben a $\varphi$ leképezést az $A$-nak valamilyen állapota indukálja. Az $A$ automata tetszőleges $p$ bemenő szavára nézve (amely egyidejűleg a $\varphi$ leképezésnek is a bemenő szava) jelöljük

$a_p$-vel annak az állapot-szónak az utolsó állapotát, amelyet az $a$ állapot a $p$ bemenő szóhoz hozzárendel.[11] Az $a_p$ állapot által indukált $\varphi_p$ leképezést, mint ez könnyen belátható, a következő összefüggés definiálja: tetszőleges $q$ bemenő szóra nézve ennek a szónak a $\varphi_p(q)$ képe egybeesik a $\varphi(pq) = \varphi(p)\cdot r$ kifejezésben levő szóval. Ilyen módon azonban a $\varphi$ leképezés *összes* állapotát is definiáltuk. Következésképpen az $A$ automata $a_p$ állapotaihoz az általuk létesített $\varphi_p$ leképezéseket hozzárendelve megvalósítjuk az automata állapot-halmaza egy részének *egyértelmű* leképezését a $\varphi$ leképezés állapotainak a halmazára. Ebből közvetlenül következik a 9. tétel érvényessége.

Miként fentebb már megjegyeztük, az $F(\mathfrak{X})$ szabad félcsoportnak az $F(\mathfrak{Y})$ szabad félcsoportba való nem minden leképezése automata-leképezés. Létezik azonban olyan eljárás (vö. [12]), amelynek a segítségével szerkeszteni lehet olyan új $\Psi$ leképezést, amely automata-leképezés lesz, és amelynek megadása lehetővé teszi azt, hogy belőle az eredeti $\varphi$ leképezést egyértelműen megszerkeszthessük.

Ez a módszer azon alapul, hogy az $\mathfrak{X}$ és $\mathfrak{Y}$ generátorelem-halmazt egy-egy új elemmel egészítjük ki, amelyeket üres betűknek fogunk nevezni és $\alpha$-val, illetve $\beta$-val jelölünk. A keresett $\Psi$ leképezést ezek után a következőképpen szerkeszthetjük meg: ha $p$ tetszőleges szó $F(\mathfrak{X})$-ből, $q$ pedig a $p$ szó képe a $\varphi$ leképezésnél, akkor a $\Psi$ leképezést elsőnek a $p_1 = p\alpha\alpha \ldots \alpha$ a $h$ szavakon definiáljuk, ahol a jobbról melléírt $\alpha$ üres betűk száma éppen egyenlő a $q$ szó hosszával. Ennek a $p_1$ szónak a $\Psi$ leképezésnél való $q_1 = \Psi(p_1)$ képe a $q_1 = \beta\beta \ldots \beta q$ szó lesz, ahol a balról melléírt $\beta$ üres betűk száma a $p$ szó hosszával egyenlő.

Miután a $\Psi$ leképezést az összes, fentiekben megjelölt alakú szóra definiáltuk, értelmeztük a $\Psi$ leképezést ezeknek a szavaknak a kezdő szakaszaira vonatkozóan is. (Az $l_1$ szót az $l$ szó kezdő szakaszának nevezzük akkor, ha létezik olyan $l_2$ szó, amelyre $l = l_1 \cdot l_2$). Ebből a célból hozzárendeljük a $p_1$ szónak minden $p_2$ kezdő szakaszához a $q_1 = \Psi(p_1)$ szónak azt a kezdő szakaszát, amelynek a hossza egyenlő a $p_2$ szónak a hosszával. Ennél a hozzárendelésnél nem jutunk többértelműséghez. Ha ugyanis a $p_2$ szó legalább egy üres betűt tartalmaz, akkor ez csak egyetlen $p_1$ szóban fordulhat elő.[12] Ha pedig a $p_2$ szó egyetlen üres betűt sem tartalmaz, akkor a $\Psi$ leképezés definíciója következtében olyan szót kapunk $\Psi(p_2)$ szó gyanánt, amely kizárólag üres betűket tartalmaz függetlenül attól, hogy a $p_2$ szó a $p_1$ szóban vagy pedig bármely más szóban előfordul-e kezdő szakaszként.

Ha a $\Psi$ leképezés értelmezési tartományába az $e$ üres szót (amely egyetlen betűt sem tartalmaz, még üres betűt sem) ugyancsak belevesszük (a $\Psi(e) = e$ megállapodás mellett), akkor minden olyan $l$ szót, amely az $\mathfrak{X}$ ábécé betűiből és az $\alpha$ betűből áll, elő tudunk állítani $l = l_1 \cdot r_1$ alakban, ahol $l_1$ az a maximális hosszúságú szó, amelyen a $\Psi$ leképezés már definiálva van. Legyen ekkor $\Psi(l) = \Psi(l_1)\cdot\beta\beta \ldots \beta$ ahol a jobbról melléírt $\beta$ üres betűk száma egyenlő az $r_1$ szó hosszával, így nyilvánvalóan olyan automata-leképezést kapunk, amely az $F(\mathfrak{X}')$ szabad félcsoportot az $F(\mathfrak{Y}')$ szabad félcsoportba képezi le. Itt $\mathfrak{X}'$-vel az $\alpha$ üres betűvel kiegészített $\mathfrak{X}$ szabad

[11] Itt $a$ nyilvánvalóan az az állapot, amely a $\varphi$ leképezést az $A$ automatában indukálja. (A fordító megjegyzése.)

[12] Pontosabb megfogalmazásban arról van szó, hogy a $p_2$ szó az említett esetben csak egyetlen $p_1$ szónak lehet a *kezdő szakasza*. Álljon az $\mathfrak{X}$ ábécé speciálisan csak az $x$ betűből, ekkor a $p_1 = x\alpha\alpha$; $p_1' = xx\alpha\alpha$ és $p_2 = x\alpha$ szavak figyelembevétele mutatja az eredeti fogalmazás pontatlanságát. (A fordító megjegyzése.)

generátor-halmazt jelöljük (amely az $F(\mathfrak{X}')$ félcsoport ábécéje). A szabad generátorok $\mathfrak{Y}'$ halmaza hasonló módon a $\beta$ üres betűvel kiegészített $\mathfrak{Y}$ halmazból áll (ez az $F(\mathfrak{Y}')$ félcsoport ábécéje).

Könnyen belátható, hogy a $\Psi$ leképezésből a $\varphi$ leképezés természetes módon visszaállítható. Ha ugyanis $p$ tetszőleges szó az $\mathfrak{X}$ ábécében, akkor jobbról melléírva elegendő mennyiségű $\alpha$ üres betűt, nyilván olyan $p_1$ szóhoz jutunk, amelynek a képe a $\Psi$ leképezés mellett a $\beta$ üres betűvel fejeződik be. Kitörülve a $\Psi(p_1)$ szóban az összes üres betűt, átváltoztattuk azt egy olyan $q$ szóvá, amely a $\Psi$ leképezés definíciója alapján a $p$ szónak a $\varphi$ leképezés mellett vett képe lesz:

$$\varphi(p)=q.$$

Ilyen módon eljutunk a következő eredményhez.

10. TÉTEL: *Ha $\varphi$ az $\mathfrak{X}$ ábécéjű szabad félcsoport tetszőleges leképezése az $\mathfrak{Y}$ ábécéjű szabad félcsoportba, akkor létezik az $\mathfrak{X}\cup(\alpha)$ ábécéjű szabad félcsoportnak az $\mathfrak{Y}\cup(\beta)$ ábécéjű szabad félcsoportba való olyan $\Psi$ automata-leképezése, hogy ennek a megadása egyértelműen meghatározza az eredeti $\varphi$ leképezést. Itt $\alpha$ és $\beta$ olyan elemek, amelyek nincsenek benne az $\mathfrak{X}$ és $\mathfrak{Y}$ halmazokban.*

A $\varphi$ leképezésre vonatkozó $\Psi$ leképezés megszerkesztésének fentebb leírt módszere, amelyet a szavak *standard „hosszúság-kiegyenlítési"* módszerének nevezünk, nem mindig mutatkozik gazdaságos módszernek arra vonatkozólag, hogy egy $\varphi$ leképezést átalakítsunk automata-leképezéssé. Ahhoz, hogy erről meggyőződjünk, elegendő azt az esetet tekinteni, amikor a $\varphi$ leképezés maga is automata-leképezés. Ezért a gyakorlatban rendszerint egyenként szoktuk az üres betűket a szavakhoz egymás után hozzáírni (jobbról a bemenő, balról a kimenő szavakhoz), miközben minden esetben ellenőrizzük az automata-feltételek teljesülését. A 10. tétel bizonyítása biztosítékot ad arra nézve, hogy ennek az eljárásnak az eredményeképpen előbb vagy utóbb automata-leképezéshez jutunk.

Megemlítjük még, hogy a gyakorlatban bizonyos esetekben (pl. olyankor, amikor az eredeti leképezés nincs az összes szóra definiálva) lehetségesnek mutatkozik az, hogy az $\alpha$ és $\beta$ üres betűk gyanánt az eredeti $\mathfrak{X}$ és $\mathfrak{Y}$ halmazok betűit használjuk.

A 10. tétel jelentősége abban áll, hogy megjelöli azt az utat, amely a tetszőleges leképezések elméletéből az automata-leképezések elméletéhez vezet, és speciálisan a tetszőleges algoritmusok elméletétől az automatákkal megvalósítható algoritmusok elméletéhez, ez utóbbiakat természetes módon *automata-algoritmusoknak* nevezhetjük. Ebben az irányban sok érdekes probléma merül fel, speciálisan olyan hatékony módszerek felkutatásának a problémája, amelyek lehetővé teszik annak eldöntését, hogy valamely konkrétan megadott (például normális) algoritmus automata-algoritmus-e, vagy nem.

Az algoritmusok elméletének az automata-algoritmusok elmélete alapján való felépítése azzal kapcsolatban látszik érdekesnek, hogy egy automata-algoritmus meghatározható egy olyan szabad félcsoport véges felosztásának a megadása által, amelynek az ábécéje egybeesik az adott algoritmus ábécéjével.

Mi most azzal az általános problémával fogunk foglalkozni, hogy tetszőleges automata-leképezések hogyan állíthatók elő szabad félcsoportok felosztásainak a megadása segítségével.

Legyen $\varphi$ tetszőleges olyan automata-leképezés, amely az $\mathfrak{X}$ ábécéjű $F(\mathfrak{X})$ szabad félcsoportot leképezi az $\mathfrak{Y}$ ábécéjű $F(\mathfrak{Y})$ szabad félcsoportba. Jelöljük $S_y$-nal az $F(\mathfrak{X})$ félcsoport összes olyan $p$ szavának a halmazát, amelyeknek a képei a $\varphi$ leképezésnél az $y$ betűvel végződnek (itt $y$ az $\mathfrak{Y}$ halmaz tetszőleges eleme). Ha az $S_y$ halmazok közül némelyek üresek, akkor a második automata-feltétel alapján a megfelelő $y$ betű egyetlen olyan szóban sem fordulhat elő, amely a $\varphi$ leképezésnél képként szerepel. Így az ilyen betűt ki lehet zárni az $F(\mathfrak{Y})$ félcsoport generátorai közül. Elvégezve szükség esetén az összes ilyen kizárásokat, az általánosság korlátozása nélkül fel lehet tenni, hogy az összes $S_y$ halmaz már nem üres.

Világos, hogy az $S_y$ halmazok egymástól páronként idegenek, (egymást nem metszik) és egyesítésük egybeesik az egész félcsoporttal (leszámítva az $e$ üres szót). A $\varphi$ leképezés megadása egyértelműen meghatározza az $S_y$ $(y \in \mathfrak{Y})$ részhalmazok rendszerét. Érvényes azonban a megfordított állítás is, éspedig nem nehéz belátni azt, hogy *az* $S_y$ $(y \in \mathfrak{Y})$ *részhalmazok rendszerének megadása egyértelműen meghatározza az eredeti leképezést.*

Legyen ugyanis $p = x_1 \cdot x_2 \dots x_k$ a $\varphi$ leképezés $F(\mathfrak{X})$ bemenő félcsoportjának tetszőleges szava. Tegyük fel azt, hogy az $x_1 \cdot x_2 \dots x_i$ szó az $S_{y_i}$ halmazhoz tartozik $(i = 1, 2, \dots, k)$. A második automata-feltétel és az $S_y$ halmazok definíciója alapján megállapíthatjuk, hogy az $x_1 \cdot x_2 \dots x_k$ szó képe a $\varphi$ leképezésnél az $y_1 \cdot y_2 \dots y_k$ szó lesz. Mindezt kizárólag az $S_y$ $(y \in S)$ halmazok rendszerének a segítségével állapítottuk meg, anélkül, hogy a $\varphi$ leképezést felhasználtuk volna. Világos, hogy abban az esetben, amikor az $S_y$ halmazoknak az indexei nincsenek explicit módon megadva, az $S_y$ $(y \in \mathfrak{Y})$ halmazok rendszere a $\varphi$ leképezést a kimenő ábécé betűinek a jelölésétől eltekintve határozza meg.

Bevezethető az alábbi definíció.

10. DEFINÍCIÓ: Az $\mathfrak{X}$ ábécéjű $F(\mathfrak{X})$ szabad félcsoport elemeinek tetszőleges halmazát $\mathfrak{X}$ *ábécéjű eseménynek* nevezzük (itt $\mathfrak{X}$ nem feltétlenül véges). Az $\mathfrak{X}$ *ábécéjű események automata-rendszerének* nevezzük az ilyen ábécéjű, egymást nem metsző olyan eseményeknek a rendszerét, amelyeknek a halmazelméleti egyesítése egybeesik az egész $F(\mathfrak{X})$ félcsoporttal, az üres szótól eltekintve. Az $\mathfrak{X}$ ábécéjű események $M$ rendszerét az $F(\mathfrak{X})$ *bemenő félcsoportú és* $F(\mathfrak{Y})$ *kimenő félcsoportú* $\varphi$ *automata-leképezés eseményei kanonikus rendszerének* nevezzük akkor, ha az $M$ rendszernek egy tetszőleges $S$ eseménye az $F(\mathfrak{X})$ félcsoportnak azokból és csak azokból a szavaiból áll, amelyeknek a képei a $\varphi$ leképezésnél az $\mathfrak{Y}$ ábécének egy és ugyanazon, éspedig az $S$ esemény által meghatározott betűjére végződnek.

A fentebb elvégzett meggondolások alapján megfogalmazhatjuk a következő állítást.

11. TÉTEL: *Az* $F(\mathfrak{X})$ *kimenő (szabad) félcsoportú* $\varphi$ *automata-leképezés eseményeinek minden kanonikus rendszere egyszersmind* $\mathfrak{X}$ *ábécéjű események egy automata-rendszerének tekinthető. Megfordítva, az* $\mathfrak{X}$ *ábécéjű eseményeknek bármely* $M$ *automata-rendszerét úgy lehet tekinteni, mint valamilyen* $F(\mathfrak{X})$ *bemenő félcsoportú* $\varphi$ *automata-leképezés eseményeinek a kanonikus rendszerét. Ennek során az* $M$ *rendszer által a* $\varphi$ *leképezés egyértelműen meg van határozva, eltekintve a* $\varphi$ *leképezés kimenő (szabad) félcsoportját generáló ábécé betűinek a jelölésétől.*

A 11. tétel az automata-leképezések tanulmányozását az események automata-rendszerének a tanulmányozására redukálja. Speciálisan, a leképezések automatákban való előállításának a feladata természetes módon redukálódik az események automatákban való előállításának feladatára, amely a következő definíción alapszik.

11. DEFINÍCIÓ: *Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{X}$ ábécéjű S esemény elő van állítva az y kimenő jel (betű) által az A iniciális automatában,* ha az $A$ automata bemenő ábécéje egybeesik az $\mathfrak{X}$ ábécével, az $S$ halmaz pedig azokból és csak azokból az $\mathfrak{X}$ ábécéjű szavakból áll, amelyek az $A$ automatában indukált valamely leképezés által $y$ betűre végződő kimenő szavakra képződnek le. Azt mondjuk továbbá, hogy az eseményeknek az $M$ automata-rendszere az $A$ iniciális automatában elő van állítva, ha a rendszernek bármely eseménye az $A$ automatának valamely kimenő jele által elő van állítva.

Az események automatákban való előállításának problémája először S. C. KLEENE [14] dolgozatában vetődött fel, éspedig speciális típusú véges automatákra („neuron-rendszerek"-re) alkalmazva. Absztraktabb formában vizsgálta JU. T. MEDVEGYEV a [17] dolgozatában az események automatákban való előállítását. Az eseményeknek kimenő jelek segítségével való előállítását szerző [12] dolgozatban vezette be.

A 11. tétel szerint az események bármely $M$ automata-rendszerét úgy lehet tekinteni, mint valamilyen $\varphi$ automata-leképezés eseményeinek kanonikus rendszerét. A $\varphi$ leképezést valamilyen iniciális automatának a kezdő állapotával előállítva, egyszersmind előállítottuk (a 10. és 11. definíció alapján) az eseményeknek az $M$ rendszerét is ebben az automatában.

Bármely, $\mathfrak{X}$ ábécéjű $S$ eseményt be lehet ágyazni ugyanolyan ábécéjű eseményeknek az $M$ automata-rendszerébe. Ilyen rendszer gyanánt lehet választani például azt a rendszert, amely $S$ eseményen kívül még az $\mathfrak{X}$ ábécéjű, összes olyan nem üres szóból álló $R$ eseményt tartalmazza, amelyek nincsenek benne az $S$ eseményben. (Ha az $S$ esemény üres, akkor már egymagában automata-rendszert alkot.) Előállítva az automatában az $M$ rendszert, ezzel ennek az automatának valamelyik kimenő jele által az $S$ eseményt is előállítjuk.

Az elvégzett meggondolásoknak az alapján, és felhasználva a 7. tételt, meg lehet fogalmazni a következő eredményt.

12. TÉTEL: *Tetszőleges eseményt elő lehet állítani valamilyen (általában végtelen) Moore-féle iniciális automatának valamelyik kimenő jelével. Eseményeknek tetszőleges automata-rendszerét elő lehet állítani Moore-féle iniciális automatában.*

Megjegyezzük, hogy a 12. tétel bizonyítása közben a 7. tétel felhasználásakor szükség van arra, hogy a 7. tételben tekintett *Moore*-féle szabad automatából egy alkalmas iniciális részautomatát válasszunk ki.

Gyakorlati célokra különösen érdekes az a feladat, hogy eseményeket ne tetszőleges, hanem csupán véges automatákban állítsunk elő. Ennek a feladatnak a megoldására van szentelve a következő paragrafus. Jelen paragrafus befejezéséül megemlítjük a fentebb tekintett szabad automatának még egy tulajdonságát, nevezetesen azt, hogy könnyen belátható (ezt elsőnek JU. I. SZORKIN vette észre és bizonyította be), hogy egy szabad automatának bármely részautomatája maga is szabad automata lesz.

## AZ IDÉZETT IRODALOM


[1] **Д. Д. Ауфенкамп — Ф. Е. Хон,** Анализ последовательностных машин, *Математика* 3:3(1959) 129—146
(D. D. Aufenkamp, F. E. Hohn, Analysis of sequential machines, *E Trans. Electronic Comput* **6** (1957) No 4; 276—285.

[2] **Д. Д. Ауфенкамп,** Аналуз последовательностных машин, *Математика* **3** № 6 (1959) 145—158.

[3] W. A. Burks—H. Wang, The logic of automata, *Jour. Ass. Comp. Mach.* **2** (1957) 193. —218; **3** (1957) 279—297.

[4] **А. Ш. Блох,** О задачах, ращаемых последовательностными, *Проблемы кибернетики* **3** (1960) 81-88.

[5] J. R. Büchi, Weak second order arithmetic and finite automata, *Zeitschr. Math. Logik Grundlagen d. Math.* **6** (1960) 66—92.

[6] S. Ginsburg, On the length of the smallest uniform experiment, which distinguishes the Aerminal states of machine, *Jour. Ass. Comp. Mach.* **5** (1958) 266—280.

[7] S. Ginsburg, Some remarks on abstract machines, *Trans. Amer. Math. Soc.* **96** (1960) 400—444.

[8] **С. Гинзбург.** Метод синтеза последовательностных машин с минимальным числом состояний, *Математика* **4** (1960) 145—168

[9] **В. М. Глушков,** Об одном а лгоритме синтеза абстрактных автоматов, *Укр. Матем. жур.* **12** (1960) 147-156.

[10] **В. М. Глушков,** Об одном методе анализа абстрактных автоматов, *ДАН УССР*, **9** (1960) 1151—1154.

[11] **В. М. Глушков,** Абстрактные автоматы и разбиение свободных полугрупп, *ДАН* (1961).

[12] **В. М. Глушков,** Некоторые проблемые синтеза сифровых автоматов, *Вычисл. Матем. и Матет. физика* **3** (1961) 371—411,

[13] **А.А.Карацуба** Решение одной задачи из теории конечных автоматов, *УМН* **15** Но 3 (1960.) 157—159.

[14] **С.К.Клини,** Предетовление событий в нервных сетях и конечных автоматах, *Сб. „Автоматы"* (1956) 15—67.
(S. C. Kleene, Representation of events in nerve nets and finite automata, *Automata Studies,* Princeton (1956) 3—41).

[15] J. M. Copy—C. Elgot—J. B. Wright, Realization of events by logical nets, *Jour. Ass. Comp. Mach.* **5** N 2 (1958) 181—196.

[16] R. F. McNaughton—J. Jamanda, Regular expressions and state graphs for automata, *IRE Trans. Electr. Comp. EC*-**9**, N 1 (1960) 39—48.

[17] **Ю. Т. Медведев,** О классе событий допускающих представление в конечном автомате, *Сб. „Автоматы"* (1956) 385—401. **2** (1955) No 2, 61—82.)

[18] **Ф. Д. Меррей,** Механизмы и автоматы, *Киберн. сб. И. Л.*
(1960) 149—174, (F. J. Murray, Mechanisms and robots, *Jour. Ass. Comp. Mach.*

[19] G. H. Mealy, A method for synthesizing sequential circuits, *Bell System Tech. Jour.* **34** (1955) 1045—1079.

[20] **Э. Ф. Мур,** Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами, *Сб. „Автоматы"* (1956) 385-401.
(Edward F. Moore, Gedanken-experiments on sequential machines, *Automata Studies,* **34**, Princeton (1956) 129—153).

[21] D. S. Netherwood, Minimal sequential machines, *IRE Trans. Electr. Comp. EC*-**8** No 3 (1959) 339—345.

[22] M. C. Paull—S. H. Unger, Minimizing the number of states in incompletely specified sequential surtching functions, *IRE Trans. Electr. Comp. EC*-**8** (1959) 356—367.

[23] M. O. Rabin—D. Scott, Finite automata and their decision problems, *JBM Research Jour.* **3** (1959) 114—117.

[24] G. N. Rane, Sequential functions, *Jour. Ass. Comp. Mach.* **5** (1958) 177—180.

[25] S. Seshu, Mathematical models for sequential machines, *IRE Nat. Convent,* Rec. **7** No 2 (1959) 4—16.

[26] **Л. А. Скорняков,** Нервные системы, *УМН,* **13** № 3 (1958) 233—234.

[27] **Л. А. Скорняков,** Об одном классе автоматов (нервные системы), *Проблемы кибернетики* **4** (1960) 23—36.

[28] **Б. А. Трахтенброт,** Синтез логических сетей, операторы которых описаны средствали исчисления одно местных предикатов, *ДАН* **118** № 4 (1958).
[29] D. A. HUFFMAN, The synthesis of sequential switching circuits, *Journ. Franklin Inst.* **257** No3 (1954) 161–190.
[30] S. HUZINO, On some sequential machines and experiments, *Mem. Fac. Sci. Kynsyu Univ. ser. A* **12** No 2 (1958) 136–158.
[31] S. HUZINO, Reduction theorems on sequential machines and experiments, *Mem. Fac. Sci. Kynsyu Univ. ser. A* **12** No 2 (1958) 159–172.
[32] S. HUZINO, On the existence of Sheffer stroke class in the sequential machines, *Mem. Fac. Sci. Kynsyu Univ. ser A* **13** (1959) 52–68.
[33] S. HUZINO, Some properties of convolution machines and б-composite machines, *Mem. Fac. Sci. Kynsyu Univ. ser A* **13** (1959) 69–83.
[34] J. C. SHEPHERDSON, The reduction of two-way automata to one-way automata, *JBM Journ. Res. and Rev.* 3 (1959) 198–199.
[35] M. P. SCHÜTZENBERGER, Un problème de la théorie des automates, *Semin. Dubreil–Pisot,* 13-e année, No 3, (1959/60.)
[36] **А. А. Петичевский,** О синтезе конечных автоматов, *ДАН, УССР,* **2** (1961) 139–141.
[37] **А. А. Пемичевский,** Условия полноты для конечных автоматов, *Вычисл. Матем. и матем. физика,* **4** (1961).
[38] **Ю. М. Соркин,** Алгебра автоматов, *Пробл. Киберн.* (1961).

*Fordította:* Szász Ferenc
*a matematikai tudományok kandidátusa*

# KÖNYVISMERTETÉS

## Szász Gábor: Einführung in die Verbandstheorie *

Nem először fordul elő, hogy a matematika egy-egy új ágában az alapvető kézikönyvek, monográfiák megjelenése után születnek meg az illető tudományág bevezető jellegű könyvei. Így történt ez a hálóelméletben is, ahol G. BIRKHOFF: *Lattice theory* című alapvető és máig is legjelentősebb hálóelméleti könyvének megjelenése után jelent meg H. HERMES: *Einführung ib die Verbandstheorie* és M. L. DUBREIL-JACOTIN—L. LESIEUR—R. CROISOT: *Lecons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques* című könyve. Majd ezeket követően, az egyre bővülő hazai matematikai könyvkiadásunk értékes elemeként jelent meg SZÁSZ GÁBOR: *Bevezetés a hálóelméletbe* című könyve magyar nyelven. A könyv igen kedvező visszhangra talált a referátumok alapján is és ennek a nemzetközi érdeklődésnek eredményeként jelent meg SZÁSZ GÁBOR könyve 1962-ben német nyelven. Bár a német nyelvű kiadás a nagyar nyelvűnek lényegében fordítása — csupán az irodalmi jegyzék lett teljesebb — az alábbiakban ismertetem a könyvben feldolgozott anyagot, annak felépítését (annál inkább, mivel a magyar nyelvű eredetinek ismertetésére nem került sor e lapban).

**I.** *Részben-rendezett halmazok:* alapfogalmak, maximum-, minimumkövetelmény, Jordan—Dedekind lánckövetelmény, dimenzió-függvény. **II.** *A hálókról általában:* hálóaxiómák, dualitás, félháló, háló homomorfizmusai. **III.** *Teljes háló:* algebrai struktúrák részstruktúrahálói, lezárási operáció, részben-rendezett halmaz mint topológikus tér. **IV.** *Disztributív és moduláris hálók:* Végtelen-disztributív és teljesen-disztributív hálók, moduláris és disztributív hálók jellemzése részhálóikkal, moduláris hálók izomorfiatétele, háló irreducibilis elemei. **V.** *Speciális tulajdonságokkal rendelkező moduláris hálók:* lokálisan véges hosszúságú moduláris háló, metrikus háló, komplementumos moduláris háló és geometriai alkalmazásai. **VI.** *Boole-algebrák:* teljes Boole-algebra, Boole-gyűrűk, logikai alkalmazásai, értékelései. **VII.** *Félig-moduláris hálók:* Birkhoff-hálók, ekvivalencia-háló, lineáris függőség, komplementumos félig-moduláris hálók. **VIII.** *Hálók ideáljai:* ideálháló, disztributív hálók és halmazgyűrűk. **IX.** *Kongruenciarelációk:* kongruenciák, felcserélhető ekvivalenciarelációk, direkt- és szubdirekt összetétel illetve felbontás, neutrális elemek, centrum.

SZÁSZ GÁBOR könyve — bár kevés előismeretet tételez fel — elég sok anyagot tartalmaz, s a hálóelméletnek a matematika más ágaival való számos kapcsolatát mutatja be, megtartva mindvégig bevezető jellegét. A hálóelmélet alapvető fogalmainak szabatos tárgyalása, módszereinek és sokoldalú alkalmazásának bemutatása, irodalmi utalás az egyes anyagrészek mélyebb tanulmányozására, újabb ered-

* Akadémiai Kiadó, Budapest 1962. (253 oldal).

ményekre, s mindez modern, világos, egyszerű tárgyalásmódban. A nehezebb gyakorlófeladatokhoz útmutatások találhatók, végül szinte teljes irodalmi jegyzék. Az elmondottak miatt kitűnően alkalmas mindazok részére, akik a hálóelméletet alkalmazás miatt szándékozzák tanulmányozni és azok részére is, akik hálóelméleti kutatásokhoz vezető út első állomásaként használják. Ezek a könyvnek azok a tulajdonságai, amelyek a jó bevezető könyvnek sajátjai s amelyek miatt komoly sikerre tarthat számot a nemzetközi könyvpiacon.

A könyv kiállítása, szedése, ábrái is gondos munkáról tanúskodnak.

*Szendrei János*
*a matematikai tudományok kandidátusa*

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1963. június 24. — Terjedelem: 7,50 (A/5) ív, 36 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 63-1317

**Ára: 17,— Ft**

## TARTALOMJEGYZÉK



### A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL



### KÖNYVISMERTETÉS



Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI

XIII. KÖTET 4. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1963

III. OSZT. KÖZL.

# A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
## MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
# KÖZLEMÉNYEI



XIII. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye, változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésén bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismeretetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

# A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA 1963. ÉVI OSZTÁLYVEZETŐSÉGI BESZÁMOLÓJA*

## I.

Az Akadémia nagygyűlési beszámolóinak és így az osztályvezetőségi beszámolónak is, a szerepe kettős. Egyrészt visszapillantunk a legutóbbi közgyűlés óta eltelt időszakra és megvizsgáljuk munkánk eredményét, valamint azt, hogy mit mulasztottunk el, vagy mit végeztünk rosszul, de a jövőbe is nézünk, hogy meghatározzuk, melyek a legsürgősebb feladataink s melyek azok, amelyek megoldására csak később érnek meg a feltételek. Kötelességünk ezt megtenni annál is inkább, mert az Akadémia feladata nemcsak az általános tudományfejlesztési program ráeső részének végrehajtása, hanem — legalább ugyanilyen jelentőséggel — a program megszabása tekintetében a kezdeményezés is.

Az Osztály működési területe több tudományágat ölel fel vagy van velük kapcsolatban. A kutatások részleteredményei, ha azokat önmagukban nézzük, csak a szorosan vett szakembereket érdeklik. Ha azonban ezen eredmények együttes hatását tekintjük, megállapíthatjuk, hogy e kutatások következményei és felhasználásuk az egész társadalmat érintik. A kutatómunka tehát jelentős közügy.

Érdemes megállni egy pillanatra annál a kérdésnél, hogy ma, a szocializmus alapjainak lerakása után mi a szerepe a tudományos kutatómunkának. Nem kell bizonyítani, hogy feladataink a múlthoz képest számban és jelentőségben is megnövekedtek. A szocializmusban tovább nőnek az igények a termelés mennyisége és minősége tekintetében, ez pedig mind az alapkutatások, mind az alkalmazott kutatások terén új feladatokat jelent. Ma a kutatómunkában új helyzetet teremt az a körülmény, hogy nemcsak az igények nőttek meg az új tudományos eredmények, mint a termelés előbbrevivői iránt, hanem bővülnek a tudományos kutatás lehetőségei is. Nem kell számadatokra hivatkozni, mert köztudomású, hogy a tudományos kutatásokra szánt összeg állandóan növekszik.

Ilyen helyzetben és ilyen igényeket szem előtt tartva kell tehát megítélnünk az Osztály és az intézetek múlt évi tevékenységét és ebből kiindulva kell kitűznünk további feladatainkat.

## II.

Az Osztályvezetőség irányító tevékenysége elsősorban a bizottságokon keresztül érvényesült. Az Osztály az elmúlt 2—3 év alatt elsősorban a kutatások koncentrálására törekedett a kutatómunka hatékonyságának fokozása érdekében. Ily módon lehetővé vált, hogy az Osztályvezetőség közvetlenül is érdemben foglalkozhatott nemcsak az akadémiai intézetek témáival, hanem a céltámogatott témákkal is.

* Felolvasta HAJÓS GYÖRGY akadémikus, osztálytitkár, az 1963. április 10-én tartott nyilvános osztályülésen.

Az Osztályvezetőség egy-egy tudományterület egészének elvi irányítása, módszertani befolyása terén a legjobb eredményeket az elmúlt év alatt azzal érte el, hogy a bizottságok elemző munkájára támaszkodva megvizsgálta egy-egy tudományág helyzetét. Így került sor a fizika, a kibernetika, a csillagászat és a matematika területén egyes tudományágak helyzetének megtárgyalására, e tudományágak legfontosabb feladatainak kijelölésére.

*Az intézetek tudományos munkájának* közvetlen irányításában a leghasznosabbnak az intézetek által készített éves munkáról szóló beszámolók és az éves kutatási tervek megvitatása bizonyult. Annak érdekében, hogy az Osztályvezetőség konkrétabb segítséget tudjon nyújtani az intézeteknek, hogy a beszámolók és az éves kutatási tervek tárgyalása során megfelelő határozatok szülessenek, az Osztályvezetőség az Elnökség által körvonalazott általános szempontok szellemében a beszámoló jelentéseket és éves terveket úgy készítette el, hogy azok világosan érzékeltessék egy-egy intézet munkájának fejlődését, tevékenységében jelentkező hiányosságokat, a tudományos munka főirányait. Ennek alapján a bizottságok és az Osztályvezetőség kísérletet tettek a tervteljesítés fokának mérésére, az intézetekben folyó kutatómunka tervszerűségének mérlegelésére, az intézetek kutató kapacitása kihasználásának mérésére, a tervhez képest tapasztalt lemaradás okainak alaposabb megvizsgálására, egyes káderproblémák feltárására. Vizsgálat tárgyává tették, hogyan tölti be az adott intézet központi, elvi irányító szerepét tudományágában, milyen elvi, módszertani vitákat szervezett, milyen szerepet játszott az intézet a tudományág hazai vagy nemzetközi rendezvényein. Az érdemi tárgyalást elősegítette a 2—3 év óta alkalmazott opponensi rendszer is.

Az intézetek tudományos tevékenységének befolyásolásában jelentős szerepet tölthetnek be az intézetek tudományos tanácsai. A tapasztalatok azt mutatják, hogy e testületek tevékenysége, az intézet irányításában nyújtott segítségük mértéke messzemenően attól függ, hogy az intézetek igazgatói milyen mértékben igénylik és szervezik meg a tanácsok működését, mennyiben támaszkodik az igazgató a tanácsra, mint tanácsadó testületre. Egyes intézetek tudományos tanácsainak működése alapján le kell szögezni, hogy a tanácsok tevékenysége nem merülhet ki csupán az intézet kutatási tervének véleményezésében és az éves munkáról szóló beszámolók megvitatásában. Bár a tanácsoknak ez alapvető tevékenységük, ezen túlmenően más feladatokat is el kell látniok. Így pl. eredményesen közreműködhet a tanács az intézet munkájának javításában, fejlesztésében, ha vizsgálja a kutatómunka intenzitásának kérdéseit, foglalkozik az intézet továbbfejlesztésével, szervezete és kutatótevékenysége jövőbeni alakulásával, káderhelyzetével stb.

Az Osztályvezetőség annak érdekében, hogy az intézetek tevékenységét jobban megismerje, a jó tapasztalatokat általánosíthassa, célul tűzte, illetőleg tűzi maga elé, hogy több, vagy összes intézetei tevékenységének egy-egy részterületét megvizsgálja (pl. a tudományos munka folyamatos irányítása és ellenőrzése, egy-egy témakörben folyó kutatás helyzete, egy-egy osztály tudományos tevékenysége, nyelvtanulás, ideológiai továbbképzés).

Az intézetek helyzetéről hozott több fontos határozat kötelezte az Osztályvezetőséget és az intézeteket a káderhelyzet javítására, a káderutánpótlás tervszerű biztosítására. E határozatok végrehajtása, az 1962. évben megtörtént minősítések, és az intézetek káderfejlesztési tervének kidolgozása lehetővé és egyben szükségessé is tette, hogy az Osztályvezetőség intenzívebbé, tervszerűbbé tegye a kádermunkáját.

Intézeteink munkája szorosan a távlati kutatási tervhez igazodott. A kutatott témák természetesen nem egyformán jelentősek és a távlati kutatási tervben sem szerepelnek egyforma súllyal. Az intézetek a szellemi és anyagi erőket általában jól koncentrálták a legfontosabb kutatási területekre. Szélesedett az együttműködés belföldi és külföldi viszonylatban egyaránt.

Az elmúlt évben intézeteinkben 130 témán dolgoztak, ebből 59 matematikai, 64 fizikai és 7 csillagászati téma. Ebben az évben a témák száma 122, ebből matematikai 67, fizikai 48, csillagászati 7.

Az Osztály tudományterületein elért főbb eredményeket a beszámoló melléklete tartalmazza. Ez a vázlatos melléklet is azt bizonyítja, hogy munkánk eredményes volt. Emellett meg kívánjuk említeni a tudományos terv teljesítését jelenleg gátló tényezőket. Ezek főként a következők:

*a)* Majdnem minden területen káderhiánnyal kellett megküzdeni, és ezúttal nemcsak a tudományos káderek annyit vitatott hiányáról van szó, hanem egyre nagyobb nehézségeket jelent a tudományos és műszaki segédszemélyzet hiánya is.

*b)* A kutatáshoz szükséges felszerelések és anyagok beszerzésének elégtelensége is több helyen akadályozta a munkát.

*c)* Bár az elmúlt év folyamán sikerek születtek a szocialista tábor országainak tudományos együttműködése terén is, nagy nehézséget jelent, hogy az egyes országok tudományos szervezeteinek mások a formái és a kapcsolatok felvétele és fenntartása néha bürokratikus.

*d)* Egészében még mindig megoldatlan a tudományos eredmények gyors gyakorlati alkalmazása.

*e)* A fizika egyes területein az elméleti és kísérleti kutatás között nagyfokú elszigeteltség tapasztalható.

## III.

Már a múlt évi beszámolóban szóltunk arról, hogy a *távlati kutatási tervnek* a kormány által való megerősítése után Osztályunk három főfeladat felelőse lett. Ezek a következők:

1. Elvi matematikai kutatások és alkalmazásaik, különös tekintettel a hagyományos magyar matematikai iskolák fejlesztésére.
2. Elvi jelentőségű fizikai alapkutatások.
3. A kibernetika fejlesztése és alkalmazása.

A két további, nem az Osztályhoz tartozó főfeladat távlati kutatási tervének kidolgozásában, ezek koordináló bizottságainak munkájában több az Osztályhoz tartozó szakember vesz részt. Ezek:

1. Szilárdtest fizikai kutatások (VI. Osztályhoz tartozik).
2. Molekula és anyagszerkezeti kutatások (VII. Osztályhoz tartozik).

Az Osztályhoz tartozó főfeladatokkal kapcsolatos munkákat, az Osztály megfelelő szakbizottságaira támaszkodva, koordináló bizottságok irányítják, amelyekben 35 tudós tevékenykedik. Megállapítható, hogy a koordináló munka sok olyan előre nem látott, bonyolult problémát vetett fel, melyek megoldása még hátra van. Jelentős az irányítás bürokratizálódásának a veszélye. A koordináló munkacsoportoknak nincs hatáskörük, s így kizárólag tanácsadói szerepet töltenek be, aminek az operatív munka látja kárát.

Már az első és ezért még nem teljesnek mondható tapasztalatok alapján is fel lehet vetni a kérdést, hogy az országos távlati tudományos kutatási tervhez tartozó főfeladatok valóban olyan problémacsoportokat tartalmaznak-e, amelyekre a népgazdaság fejlődésének és az egyes tudományágak előrehaladásának a jelen körülmények között ténylegesen szüksége van, vagy éppen ilyenek nem maradtak-e ki a távlati tervből? Ezzel a problémával az elkövetkező időben behatóan kell foglalkoznia az Osztályvezetőségnek.

Törekednünk kell arra, hogy a kormány által jóváhagyott országos távlati tervből az Akadémiára háruló feladatok megoldásához szükséges feltételek biztosíthatók legyenek. Ki kell tehát építeni az Akadémiára háruló feladatok megoldásához szükséges *intézeti hálózatot*. Ennek megfelelően az Osztályvezetőség múlt évi tudománypolitikai jellegű tevékenysége középpontjában az akadémiai kutatóhálózat további szélesítése állt. Az Elnökség határozatának megfelelően kidolgoztuk a távlati intézetfejlesztési tervet, melyet a matematikai, fizikai és csillagászati tudományok jelenlegi helyzetének beható elemzése előzött meg.

A matematika szerepe napról napra rohamosan növekszik. A matematika módszereinek és eredményeinek mind nagyobb mértékű alkalmazására kerül sor nemcsak a rokon tudományokban, hanem a technika fejlesztésében, a gazdasági élet megszervezésében, irányításában és ellenőrzésében is. Szinte nincs ma már a matematikának olyan ága, amelynek módszerei, eredményei, közvetve, vagy közvetlenül alkalmazásra ne kerülnének. Ugyanakkor a többi tudományok (a természettudományok, a műszaki tudományok mellett ma a társadalomtudományok is) és a gazdasági élet egyre több megoldásra váró matematikai problémát vet fel. Ezek megoldása parancsolólag előírja a matematikai alapkutatásoknak, a matematika alkalmazásainak és a matematikai gépekkel kapcsolatos kutatásoknak a jelenleginél fokozottabb fejlesztését. Elsősorban az Akadémia feladata, főként saját intézetei útján, gondoskodni a matematikai alapkutatások és a matematikai gépkutatás kellő mértékének és színvonalának biztosításáról, az alkalmazások elősegítéséről, a kutatókáderek neveléséről. A fejlődés üteme azt bizonyítja, hogy az Akadémia csak a jelenleg meglevő két intézete (MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT) útján a matematikai kutatásokkal és az alkalmazásokkal szemben támasztott igényeknek már a közeli években sem fog tudni eleget tenni. Ezért az elkövetkező 10—15 éven belül fokozatosan indokolt az alábbi fejlesztési terv:*

1. A jelenlegi *Matematikai Kutató Intézet* alapkutatásokat végezzen és ezek eredményeinek felhasználásával foglalkozzék. Feladatának betöltése érdekében az osztályok számát, a létszámot emelni kell.

2. A Matematikai Kutató Intézet szegedi osztályaiból egy önálló *Szegedi Matematikai Kutató Intézet* létesítendő. A megalakítás feltételei megvannak. Az új intézet feladata lenne elsősorban a matematika alapvető ágaiban elméleti kutatások folytatása, azok eredményeinek alkalmazása, összhangban a budapesti MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET kutatási tervével.

3. *Biometriai Intézet.* A megalakítandó intézet magját a Matematikai Kutató Intézet jelenlegi BIOMETRIAI OSZTÁLYA alkotná. Feladata lenne a matematika módszereinek alkalmazása az orvostudományban, biológiában, mezőgazdaságban stb.

* Időközben az intézetfejlesztési terv az Akadémia más osztályaival való egyeztetés után módosult.

4. A SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT átalakulna *Számítási Kutató Intézetté.* Az intézetben a számítástechnikával kapcsolatos alapvető kutatások folynának.

5. *Számoló Központ* létesítése a jelenlegi MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET és a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT megfelelő részlegeiből, illetőleg dolgozóiból. Feladata volna a matematika alkalmazásai során felmerülő rutinfeladatok elvégzése.

6. *Matematikai Gépkutató Intézet.* Feladata lenne a számológépek tervezésével és konstruálásával kapcsolatos matematikai kutatások folytatása.

7. *Matematikai Kutató Csoport* a DEBRECENI KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEMEN. Feladata lenne a matematikai alapkutatások folytatása és az eredmények alkalmazása.

8. *Műszaki Matematikai Kutató Intézet.* Feladata lenne a matematika műszaki alkalmazásaival kapcsolatos alapvető kutatások folytatása.

A létesítendő intézmények és a meglevők fejlesztése, valamint a gyakorlat igénye feltétlenül szükségessé teszi az egyetemi matematikus képzés fejlesztését és a jelenlegi matematikus hallgatói létszámkeret lényeges emelését. Ilyen vonatkozásban az Osztály már tett kezdeményező lépéseket.

A fizikai kutatások továbbfejlesztése érdekében ugyancsak kidolgozásra került egy intézetfejlesztési terv. Ebben a következő fizikai intézetek, kutatócsoportok megalakítása, ill. továbbfejlesztése szerepel:

1. *Kristályfizikai Kutató Intézet* létesítése a KRISTÁLYNÖVESZTÉSI AKADÉMIAI TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORTból és a KRISTÁLYFIZIKAI AKADÉMIAI TANSZÉKI LABORATÓRIUMból. Feladata: kristályfizikai alapkutatások folytatása.

2. *Elméleti Fizikai Alapkutató Csoport* alakítása a jelenlegi ELMÉLETI FIZIKAI AKADÉMIAI TANSZÉKI ALAPKUTATÓ CSOPORTból. Feladata: a fizika megalapozása, a fizika filozófiai vonatkozásai mellett az elemi részek fizikájára vonatkozó kutatások folytatása.

3. *Lumineszcencia és Félvezető Kutató Csoport* létesítése a jelenlegi LUMINESZCENCIA ÉS FÉLVEZETŐ AKADÉMIAI TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORTból. Feladata: lumineszcencia és félvezető kutatómunka folytatása.

4. *Spektroszkópiai Kutató Csoport* alakítása az ország különböző intézményeiben dolgozó szakemberekből. Feladata: molekulaspektroszkópiai vizsgálatok folytatása.

## IV.

A következőkben részletesebben kívánunk foglalkozni a hazai *kibernetikai kutatások és az elektronikus számológép-kutatások* helyzetével és feladataival.

Az elektronokus számoló- és adatfeldolgozó gépek a második világháború során jelentek meg és az eltelt kb. másfél évtized alatt a munka termelékenysége növekedésének rendkívül hatékony eszközévé váltak. Ezek a berendezések ma már nélkülözhetetlenek a gazdasági tervek kidolgozásában, a gazdasági döntések matematikai módszerekkel történő megalapozásában, a tervezéshez és irányításhoz szükséges mind nagyobb tömegű adatok nagy részletességű, pontos és főként igen gyors feldolgozásában, a termelési folyamatok és egyidejűleg a termelésigazgatási tevékenység komplex automatizálásában, a tudományos kísérletek és számítások, valamint a műszaki számítások szinte minden területén és számos olyan területén is a szellemi munkának, ahol eddig gépi eszközök igénybevételére aligha látszott lehetőség (pl. a biológiai, a nyelvészeti kutatásokban, a gépi fordításnál, a szakirodalom kivonatolásánál, rendezésénél és nyilvántartásánál, a honvédelemben, a bűnügyi nyilvántartásban stb.).

Az 1961. év végén üzemben levő digitális elektronikus számológépek száma a tőkés és gyarmati országokban kereken 12 000. Ismeretes, hogy a Szovjetunióban is nagy erőfeszítéseket tesznek és nagy eredményeket értek el a digitális számológépek fejlesztése és alkalmazása terén, számszerű eredményeket azonban nem ismerünk. A népi demokratikus országok közül — többen közöttük olyanok is, amelyeknek adottsága eredetileg a miénknél kedvezőtlenebb volt e tekintetben — lényegesen korábban kezdték a kutatásokat a digitális technika, mindenekelőtt a számológépek alkalmazása és kifejlesztése területén és így jelentősen előbbre tartanak, mint mi.

Az elektronikus számológépek megjelenése döntő szerepet játszott egy új, komplex tudományos kutatási irányzat, a *kibernetika* kialakulásában, amely a vezérlésnek és a szabályozásnak, továbbá az információk ezzel kapcsolatos gyűjtésének, továbbításának, tárolásának, feldolgozásának és felhasználásának olyan általános törvényeit kutatja, amelyek a vezérelt vagy szabályozott anyagi rendszer legkülönbözőbb mozgásformája esetén, a mozgásforma specifikus mozgástörvényeivel együttes hatásban érvényesülnek. A kibernetikai kutatások eredményei viszont lényeges szerepet játszanak az elektronikus számológépek további fejlődésében, valamint egyéb olyan berendezések létrejöttében, amelyek az élő szervezet, a gondolkodó agy vagy akár a társadalom egyes jól elhatárolt funkcióit utánozzák, és így döntő jelentőségük van nemcsak a termelőmunka komplex automatizálása terén, hanem perspektivikusan arra hivatottak, hogy az ember szellemi erőit — a gépies szellemi munka gépesítése útján — felszabadítsák a magasabbrendű szellemi tevékenységre.

A kibernetikai kutatások terén, különösen pedig a számológépek alkalmazása tekintetében hazánkban rendkívüli veszélyeket rejtő elmaradás következett be, ezért a legnagyobb nyomatékkal fel kell hívni a figyelmet a bekövetkezett helyzetre, s az ennek megjavítása érdekében szükséges teendőkre.

A problémák és a feladatok a következő területeken jelentkeznek:

— a számológépek felhasználásával kapcsolatos elvi matematikai és kibernetikai kutatások;

— a számológépekkel való ellátottság;

— a speciális káderek képzése;

— a digitális technika fejlesztése és alkalmazása, számológépkutatás (elméleti, matematikai és logikai, valamint a mindenkori technikai és gazdasági lehetőségeknek és igényeknek megfelelő műszaki kutatások).

A Számítástechnikai Központnak az M—3 gép üzembeállítása után a gazdasági, műszaki és tudományos kutatás konkrét matematikai problémáinak programozásával és megoldásával kellett volna bizonyítania a számológépek gazdasági és tudományos hatékonyságát, elősegíteni a kifejlődő újabb számolóközpontok káderszükségletének kiképzését és meghonosítani a programozási munka egyes területeinek módszertanát. Erre a feladatra azonban a profil rendezetlensége miatt a Központ kis létszámú kutatógárdájának alig marad ideje. Az említett kutatásokban a Matematikai Kutató Intézet matematikai logika és alkalmazásai, valamint numerikus módszerek osztályaira is hárultak fontos feladatok, azonban ezek sem álltak a létszámhelyzet és a helyiségekkel való ellátottság, de a gyakorlatilag is fontos aktuális megbízások szempontjából se jobban, mint a Számítástechnikai Központ, emellett számológéppel sem rendelkeznek.

A felsorolt problémákkal kapcsolatban hangsúlyozni kell, hogyha az önálló hazai eredményekre való törekvést nem is vesszük tekintetbe, csak a külföldi eredmények megértését, átvételét és hazai hasznosításuk előkészítését tekintjük, akkor is a jelenleginél sokszorosan nagyobb erőfeszítésekre van szükség. Ugyanakkor az adaptáláson túlmenően a hazai eredmények továbbfejlesztése a korszerű, a távlati alkalmazások szempontjából döntő irányokban nagy lehetőségeket rejt magában. Az országban jelenleg 5 elektronikus számológép működik. Tudomásunk szerint előreláthatóan a következő év elején további két gépet állítanak üzembe. Hazai elektronikus számológép-ellátottságunkra az a jellemző, hogy az importált gépek nagy része nem centrális elhelyezésű és a káderhiány miatt a folyamatos üzemeltetés általában csak nagyon nehezen valósítható meg, ami az amúgy is rossz gépellátottság további súlyosbodásához vezet. Még a leggazdagabb országok is számolóközpontokkal oldják meg számítástechnikai feladataik többségét és csak bizonyos fejlődési stádium elérése után látják el a nagyobb üzemeket digitális számológépekkel. Hazánkban a gépek beszerzése és üzembeállítása tekintetében nem vették figyelembe ezt a nagyon fontos szempontot, pedig ez lett volna a legrentábilisabb megoldás mind a gépek, mind a programozó kapacitás kihasználása szempontjából.

Hangsúlyozni kell, hogy az MTA Számítástechnikai Központja elsősorban azért nem felelt meg a szükségletnek, mert nem volt megfelelő gépe.

A káderképzés területén kétségbeejtően rossz a helyzet. Sürgősen biztosítani kell a kialakítandó számolóközpontok programozó matematikusokkal és matematikus-technikusokkal, üzemeltető és karbantartó mérnökökkel való ellátását. Gondoskodni kell a számológépkutatáshoz szükséges kutatómérnökök képzéséről. Ezenkívül szükség van a mérnökképzés, a természettudományos szakemberek és a közgazdászok képzése vonalán a számítástechnikai oktatás olyan irányú bevezetésére, hogy az említett szakemberek saját munkaterületükön az elektronikus számológépekkel megoldható feladatokat felismerni, az ehhez szükséges matematikai modellt felállítani, sőt egyszerűbb esetekben programozni is tudják. Végül a kibernetikai kutatások káderekkel való ellátása érdekében szükséges az előbbiekben említett határterületeken (pl. közgazdaság, nyelvészet, biológia) erős matematikai és számítástechnikai szakképzettséggel is rendelkező kutatókáderek kiképzése.

A digitális technikára és a számológépkutatásra vonatkozóan helyes az a terv, hogy a matematikai és logikai jellegű kutatások a III. Osztály megfelelő intézeteihez, a műszaki kutatások és szükség esetén az ezzel kapcsolatos fejlesztés is a VI. Osztály Automatikai Intézetéhez tartozzanak. A rendszertechnikai kutatások komplex jellegüknél fogva általában mindkét osztályt érintik és így ilyen feladatoknál a két osztály intézményeinek szervezett együttműködése kívánatos.

## V.

### *Káderutánpótlás*

Az Elnökség határozata értelmében az Akadémia intézményeiben új személyi minősítési rendszert vezettek be, amelyeknek egyik lényeges vonása, hogy a kutatókat fejlődésükben kell szemlélni és meg kell határozni azokat a konkrét feltételeket, amelyek további fejlődésükhöz szükségesek. Intézményeink egynémelyike azonban nem élt a minősítés ezen rendszere által adott összes lehetőségekkel. Több esetben nem készült elemző munkán alapuló értékelés és ezért hiányzott az egyéni fejlődést elősegítő javaslat is.

Megállapítható, hogy az Osztályhoz túlnyomó többségében szakmailag jól felkészült kutatógárda tartozik, akik alkalmasak magas színvonalú tudományos munka végzésére. Akadnak ugyan szakmailag szerényebb képességüek is, kellő vezetés és irányítás alatt azonban ezek nagy része hasznosan és eredményesen dolgozik. A kutatók többsége önálló tudományos munkát végez és a legfiatalabbak eredményei is ígéretek arra, hogy egy-két éven belül önálló munkára alkalmassá válnak. Az intézetekben rendszeresen tartott szakmai szemináriumok tervszerűen elősegítik szakmai fejlődésüket.

Az elmúlt évben az Osztályvezetőség és az intézetek kádermunkája elsősorban arra irányult, hogy az intézetekben szakmailag magas színvonalú, ideológiailag képzett kutatóbázis alakuljon ki, illetőleg erősödjék meg. Az Osztályvezetőség és az intézetek vezetői erőfeszítéseinek eredményeképpen a KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETben, a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETben, az ATOMMAG KUTATÓ INTÉZETben, az ELMÉLETI FIZIKAI KUTATÓ CSOPORTban kialakult egy tudományosan képzett, ideológiailag szilárd kutatókollektíva, amelynek zöme az idősebb kutatókkal együttműködő, szakmailag jól fejlődött, korban viszonylag fiatalabb szakemberekből áll. Ebben az irányban fejlődik a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT és a CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZET is.

Az intézetek kádermunkájában hármas feladatot kellett és kell megoldani. Tervszerűen, sokoldalú támogatással elő kell segíteni a kutatók szakmai-ideológiai fejlődését, más munkaterületekre irányítani azokat az intézeti dolgozókat, akik nem bizonyultak alkalmasnak tudományos munkára és szervezett formában biztosítani az utánpótlást.

Az intézeti minősítések során mind az intézetvezetés, mind az egyes kutatók előtt lényegében kialakultak azok a tennivalók, amelyek elvégzésével meg lehet gyorsítani a tudományos munkatársak fejlődését. Az Osztály irányító tevékenységének ebben a vonatkozásában amellett, hogy segítséget nyújt az intézeteknek a kutatók fejlődését elősegítő feltételek megteremtésében, azt kell biztosítani, hogy az intézetek vezetőinek, osztályvezetőinek rendszeres, mindennapi munkájává váljék a kutatók fejlődésének segítése, irányítása és hogy a tudatos kádermunka az intézetek életének szerves része legyen.

Az elmúlt években világossá vált, hogy az intézetekben a szakember-igény jelentős részének kielégítése a legeredményesebben úgy biztosítható, ha az intézetek sajátmaguk nevelik kezdő, az egyetem elvégzése után közvetlenül az intézethez kerülő fiatalemberekből kutatóikat. A két évvel ezelőtt bevezetett akadémiai gyakornoki rendszer az Osztály tapasztalata szerint bevált, azonban ez a rendszer a gyakornoki helyek kis száma miatt ma még nem nyújt megfelelő keretet az utánpótláshoz.

Örvendetes tényként említhető, hogy az elmúlt évi aspiránsfelvételeknél a több éven át igen korlátozott keretszámot felemelték. Így mód nyílt arra, hogy mindazon szakemberek, akik szakmailag és politikailag egyaránt megfelelőek voltak, felvételt nyerhessenek. A felvételeknél fokozott figyelemmel kísértük a káderutánpótlás szempontjából fontos területeket, mert e tudományterületek tervszerű előnyben részesítésével remélhető, hogy a következő években ezeken a szakterületeken is megfelelő számú tudományosan minősített dolgozóval fogunk rendelkezni. Sajnálattal kell megemlítenünk, hogy az idei felvételre igen kevés pályázat érkezett és félő, hogy még a rendelkezésünkre bocsátott keretszámot sem tudjuk majd betölteni.

Az esztendő folyamán megvédett kandidátusi és doktori értekezések témáit vizsgálva örömmel állapítható meg, hogy a tudományos színvonal megtartása, sőt növekedése mellett azok gyakorlati vonatkozásai is elmélyedtek.

Az egyes szaktárcák ösztönző intézkedéseket hoztak az elmúlt években az ipari kutatóintézetekben dolgozó kutatók minősítésének előmozdítására. Ez lényegesen elősegíti az ipari kutatóintézetekben folyó munka eredményességét és elmélyültségének fokozását. Ugyanakkor hiányosságként állapítható meg, hogy az ipari üzemekből jelentkezők száma és elméleti képzettsége sok esetben nem kielégítő az aspirantúrára való felvételre, amit elsősorban az ezen a területen dolgozók ösztönzésének hiányossága okoz.

Az aspiránsok elmúlt évi ideológiai, nyelvi és szakmai vizsgaeredményei kielégítőek voltak, ami arra is mutat, hogy javult az aspiránsvezetői tevékenység. Az önálló aspiránsok is megfelelő felkészültségről tettek tanúságot vizsgáikon.

Külön figyelmet kell fordítani azokra a munkatársakra, akik doktori disszertációjukon dolgoznak. Hozzá kell segíteni a fiatal, tehetséges kutatókat, hogy doktori disszertációt tudjanak készíteni. Alkotószabadságot kell biztosítani részükre.

A távlati tervekben rögzített kutatási feladatok sikeres teljesítésének egyik legfontosabb előfeltétele az önálló tudományos dolgozók kollektíváinak további gyors mennyiségi és minőségi fejlesztése. A mutatkozó káderhiányból azt a következtetést is le kell vonnunk, hogy a jövőben az ösztönzések olyan sorával kellene előállni, amely e foglalkozást vonzóbbá teszi. Ezek az ösztönzések különbözőek lehetnek; nem egyetlen, de lényeges oldaluk az anyagi kérdés is. Egy olyan államban, amely mindinkább azt az alapelvet igyekszik megvalósítani, hogy „mindenkinek munkája szerint", egy-egy foglalkozási ág társadalmi megbecsülésének objektív mérőjévé válik annak a bér- és életszínvonalskálán elfoglalt helye. Az e téren elkövetett tévedések teljes mértékű kiküszöböléséről majd csak akkor beszélhetünk, ha országunkban nem lesz többé olyan foglalkozás, amely annak ellenére, hogy kevesebb felkészültséget követel meg és kevesebb munkával jár, mégis jóval jövedelmezőbb.

A kádermunka jelentős alapvető célkitűzése, hogy minél jobban bevonjuk a tehetséges és eredményes munkát végző fiatal erőket a tudomány szervezésébe, irányításába. Ezért a jövőben — a bizottságok átszervezése során is — az idősebb tapasztalt vezetők mellett fokozottabb mértékben be kell vonni ebbe a munkába hozzáértő fiatalokat, annál is inkább, mert jelenleg sok vezető tudósunk annyira túl van terhelve tudományszervező és társadalmi megbízásokkal, hogy ennek közvetlen kutatómunkájuk és a káderképzésben végzett munkájuk vallja kárát.

Az *ideológiai képzést* a helyi pártszervezetek biztosítják. Az akadémiai tanszéki kutatócsoportoknál — ahol az egyetemi pártszervezettel a kapcsolat lazább — fokozottabban szükséges, hogy a tanszékvezetők a kutatók politikai fejlődésére, emberi magatartására több figyelmet fordítsanak.

Megállapítható, hogy intézeteinkben általában tervszerűen folyik az ideológiai képzés, amelynek keretében kutatóink tanulmányozzák a marxista filozófiát, ideológiai vitákat rendeznek és részletesen feldolgozzák a Párt VIII. Kongresszusának irányelveit.

## VI.

### *A bizottságok munkája*

Az Osztályhoz tartozó egy-egy tudományterület egészét befolyásoló tevékenységben jelentős szerepet töltenek be a bizottságok. Az Osztály az utóbbi években bizottságaink munkájának irányításánál arra törekedett, hogy ezek figyelmét egyre inkább a tudományterület egészét érintő kérdések megvitatására, megoldására, a támogatott kutatások érdemibb ellenőrzésére és irányítására, a kutatómunka koordinálására fordítsa. Még hatékonyabbá lehetne talán tenni a bizottságok munkáját, ha számos szervezési kérdéssel a bizottságokon belül létrehozandó 5—6 tagú intézőbizottságok foglalkoznának és így a bizottság teljes ülésén érdemibb kérdésekkel lehetne foglalkozni.

Az Osztály a bizottságok tevékenységét részben az osztálytitkárnak a bizottságok elnökeivel, titkáraival folytatott megbeszélésein keresztül, részben a szaktitkárság és a bizottságok titkárainak kapcsolatán keresztül irányítja. Az elkövetkező évben az Osztályvezetőség külön vizsgálat tárgyává fogja tenni egy-egy bizottság irányító-koordináló tevékenységét.

A bizottságok tudományos munkáját irányító, befolyásoló tevékenysége előtt bizonyos mértékig új helyzetet teremt az akadémiai céltámogatások koncentrálása. Korábban egyes tudományterületeken a támogatással az Osztály az egyetemi tanszékeket csaknem kivétel nélkül átfogta és azok tudományos munkáját közvetlenül befolyásolta. Az akadémiai támogatás koncentrálásával több egyetemi tanszék tudományos munkája kikerült az Osztály közvetlen irányítása alól. Tisztázásra vár a jövőben, hogyan tudja az Osztály véleményét nyilvánítani, befolyását érvényesíteni ezeken a tanszékeken folyó kutatásokat illetően.

Az Osztálynak keresnie kell azokat a módszereket, feladatokat, amelyek a jelenleginél jobban elősegítik a bizottságok koordináló, elvi irányító, az egész tudományág fejlődését befolyásoló tevékenységének kibontakozását.

## VII.

### *Nemzetközi kapcsolatok*

Az Osztályvezetőség irányító tevékenységében az elmúlt évek során tudományos életünk nemzetközi kapcsolatainak fejlődése és sokoldalubbá válása következtében egyre nagyobb feladatként jelentkezett a rendelkezésre álló lehetőségek jobb felhasználása, valamint újabb formák kialakítása a nemzetközi kapcsolatok tartalmasabbá tételére. Míg néhány évvel ezelőtt a külföldi kiküldetések egyik fő célja a kádernevelés és ezzel párhuzamosan a személyes érintkezésen keresztül a külföldi intézetekkel, vezető tudósokkal a kapcsolat kiépítése volt, az utóbbi egy-két évben a tanulmányutak tervezésénél fokozatosan arra törekedett az Osztályvezetőség, hogy a kiküldetések a konkrét kutatási témák előrehaladását segítsék elő. Jelenleg megértek a feltételei annak, hogy elsősorban a kutatási igények határozzák meg a rendelkezésre álló kiküldetési keretek felhasználását.

A nemzetközi kapcsolatok javítása két fontosabb feladat megoldását is közvetlenül szükségessé teszi az Osztály területén. Az egyik: felül kell vizsgálni az akadémiai egyezmények munkatervében szereplő közös kutatási témákat abból a szempontból, hogy az elmúlt két-három év tapasztalatai alapján melyek azok, amelyek érdemi együttműködést jelentenek, és melyeket kell formális voltuk miatt törölni. Kisebb számú, de ténylegesen közös kutatást jelentő téma megkönnyíti az intézetek számára az eredményesebb munkát.

A másik tennivaló annak megvizsgálása, hogyan hasznosítjuk a külföldi kiküldetések, tanulmányutak kapcsán szerzett tapasztalatokat, eredményeket, hogyan kell tovább fejleszteni az e téren jelenleg alkalmazott módszereket, formákat. Indokoltnak látszik egy-egy intézeten belül 2—3 évre visszamenően megvizsgálni milyen módszerekkel, hogyan tartják fenn és fejlesztik a kapcsolatot külföldi társintézetekkel, milyen eredményekkel jár ez a kapcsolat, hogyan használják fel az intézet munkájában az intézeti kutatók külföldi tanulmányútjainak tapasztalatait, mennyiben bizonyultak hasznosaknak ezek a tanulmányutak. Egyik-másik területen bizottsági szinten történő hasonló felmérés is eredményesnek ígérkezik.

## VIII.

Az Osztály irányító tevékenységének sokoldalúsága, a hozzátartozó tudományterületek sokrétűsége nagy terheket ró az Osztályvezetőségre. Az Osztályvezetőség igyekezett munkáját úgy szervezni, hogy több fontos kérdés előkészítésében az Osztályvezetőség tagjai egyenként is részt vettek; ezzel egyrészt sikerült elérni a kérdések jobb előkészítését, másrészt az Osztályvezetőség tagjai több tudományág, illetőleg intézet problémáit ismerhették meg közelebbről.

Az Osztályvezetőség munkájában az elért eredmények és fejlődés ellenére két fogyatékosság tapasztalható. Az egyik, hogy viszonylag sokat foglalkozik szervezési kérdésekkel és kevés ideje marad egy-egy tudományág közös kérdéseinek alapos megvitatására. Másik fogyatékossága, hogy több esetben nem sikerült a hozott helyes határozatokat, intézkedéseket, állásfoglalásokat megfelelő módon és megfelelő magas szinten érvényre juttatni.

Az Osztályvezetőség az idén nem kívánta hosszú szóbeli beszámolóval igénybevenni az osztályülés idejét, ezért az osztály és intézetek működéséről, a kutatómunka eredményeiről szóló részletes jelentést mellékletként írásban juttatta el az érdekeltekhez. Az idei nagygyűlési osztályülést főleg arra kívánta felhasználni, hogy a figyelmet *a tudománypolitikai és a tudományszervezési kérdésekre irányítsa.*

## MELLÉKLET

### A kutatások jelentősebb eredményei

Az Osztályhoz tartozó, vagy az Osztály által anyagilag támogatott matematikai, fizikai és csillagászati intézmények jelentősebb kutatási eredményei nagy vonalakban, a következőkben foglalhatók össze:

#### MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET

A *valószínűségszámítás* határeloszlás tételeire vonatkozó kutatásokban információelméleti segédeszközökkel sikerült új tételeket bizonyítani. A valószínűségeloszlások algebrája témakörben új szempontból kerültek tárgyalásra a szuperpozíció felbontás problémái.

Az *információelméletben* az információ-akkumuláció kérdésére vonatkozó vizsgálatok alkalmazhatók a bonyolult berendezésekben fellépő hibák megkeresésére.

*Matematikai statisztikában* egyrészt a rendezett mintákkal kapcsolatos eloszlás és határeloszlástételekre vonatkozó új eredmények emelhetők ki, másrészt a kísérletek tervezésében elért eredmények.

Az *ortogonális sorok elméletében* az abszolút szummációval kapcsolatban bizonyítottak új tételeket.

*Konstruktív függvénytanban* eredményes vizsgálatok folytak folytonos függvények approximálhatóságának határaira, függvények lokális magasabbrendű differenciálhatóságára vonatkozólag.

*Differenciálegyenletek elméletében* eredményeket értek el elliptikus és parabolikus egyenletek megoldásai gradienseinek becslésére, membránok sajátértékeinek geometriai adatokból való becslésére vonatkozólag.

*Funkcionálanalízisben* a Hilbert-tér kontrakciói unitér dilatációinak szerkezetével kapcsolatos vizsgálatok és eredmények jelentősek.

*Topológiai kutatásokban* a függvénycsaládok által létesített syntopogén struktúrákra vonatkozó vizsgálatokat fejlesztették tovább.

*Gráfelméletben* eredményeket értek el a gráfszínezési problémákkal kapcsolatban a kritikus gráfok szerkezetére vonatkozóan.

*Algebrában* sikeresen foglalkoztak a véges Abel-csoportok összes faktorizációjának megoldásával és több szép eredményt értek el a félcsoportok, a gyűrűk és általánosításai elméletében, továbbá a hálók és félhálók elméletében.

*Számelméletben* elsősorban az összehasonlító prímszámelmélet körében elért eredmények jelentősek.

*Matematikai logikában* az adott axiomarendszerek keretein belül meg nem oldható matematikai problémákra vonatkozó kutatások voltak sikeresek. A matematikai logikának nyelvészeti kérdésekre való alkalmazása során sikerült megadni a nyelvnek mintegy 11 adattal meghatározott struktúrának, algebrai-halmazelméleti definícióját.

*A matematikai gépek* elméletében jelentős az az eredmény, amely a közvetlen formulával vezérelhető elektronikus digitális számológép logikai szerkezetének egyszerűsítésére vonatkozik.

*A matematika módszereinek és eredményeinek alkalmazása terén* az elmúlt évben is sikeres munka folyt az Intézetben. Fontosak azok az eredmények, amelyek hiradástechnikai alkatrészek élettartam vizsgálatára vonatkoznak. E kérdéssel kapcsolatos kutatások a KGST keretben folynak és a kutatások koordinálására Magyarország kapott megbízást. Az Országos Tervhivatal megbízása alapján vizsgálatok folynak a készletnormák kidolgozására. Igen értékesek azok az eredmények, amelyek a folyamatos termelést megadott kockázattal biztosító legkisebb raktárkészlet meghatározására vonatkoznak.

Jelentősek azok az eredmények is, amelyeket a *biometria* területén értek el a kutatók, ezek egyrészt orvosi vonatkozásúak, másrészt az állattenyésztés problémáival kapcsolatosak. A matematika alkalmazásai terén természetesen számos több eredmény volna még kiemelhető és felsorolható.

Az év során érkezett külső megbízások száma 181 volt, míg az év folyamán elintézett megbízások száma 145. Az Intézet által alapítása óta megoldott megbízások száma 1611. Hátráltatja e téren az Intézet munkáját egyrészt az alkalmazásokkal foglalkozó osztályok létszámhiánya, másrészt egy elektronikus számológép hiánya.

Kongresszusokon, előadókörutakon, tanulmányutakon, tapasztalatcserén 41 munkatárs járt összesen 88 alkalommal. A kutatók külföldön 90 előadást tartottak. Ez év során számos külföldi matematikus tett látogatást az Intézetben. Több ország (Szovjetunió, Csehszlovákia, Románia, Lengyelország) matematikai intézeteivel együttműködési kapcsolatban áll az Intézet.

Az év során megjelent, vagy közlésre benyújtott, az intézeti munka eredményeit tartalmazó dolgozatok és könyvek száma 203, amelyből 159 ez évi munka eredménye.

Az Intézet 31 munkatársa vett részt az egyetemi oktatásban. Az Intézetben összesen 310 alkalommal tartottak szemináriumot.

## SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT

A Központ feladata az 1962-es évben is többrétű volt. Az M—3 gép üzemeltetése, továbbá feladatoknak a gépen történő megoldása terén a kitűzött szintet — a gép fejlesztési munkája miatt — nem sikerült elérni. A kellőképpen ki nem dolgozott technológiával előállított és állandóan változtatott M—3 gép sok hátránnyal rendelkezik a szériával készültekkel szemben. A fejlesztéssel kapcsolatos műszaki feladatok egy része az elmúlt évben sem fejeződött be eredményesen. A Központ egységesebb struktúrájának kialakítását az 1962. évben sem sikerült megvalósítani. Kedvezőtlen, sőt fékező hatású az a körülmény, hogy a Központ vonatkozásában tudománypolitikai kérdésekben az állásfoglalás kikristályosodásához túl hosszú idő szükséges, és így a Központ munkáját, szervezetét döntően befolyásoló határozatok sokat késnek.

A Központ kollektívája négy osztály keretében végzi kutatási tevékenységét; 1. *Elméleti Osztály*, 2. *Gazdasági Alkalmazások Osztálya*, 3. *Számológépkutatási Osztály*, 4. *Számológépüzemeltetési Osztály*. Az elmúlt évben a Központban 10 témával foglalkoztak.

Elkészült az SCFP szimbólikus címeket fordító program, amely egy, a program elkészítése közben alkalmazott írásmódnál (utasítások szimbólikusan jelölt címekkel) az M—3 gépi nyelvre fordít. Értékes eredmények születtek a gépi feladat megoldásokkal kapcsolatos matematikai és logikai kutatások terén. Az ORSZÁGOS TERVHIVATAL részére olyan matematikai módszereket és számítási eljárásokat dolgoztak ki, amelyek segítséget nyújtanak a népgazdasági tervezés és elemzés tökéletesítéséhez és ezzel megteremtették a modern matematikai módszerek és elektronikus számológépek felhasználásának lehetőségét a népgazdaság tervezésében. Az ORSZÁGOS ÁRHIVATAL megbízásából olyan matematikai módszerek, adatrendezési és számítási eljárások kidolgozására került sor, amelyek segítségével meghatározhatók az árváltozások kölcsönhatásai és a legfontosabb termékek gazdaságossági mutatói. A bauxit- és alumíniumipar leggazdaságosabb termelési arányainak és fejlesztésének programozására szolgáló modellt dolgoztak ki a Központban. A népgazdasági tervezés matematikai-gépi módszereivel kapcsolatos kutatások keretében kidolgozásra került a „kétszintű tervezés" módszere. Figyelemre méltó eredmények születtek a gazdasági programozás problémáinak vizsgálata során.

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM MATEMATIKAI INTÉZETE

(Az Intézet az Akadémiától céltámogatást kap.)

Az Intézetben az *algebra* területén több részeredményt értek el, így pl. sikerült kidolgozni az ún. algebrailag kompakt csoportok elméletének egyszerű és egységes tárgyalását. *A számelméleti* kutatásokkal kapcsolatban továbbfejlesztették a diofantoszi approximációkra vonatkozó módszert és ennek újabb alkalmazásait adták. Eredményes munka folyt a *geometria* és a *topológia* területén, így pl. új eredmények születtek a diszkrét geometriával kapcsolatban. Részeredményeket értek el a klasszikus analízis és a függvénytani kutatásokban. Folytatódtak a matematikai logika eldöntésproblémájára vonatkozó vizsgálatok.

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI INTÉZETE, SZEGED

(Céltámogatást az Intézet az Akadémiától kap.)

Eredményes kutatómunka folyt az Intézetben a *differenciálegyenletek* és az *ortogonális sorok* elméletébe, valamint a *funkcionálanalízis* körébe vágó vizsgálatok keretében. Elkészült a „Valós függvénytan és függvénysorok" c. egyetemi tankönyv angol nyelvű változata, amely az Akadémiai Kiadó és a New-York-i Oxford Univ. Press közös kiadásában jelenik meg.

Az *algebrai vizsgálatok* során a Marczewski-féle függetlenség fogalmát alkalmazták hálókra, valamint félhálókra és megállapították ennek a fogalomnak legfontosabb tulajdonságait ezekre az algebrai struktúrákra vonatkozóan. Megjelent a „Bevezetés a hálóelméletbe" c. könyv német nyelven és megtörtént az angol nyelvű kiadás előkészítése is.

Elkészült a „Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien" c. egyetemi tankönyv kézirata, amely az Akadémiai Kiadó kiadásában fog megjelenni. Figyelemre méltó részeredményeket értek el az Intézetben a *geometriai vizsgálatok* során.

A *halmazelméleti vizsgálatok* keretében a transzfinit függvények elméletében G. KUREPA által elért eredményeket sikerült tovább élesíteni és a bizonyításokat lényegesen leegyszerűsíteni.

Tevékeny munka folyt az Intézetben a *matematikai logika elméleti kérdéseire,* alkalmazásaira, valamint a velük kapcsolatban felvetődő filozófiai kérdésekre vonatkozó vizsgálatok keretében.

KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM MATEMATIKAI INTÉZETE, DEBRECEN

(Az Intézet céltámogatást a Művelődésügyi Minisztériumtól kap.)

Az Intézetben a kutatások négy irányban folynak: geometria, algebra, analízis és valószínűségszámítás, ehhez járul még a matematika története.

A geometriai kutatásokban kiemelkednek azok a *differenciálgeometriai vizsgálatok,* amelyek eredménye HILBERT egyik sejtésére vonatkozik. Szép elismerést szereztek az *információ mértékek* karakterizálására vonatkozó eredmények. Végül megemlítendők azok az eredmények, amelyek a belső szorzat általánosításával a HILBERT *algebrának* olyan általánosítását adták, amelyeknek kikutatása nemcsak a normált algebrák eredményeinek nagy összefoglalását adják, hanem az általánosítás alkalmas még arra is, hogy az alkalmazásokban szerepet játszó valószínűségszámítási és mátrixelméleti kérdéseket is általánosítsanak.

## Központi Fizikai Kutató Intézet

Az Intézet 1962. évi tudományos tevékenysége az Országos Atomenergia Bizottság ötéves tervében megszabott fő irányoknak megfelelően folyt. A jelenlegi szervezési felosztás, amely 8 osztályra bontja az Intézet kollektív kutatási tevékenységét a következő: 1. I. *Fizikai Főosztály*, 2. II. *Fizikai Főosztály*, 3. III. *Fizikai Főosztály*, 4. *Kémiai Főosztály*, 5. *Elméleti Főosztály*, 6. *Elektronikus Főosztály*, 7. *Szilárdtestfizikai Laboratórium*, 8. *Sugárvédelmi Osztály*.

Az év folyamán 14 főtémával foglalkoztak. A főtémáknak a tudományos kutatás fő irányai szerint megoszlása a következő:

1. Nagyenergiájú magkölcsönhatások vizsgálata kozmikus sugárzási és gyorsított részecskék segítségével.
2. A kozmikus sugárzás geofizikai és asztrofizikai vonatkozásainak vizsgálata.
3. A fény mikrostruktúrájának vizsgálata.
4. Magspektroszkópiai kutatások.
5. Magreakciók vizsgálata.
6. Szilárdtestek rendezetlenségi jelenségeinek vizsgálata.
7. Elméleti kutatások.
8. Részecskegyorsító berendezések fejlesztése magfizikai kutatások és ipari alkalmazás céljaira.
9. Reaktorok tervezésével és építésével kapcsolatos fizikai és technikai kutatások.
10. Reaktorok tervezésével és építésével kapcsolatos kémiai kutatások.
11. Izotóp-kémiai kutatások.
12. Alkalmazott analitikai kémiai kutatások.
13. Komplex mérőberendezések; egyedi és kissorozatú elektronikus készülékek.
14. Közép- és nagysorozatú elektronikus mérőberendezések.

A kutatások néhány jól kiválasztott területen — a baráti országokkal és elsősorban a Szovjetunióval való közös együttműködésre támaszkodva — folytak. A kutatási témák jelentős része alapkérdések vizsgálatára irányult és ugyanakkor intenzív tevékenység nyilvánult meg a szakterületeknek megfelelő alkalmazott kutatási kérdésekben is. Az alkalmazott kutatások főtémáinak nagy része a reaktorkutatás köré csoportosult. Az alkalmazott kutatások területén kialakult második fő irány a nukleáris mérőműszerek kutatása és fejlesztése volt.

### *Az Intézet legfontosabb eredményei*

#### *Alapkutatással foglalkozó főtémák*

*A nagyenergiájú magkölcsönhatások vizsgálatában* a legjelentősebb eredmények a $\pi - p$ rugalmas kölcsönhatás buborékkamrás vizsgálata, a $\pi - p$ rugalmatlan kölcsönhatás emulziós vizsgálata és a kiterjedt légizáporok napi periodicitásának vizsgálata terén születtek.

A *kozmikus sugárzási* mérési adatok perióduskeresésére sikerült olyan matematikai statisztikai módszert kidolgozni, amely a kozmikus sugárzási adatok periodicitásából a meteorológiai eredetű részt el tudja különíteni.

A *fény mikrostruktúrájával kapcsolatos kutatások* terén jelentős eredménynek számít, hogy a korrelációmérésben és a *Michelson*-interferométer geometriájának vizsgálata során az elméleti és kísérleti eredmények jó egyezést mutattak. Figyelemre méltó eredmény a deutérium 2. és 6. vonalának kísérleti felbontása.

*A magspektroszkópiai vizsgálatok* során a $P^{31}$ és $F^{19}$ magok protonokkal való bombázása útján további nívók spín- és paritásadatait sikerült meghatározni, ennek alapján az $F^{19}+p$ típusú magreakciók első négy rezonanciájára vonatkozóan minden lényeges adat ismeretes.

A magfizikai kutatások során értékes eredményeket értek el egyes könnyű magok szerkezetének, továbbá a maghasadáskor lejátszódó folyamatok mechanizmusának vizsgálata területén. A polarizációs vizsgálatok alkalmával a drezdai ciklotron 13,5 MeV-os deutéronnyalábja segítségével — a magyar—német együttműködésben — meghatározták a $C^{12}(d, p)C^{13}$ reakciókból kilépő gamma-sugarak cirkuláris polarizációját.

*A szilárdtestfizikai* kutatások területén a transzportjelenségek vizsgálatával tisztázták a vakanciák szerepét $Cu_3Au$-ötvözet rendeződési folyamatában. Meghatározták a $Fe_2Al$-ötvözet spontán mágneses intenzitásának hőmérsékletfüggését a Kurnakov-pont környékén.

*Az elméleti fizikai* kutatások területén a legjelentősebb eredmény az elektromágneses térben mozgó részecske Schrödinger, illetve Pauli egyenletének megfelelő hidrodinamikai mozgásegyenlet megalkotása volt.

*Alkalmazott kutatással foglalkozó főtémák*

*A részecskegyorsító-berendezések* terén a fő figyelem az EG—2 tankgenerátorra irányult. A berendezés minden lényeges része a gyorsítócső kivételével elkészült. A csőkészítést technológiai problémák megnehezítették. Az év végére sikerült a technológiát elsajátítani.

*A reaktorkutatási* program keretén belül az 1960. év őszén megépített ZR—1 kritikus rendszeren befejezték a rácsvizsgálatokat, kidolgozták a reaktorok dinamikai viselkedését jellemző paraméterek mérésének metodikáját. A ZR—1 rendszer és az ott folyó kutatómunka kiváltotta a baráti országok ez irányú érdeklődését. A belső keringetésű organikus zónahúrok kivitelezése lényegében befejeződött. A reaktoron kívüli próbaüzem egyes méréseit elvégezték és kidolgoztak egy kalorimetrikus mérési eljárást a vizsgálandó organikus anyagokban elnyelődő reaktorsugárzás mértékének meghatározására. Üzembe helyezték a szerves moderátorok vizsgálatára alkalmas ZR—2 rendszert.

*A reaktorok tervezésével* és *építésével* kapcsolatos kémiai vizsgálatok alapján megállapították, hogy a difenil-difenilmetán eutektikus elegy kedvezőbb tulajdonságú, mint az amerikai szabadalomként elfogadott izopropildifenil. A fűtőelemkísérletekhez szükséges uránvegyületek előállítása során tisztázták az előállítási folyamatokban szerepet játszó egyes komplex uránvegyületek szerkezetét és képződési mechanizmusát. Kidolgozták az $UO_2$ kerámiatestek előállítási technológiáját.

*Az izotópkémiai kutatások* területén végzett tevékenység jelentős részét az izotóptermelés merítette ki. A beszámolási időszak folyamán rendszeresen 24-féle izotópot állítottak elő, 33 különböző vegyület formájában, 33,4 curie összmennyiségben. Az előállított készítmények értéke 605 000 devizaforint. A Nemzetközi Atomenergia Ügynökséghez beküldött izotópmintáikról megállapítást nyert, hogy azok minősége eléri a nemzetközi színvonalat. Eredményeket értek el az izotópeffektusok vizsgálata és újabb izotópkészítmények előállítása terén.

*Az alkalmazott analitikai-kémiai kutatások* folyamán az uránoxid szennyezéseinek vizsgálatához új, érzékeny spektrálanalitikai módszereket dolgoztak ki. A neutronaktiváció-analitikai módszert sikerrel alkalmazták azokban az esetekben, amelyekben a színképelemzéses módszer már nem bizonyult megfelelően érzékenynek. A tervévben új módszert dolgoztak ki a P, As és Sb meghatározására — kémiai elválasztással, valamint papírkromatográfiás módszerrel.

A *nukleáris műszerfejlesztés* terén végzett munkásság iránt megnyilvánuló nemzetközi érdeklődés is bizonyítja az Intézet ez irányú tevékenységének népgazdasági jelentőségét. Figyelemre méltó eredményt értek el az idő-amplitúdó konverter fejlesztése terén, amelynek révén lehetőség nyílt a 128-csatornás elektroncsöves analizátornak a nanonszekundumos tartományban időanalizátorként való alkalmazására.

A nukleáris mérőműszerek tranzisztorizálása program keretében végzett fejlesztési tevékenység eredményesnek mondható. Az 1963. tervévre beállított műszergyártási volumen megközelítően a kétszeresére emelkedett. Jelentősnek mondható az a tevékenység, amelyet a kutatók az ipari átadás és gyártmánybevezetés, valamint az ipari üzemekkel való együttműködés érdekében folytattak. A KFKI által kifejlesztett és az iparnak átadott típusokból a rendelkezésre álló adatok alapján a hazai ipar 1963-ban mintegy 80 millió forint értékben fog nukleáris műszereket gyártani.

A beszámolási időszakban megjelent 123 tudományos publikáció híven tükrözi az Intézet tudományos tevékenységének eredményességét.

## Atommag Kutató Intézet

Az Intézet a munkatervében megszabott feladatokat teljesítette. Az év folyamán 4 témával foglalkoztak, amelyek mind áthúzódtak 1963-ra is. A témák közül egy a Központi Fizikai Kutató Intézettel együttműködve folytatódik. Az elmúlt év kiemelkedő eredményei a magspektroszkópia, magreakciók és a hasadási termékeknek humuszon való visszatartására vonatkozó kutatása terén születtek.

Jelentős eredmény a $Cl^{36}$ mag $S^{36}$-ban bomlásánál az $\varepsilon_k/\beta^+$ *viszony megmérése*, amely az első kísérleti bizonyítékot szolgáltatja arra az elméleti előrejelzésre, hogy magasabb rendben nem egyértelműen tiltott bomlásoknál az $\varepsilon_k/\beta^+$ viszony nő. A gyorsneutronokkal és töltött részecskékkel létrehozott *magreakciókra vonatkozó kutatások* igen jelentősek, amelyek már több éve értékes eredménnyel folynak. *Kőzetek urántartalmának* vizes oldását befolyásoló néhány tényező laboratóriumi vizsgálatának eredményeként sikerült a világszerte folytatott hidrogeológiai uránkutatások eredményeit befolyásoló néhány természeti tényezőre (szemcsenagyság, érintkezés ideje, adszorpciós hatás) fényt deríteni. *Kőzetek és meteoritok tömegspektroszkópiai vizsgálata* keretében 86 különböző lelőhelyről származó hazai és külföldi galenit minta kvantitatív és részben kvalitatív kémiai analízisét végezték el 22 kémiai elemre. Tovább folytatódott a *hasadási termékek humuszon való visszatartására vonatkozó kutatómunka* és ennek során a periódusos rendszer átmeneti és egyes negatív karakterű elemeihez tartozó meghasadási termékek humuszsavakkal szembeni viselkedését vizsgálták.

Az Intézet felszerelésének korszerű 400 csatornás analizátorral való kiegészítése igen sürgető feladat. Sajnos, a beszerzés folyamatba tételét 1962-ben nem sikerült biztosítani, sőt 1963-ra sem sikerült erre a célra fedezetet biztosítani. Az Intézetben az elkövetkező években egy 5 Mv-os nyomásgenerátort építenek. Ugyancsak ilyen teljesítményű generátor építésére kerül sor a Központi Fizikai Kutató Intézetben is. A két Intézet szorosan együttműködve már megkezdte a berendezések tervezését.

1962-ben az Intézet munkatársai közül 10-en vettek részt külföldi tanulmányutakon és nemzetközi konferenciákon; ugyanezen időszakban 47 külföldi szakember látogatta meg az Intézetet. A kutatási munkáról 39 dolgozatban számoltak be, ezenkívül az Intézet munkatársai 45 népszerűsítő előadást tartottak, illetőleg cikkeket jelentettek meg.

### ELMÉLETI FIZIKAI KUTATÓ CSOPORT

Az év folyamán 7 témával foglalkoztak, valamennyi átnyúlik az 1963. évre. *Az atomok statisztikus elméletének kutatása* keretében megindult és folyamatban van az atomok korrelációs energiájának számítása új formula alapján, a statisztikus atommodel impulzustérben való viselkedésének vizsgálata. Az atommagok statisztikus elméletének vizsgálata során számításokat végeztek a két $C^{12}$ magból álló magmolekula rezonancianívónak meghatározására, figyelembe véve a magdeformáció perturbáló hatását. Jelentős eredmények születtek a *többvalenciás fémek és félvezetők elektronszerkezetének kutatása* terén is, a szelénatommal kapcsolatos vizsgálatok befejeződtek.

*A kristályok hibahelyeire vonatkozó vizsgálatok* során kimutatták, hogy a lineáris láncon mint modellen jellegzetes effektusok találhatók a hiányhely képződési energiájában és az elmozdulásokon fellépő aktivációs energiában.

1962-ben a Csoport munkatársai közül 5-en vettek részt külföldi tanulmányutakon és konferenciákon. A Csoport külföldi kapcsolatai igen széles körűek. A kutatói munkáról 13 közleményben számoltak be.

### LUMINESZCENCIA ÉS FÉLVEZETŐ AKADÉMIAI TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORT
(A József Attila Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézete, Szeged.)

A Csoportban 3 témával foglalkoznak, valamennyi hosszabb kifutású és így átnyúlik 1963-ra. *A molekuláris fluoreszcencia*-jellemzők meghatározására és ezek értelmezésére vonatkozó kutatások igen jelentősek, amelyek a csoportban kidolgozott módszerekkel már több éve szép eredménnyel folynak. A fluoreszkáló oldatokban lejátszódó energiaátadási folyamatok vizsgálata során sikerült tisztázni, hogy a fluoreszcencia csillapodási ideje a koncentráció növelésekor csak viszonylag nagyobb koncentráció-értékeknél kezd esni, egy széles intervallumban pedig konstansnak bizonyul. A CdSe-rétegek, kristályok fotoelektromos, galvanomágneses és felületi tulajdonságainak vizsgálata a Csoport több éves programja. A várható eredmények iránt ipari érdeklődés is megnyilvánul.

1962-ben a Csoport munkatársai közül 4-en vettek részt külföldi tanulmányutakon és nemzetközi konferenciákon; ugyanezen időszakban számos külföldi látogató kereste fel a Csoportot. A kutatási munkáról 12 közleményben számoltak be.

### KRISTÁLYFIZIKAI AKADÉMIAI TANSZÉKI LABORATÓRIUM
(Orvostudományi Egyetem Orvosi Fizikai Intézete, Budapest)

A laboratóriumban 4 témával foglalkoztak, 1 téma befejezést nyert, a többi áthúzódik 1963-ra. Vizsgálták az *alkalihalogenid kristályok szerkezetének változását* sugárzások, hőkezelés hatására. Új modellt állítottak fel a V-centrumra vonatkozóan, és tisztázták egyes szennyeződések hatását a felületi alakzatokkal kapcsolatban.

Megállapították, hogy $10^6\ r$ besugárzás hatására sem változik meg a NaJ kristály minősége. A kristályok növekedésére és hibahelyeire vonatkozó vizsgálatok során több olyan eredményt értek el, amelyek a kristálygyártásnál hasznosíthatók. 1962-ben került sor Csehszlovákiában a KGST országokban előállított kristályok minőségének ellenőrzésére, amelynek során a laboratóriumban kidolgozott eljárással a Gamma gyár által készített kristályok bizonyultak a legjobbaknak. A laboratóriumban kifejlesztett szcintingráfot az ipar sorozatgyártásra átvette, a KGST országok számára a gyártási jogot megkapta.

Eredményesen foglalkoztak a sugársérülések korai felismerésének lehetőségeivel, valamint igazolták, hogy egyes gyógyszerek ultrahangkezeléssel bőrön át is adagolhatók.

1962-ben a Csoport munkatársai közül 7-en vettek részt külföldi tanulmányutakon és nemzetközi konferenciákon; ugyanezen időszakban 12 külföldi fizikus látogatta meg a Csoportot. A Csoport egy román intézettel állt együttműködési kapcsolatban. A kutatói munkáról 30 közleményben számoltak be.

KRISTÁLYNÖVEKEDÉSI AKADÉMIAI TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORT
(Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Kísérleti Fizikai Intézete)

A Csoportban 6 témával foglalkoztak, valamennyi áthúzódik 1963-ra. A Csoport az elmúlt évben igen súlyos technikai nehézségek között folytatta munkáját. A helyiséghiány és az építkezés hosszú hónapokra meggátolta a Csoport egyes részlegeinek működését. A nehézségek ellenére több értékes tudományos eredményt értek el. Megállapították, hogy deformáció hatására a színes kristályok fényelektromos érzékenysége megnövekszik. Különösen erős ez a hatás KCl és KBr kristályokon. Értékes részeredmények születtek a tű, lemez és más alakú kristályok, kristálymagok képződése feltételeinek vizsgálata során.

1962-ben a Csoport munkatársai közül 6-an vettek részt külföldi tanulmányutakon és nemzetközi rendezvényeken; ugyanezen időszakban 9 külföldi szakember tekintette meg a Csoportot. A kutatói munkáról 8 közleményben számoltak be.

ELMÉLETI FIZIKAI ALAPKUTATÓ CSOPORT
(Eötvös Loránd Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézete)

A Csoportban 5 témával foglalkoztak, valamennyi átnyúlik 1963-ra. A Csoport tagjai az elméleti fizika *filozófiai* érdekességű problémái közül foglalkoztak a relativitáselmélet, az elemirészfizika jelentőségével és a fizikai kutatásoknak a társadalom fejlődésére gyakorolt szerepével. *A fém és atomok kölcsönhatása* szempontjából a relativisztikus kvantummechanikai *n*-test-probléma keretében értékes vizsgálatokat végeztek a két-szervesfrekvenciájú fényszórással kapcsolatban. A Csoportban művelt relativitáselméleti módszereket sikerült alkalmazni az *astronautika* egy elvi érdekességű kérdésére: milyen hatásfokkal képes hasznosítani az interstelláris hidrogén fuziós energiatartalmát egy közel fénysebességgel haladó jármű? A kvantumtérelméleti állapottér szerkezetének kutatása során megvizsgálták a semleges vektormezontér és fermiontér kölcsönhatása esetén *a Green-függvény matematikai viselkedését.* Sikerült meghatározni *a fotonok* neutrino-párrá történő átalakulásának hatáskeresztmetszetét, ha az átalakulást magok Coulomb-tere katalizálja. Megvizsgálták, miként befolyásolja ezt a hatáskeresztmetszetet elfajult plazma jelenléte. Az elért eredmények *asztrofizikai alkalmazása* során kiderült, hogy nagysűrűségű, fejlődésük utolsó szakaszában levő csillagok esetében a neutrinók keltése és kisugárzása a csillag belsejében kialakult hősugárzás rovására jelentős módon befolyásolhatja a csillag fejlődését. A Csoport munkatársai feldolgozták a kvantummechanikai *soktestprobléma*, modern, kvantumtérelméletből átvett módszereit. Tovább folytatódtak *a plazma magnetohidrodinamikai elméletét* megalapozó klasszikus statisztikai vizsgálatok.

1962-ben a Csoport munkatársai közül 16-an vettek részt külföldi tanulmányutakon és nemzetközi konferenciákon; ugyanezen időszakban mintegy 10 külföldi szakember látogatta meg a Csoportot. A Csoport kapcsolatban állt a lipcsei, varsói és a bécsi egyetemek megfelelő intézeteivel és a müncheni Max Planck Intézet elméleti fizikai osztályával. A kutatói munkáról 26 közleményben számoltak be, ezenkívül 15 idegen nyelvű és 17 magyar nyelvű előadást tartottak, ezenkívül sok szemináriumi előadást a Csoporton belül és ismeretterjesztő előadást a TIT keretében.

### Csillagvizsgáló Intézet

Az Intézet a munkatervében megszabott feladatokat teljesítette. Az év folyamán 4 témával foglalkoztak, amelyek áthúzódnak 1963-ra is. Az elmúlt év legkiemelkedőbb eredményei *a változócsillagok vizsgálata* terén születtek.

Feldolgozták az RRLyrae-ről az Intézetben eddig nyert egész megfigyelési anyagot, kb. 30 000 fotográfiai és 20 000 fotoelektromos megfigyelést és a csillag fő- és 40 napos szekunder periódusának változásait diszkutálták. Jelentős eredmény született az RR Lyrae-csillagok természetének felderítésével kapcsolatban. Feldolgozták az 1959-ben nemzetközi kooperáció keretében végzett négyszínfotometriáját a Béta Lyraeről. A budapesti anyag bizonyult a legnagyobbnak és legjobbnak a kooperáló 18 csillagda anyaga között. *A Tejútrendszer* vizsgálatával kapcsolatban új vizuális módszert sikerült kidolgozni, amely iránt külföldön is nagy az érdeklődés. Tovább folytatódott a *mesterséges égitestek megfigyelése.*

1962-ben az Intézet kutatói 12 alkalommal vettek részt külföldi tanulmányutakon és nemzetközi konferenciákon, amelyeken több előadást tartottak. Ugyanezen időszakban 6 külföldi csillagász látogatta meg az Intézetet.

Az Intézet nemzetközi kapcsolatai igen kedvezően alakultak. A Nemzetközi Csillagászati Unió a múlt évi XI. Közgyűlésén az Intézet igazgatóját a 27. „Változócsillag" Bizottság vezetőségi tagjává választották és megbízták a Szakosztály „*Information Bulletin on Variable Starts*" c. kiadványa szerkesztésével. Ez a Bulletin a változócsillagok terén elért olyan eredményeket közli, amelyek gyors publikálást kívánnak. A Bulletint az Intézet adja ki, eddig 10 száma jelent meg.

Befejeződött több mint 14 millió Ft-os költséggel a Mátra-hegységben levő Piszkéstető csúcsán az *obszervatórium* építése. Létesítését az Akadémia 1950-ben határozta el, minthogy Budapest világítása és füstje, valamint a Szabadsághegy fokozódó beépülése a Csillagvizsgáló Intézet működését mind nagyobb mértékben zavarta. A jénai Zeiss-művek már a megrendelt Schmidt-teleszkópot is leszállította. E teleszkóp nemzetközi viszonylatban is jelentékeny csillagászati műszer. A valamivel nagyobb hamburgi Schmidt-teleszkóppal, amely jelenleg a legnagyobb ilyen típusú távcső Európában, a mátrai a jobb légköri viszonyok miatt fel tudja venni a versenyt.

A Schmidt-teleszkóp elsősorban *a stellárstatisztikai vizsgálatokra* alkalmas. Ilyen jellegű kutatásokból a magyar csillagászok megfelelő műszer hiányában teljesen ki voltak eddig zárva. A Csillagvizsgáló Intézet berendezése majdnem kizárólag a változócsillagok kutatására alkalmas jelenlegi helyén, mert Budapest közelsége egyéb fotometriai munkát lehetetlenné tesz. Minthogy azonban az Intézet éppen a fotoelektromos fotometria területén érte el eddig a legtöbb sikert, feltétlenül gondoskodni kell arról is, hogy a mátrai rendkívül kedvező légköri viszonyokat ilyen szempontból is kihasználhassák. Ennek érdekében további reflektorok beszerzése van folyamatban.

Az obszervatórium területén az Akadémia Geofizikai Kutató Csoportja egy *szeizmológus* állomást üzemeltet.

Az obszervatóriumban a rendszeres tudományos munka ebben az évben indult meg. A megfigyelések feldolgozásához szükséges mérőműszerek rendelkezésre állnak.

Az Intézet bekapcsolódott az egyetemi oktatásba és káderképzésbe. Az előadások témáit az Intézet munkatársai úgy választották meg, hogy azok egyúttal bevezetők voltak a Schmidt-teleszkóppal végezhető kutatásokba. Az Akadémia lényegesen elősegítette a csillagász káderképzést azzal, hogy a nyári hónapok alatt lehetővé tette 6 egyetemi hallgató számára az Intézetben való munkát, ezenkívül társadalmi ösztöndíjban részesít 2 hallgatót.

NAPFIZIKAI OBSZERVATÓRIUM

Az Obszervatórium az év folyamán 2 témával foglalkozott. A napprotuberanciákra vonatkozó vizsgálatok keretében a belföldi fotoanyagok nem megfelelő minősége és észlelő segéderő hiánya miatt csak kevés felvételre került sor.

*A napfoltcsoportok fejlődésére* vonatkozó vizsgálatok során 716 fényképfelvétel készült a teljes napkorongról. Az Obszervatórium fő tevékenysége 1900—1913 közötti időszakban észlelt 14 000 penumbrális folt megfigyelési anyag statisztikai feldolgozása volt. A vizsgálat során arra a következtetésre jutottak, hogy ilyen foltok nem léteznek, legfeljebb a foltok keletkezési és megszűnési időszakának egy-egy rövid ideje alatt tekinthetők umbra nélküli állapotnak. Új eredményt sikerült kapni az ún. „fizikaiforeshartening" effektusra. Az eredmények felhasználásával az effektus egyszerű értelmezésére, továbbá a foltokat körülvevő fáklyák magasságának és a foltok mélységének meghatározására került sor.

1962-ben az Obszervatórium munkatársai közül senki sem vett részt külföldi tanulmányúton; ugyanezen időszakban 2 külföldi napfizikus látogatta meg az Obszervatóriumot. Az Obszervatórium munkatársaitól az elmúlt évben dolgozat nem jelent meg.

## Az Osztály testületi működése

Az Osztály vezető szervei 2 osztályülés és 9 osztályvezetőségi ülés alkalmával foglaltak állást az Osztály munkájának irányításához szükséges legfontosabb tudománypolitikai és tudományszervezési kérdésekben. Kibővített osztályülés vitatta meg az MSZMP VIII. Kongresszusának irányelveit és ennek alapján a tudományos kutatás továbbfejlődésének követelményeit. Beható, elemző vita után alakította ki az Osztályvezetőség az intézetfejlesztési távlati tervét.

Az OSZTÁLYVEZETŐSÉG a bizottságok előterjesztése alapján elfogadta az *1961. évi kutatási beszámolókat* és az 1962. évi terveket. Az akadémiai matematikai, fizikai és csillagászati kutatás 5 éves terve osztályvezetőségi megvitatás után került elfogadásra.

Többször foglalkozott az Osztályvezetőség *a tudományos utánpótlás* tervszerűbbé tételének problémáival és a személyi minősítési rendszer fejlesztésének kérdéseivel.

Alkalomszerűen tárgyalta a *nemzetközi tudományos kapcsolatok* ápolásának, a *könyv- és folyóirat kiadás*ának és a *kutatás anyagi ellátás*ának napirenden levő kérdéseit.

Foglalkozott a hazai *kibernetikai és elektronikus számológépkutatások* helyzetével, a Számítástechnikai Központ profiljának kialakításával, ez évi tudományos ülésszakok, kongresszusok előkészítésével, a *Csillagvizsgáló Intézet* piszkéstetői obszervatóriuma kutatási programjának kialakításával, a *Csillagvizsgáló Intézet* és a *Napfizikai Obszervatórium* munkájának megvizsgálásával, a hazai matematikai élet irányításának egyes kérdéseivel, a hazai fizikai kutatások helyzetével és problémáival.

A tárgyalt kérdésekben elfoglalt álláspontját határozatokban rögzítette az Osztályvezetőség.

## A BIZOTTSÁGOK MUNKÁJA

A tavalyi Közgyűlési Osztályülés útmutatása irányában haladt az elmúlt évben a szakbizottságok munkája. Mindegyik bizottságban hangzott el az egyes tudományágak állásáról szóló beszámoló, ami egyúttal kritikai értékelést adott a szakterület hazai helyzetéről és fejlesztési módjáról. Ma már megállapítható, hogy bizottságainknál csökkent a néhány évvel ezelőtt még túltengő szervezeti adminisztrációs kérdésekkel való foglalkozás, így a bizottságok plénuma a tudományterület érdemi kérdéseivel foglalkozhatott.

Évenként ismétlődő feladatként a bizottságok megvitatták az 1962. évi kutatási beszámolókat és az 1963. évi kutatási terveket. A bizottságok egyazon témakörhöz, ill. intézethez tartozó kutatási beszámolókat és terveket ugyanazon bizottsági tagnak adták ki véleményezésre. Az opponensek bírálata alapján a bizottságokban érdemi vita alakult ki.

Az egyes bizottságok tevékenységének főbb jellemzői:

*A Matematikai Bizottság* sikeres kezdeményezése a hazai matematikai kutatások fejlesztése, a matematikai kutatásokkal kapcsolatos problémák tisztázása és a felmerülő problémák megoldását célzó javaslatok kidolgozása vitaankétok keretében. Ennek keretében a Bizottság eddig két nyilvános ankétot rendezett, egyiket *a tervezés problémái a matematikában*, a másikat pedig *a matematika alkalmazásai*val kapcsolatos problémák tárgykörben. A hazai matematikai logikai kutatások, a hazai algebrai kutatások, továbbá a hazai analízis kutatások problémáiról ebben az évben rendez ankétot a Bizottság. Foglalkozott a Bizottság a hazai matematikai élet irányításának egyes kérdéseivel. A Bizottság állandóan figyelemmel kísérte a Bolyai János Matematikai Társulat tevékenységét és tanácsaival, javaslataival elősegítette annak jó munkáját.

*A Fizikai Bizottság* az Elnökség számára *előterjesztést* készített a magyar fizikai kutatások helyzetéről és problémáiról és ebben több javaslatot dolgozott ki a kutatómunka eredményesebbé tétele érdekében. Az előterjesztésben a Bizottság áttekintette az eddigi eredményeket, felmérte a belső erőket, megjelölte a célkitűzéseket, vizsgálta, hogy mit nyújtott és mit nyújthatna a fizika a népgazdaságnak, foglalkozott a kutató és egyetemi intézetek problémáival, a nemzetközi kapcsolatokkal, a hazai és külföldi együttműködési kérdésekkel, káderutánpótlással és más, személyi ellátottsággal kapcsolatos problémákkal.

Foglalkozott a Bizottság *a Nemzetközi Elméleti és Alkalmazott Fizikai Unió* tevékenységével és megvizsgálta, hogy a magyar fizikusok milyen módon kapcsolódhatnának be az Unió munkájába. Beszámoltatta a Bizottság a fizika tárgyú távlati tudományos tervek koordinációs bizottságait. Az elhangzott beszámolókat tartalmas vita követte.

A Bizottság a hazai alacsonyhőmérsékletű fizikai vizsgálatok helyzetéről és a feladatokról a közeli időben vitaülést fog rendezni.

A Bizottság keretén belül működő *Spektroszkópiai Albizottság* a beszámolási időszakban 9 előadást rendezett.

Az Albizottság jelentős munkája volt az ez évben Budapesten kb. 500 külföldi részvételével rendezendő *molekula-spektroszkópiai kongresszus* előkészítése. Az Albizottság elhatározta, hogy a spektroszkópiai műszerek magyarországi gyártásával kapcsolatos 20 éves tervjavaslatot dolgoz ki.

A CSILLAGÁSZ BIZOTTSÁG, amely egyúttal a Csillagvizsgáló Intézet és a Napfizikai Obszervatórium Tudományos Tanácsa, többek között foglalkozott *a mesterséges égitestek* hazai megfigyelő állomásainak helyzetével és problémáival, *káderutánpótlási* kérdésekkel. A mesterséges égitestek hazai négy megfigyelőállomása munkájának koordinálására a Bizottság egy albizottságot alakított.

## A tudományos káderutánpótlás

A múlt évi Közgyűlés óta az Osztályhoz tartozó tudományok doktorainak száma 30-ra emelkedett, a kandidátusok száma pedig 107-re. A beszámolási időszakban 5 doktori és 7 kandidátusi megvédési vita volt az Osztályon.

*Tudományosan minősítetteink tudományterületek szerinti megoszlása 1962. év végén* a következő:

*Matematika:* akadémiai tagok 10, tudományok doktora 17, tudományok kandidátusa 54.

*Fizika:* akadémiai tagok 9, tudományok doktora 11, tudományok kandidátusa 49.

*Csillagászat:* akadémiai tagok 1, tudományok doktora 1, tudományok kandidátusa 3.

*Az 1962-ben felvett* (— rendes, 4 levelező és 16 önálló) *aspiránsok megoszlása szakterületenként:*

MATEMATIKA:

rendes: —
levelező: 3 (ebből 1 fő geometriai objektumok elmélete,
1 fő halmazelméleti topológia,
1 fő elektronikus számológépek programozásának elmélete).
önálló: 4 (ebből 1 fő metrikus terek belső geometriája,
1 fő differenciálgeometria,
1 fő differenciálegyenletek elmélete és alkalmazásai,
1 fő közgazdasági folyamatok mat. elmélete).

FIZIKA:

rendes: —
levelező: —
önálló: 12 (ebből 1 fő gázkisülések kísérleti vizsgálata,
1 fő téremissziós mikroszkópia,
1 fő lumineszcencia,
1 fő szilárdtestek elektronelmélete,
1 fő izotóp geológia,
1 fő kristályok rácshibáinak vizsgálata,
1 fő neutronfizika,
2 fő magreakciók vizsgálata,
3 fő reaktorfizika).

CSILLAGÁSZAT:
rendes: —
levelező: 1 (témája: csillagászati fotometria)
önálló: —

*1962 végén az aspiránsok száma:* 3 rendes, 11 levelező, 46 önálló. Megoszlás szakterületenként:

MATEMATIKA:

rendes: 2 (ebből 1 fő valós függvénytan,
1 fő gráfelmélet)
levelező: 7 (ebből 1 fő differenciálgeometria,
1 fő mátrixelmélet és alkalmazásai,
1 fő gépi közelítő módszerek,
1 fő függvényegyenletek elmélete,
1 fő elektronikus számológépek programozásának elmélete,
1 fő geometriai objektumok elmélete,
1 fő halmazelméleti topológia)
önálló: 7 (ebből 1 fő geometria,
1 fő differenciálegyenletek elmélete,
1 fő diszkrét geometria,
1 fő közgazdasági folyamatok mat. elmélete,
1 fő a metrikus terek belső geometriája,
1 fő differenciálgeometria,
1 fő diff. egyenletek elmélete és alkalmazásai).

FIZIKA:

rendes: 1 (témája: félvezetők zárórétegének vizsgálata)
levelező: 3 (ebből 1 fő gamma spektroszkópia,
1 fő félvezetők fizikája,
1 fő dozimetria)
önálló: 39 (ebből 1 fő interferenciajelenség intenzitás függetlenségének igazolása,
1 fő magspektroszkópia,
1 fő a fény mikrostruktúrájára vonatkozó vizsgálata,
5 fő szilárdtestek fizikája,
2 fő kozmikus sugárzás,
6 fő lumineszcencia,

1 fő a fizika középiskolai tanítása főbb szakmódszertani kérdéseinek vizsgálata,
1 fő csőrendszerben történő áramlások jellemző adatainak vizsgálata rádióaktív izotópokkal,
3 fő kristályfizika,
1 fő betonban lejátszódó kristályosodási folyamatok fizikai vizsgálata,
1 fő kvantumkémia,
1 fő elméleti magfizika,
3 fő magreakciók vizsgálata,
1 fő gyorsítóberendezések fizikája,
1 fő polarizált ionforrás készítése és vizsgálata
1 fő kvantummechanika,
1 fő parciális koherencia elmélete,
1 fő a levegő rádióaktív szennyeződésének vizsgálata,
2 fő magreakciók vizsgálata,
3 fő reaktorfizika,
1 fő izotópgeológia,
1 fő téremissziós mikroszkópia).

CSILLAGÁSZAT:

rendes: —
levelező: 1 (témája: csillagászati fotometria)
önálló: —

## Könyv- és folyóiratkiadás

Az Osztály könyvtervéből 1962. évben a következő művek jelentek meg:

SZÁSZ GÁBOR: *Einführung in die Verbandetheorie*,
ALEXITS—FENYŐ: *Mathematik für Chemiker*,
LÁNG LÁSZLÓ: *Abszorption spectra in the ultraviolet and visible region.*

Az Osztály által a múlt évben és az előző években kiadott könyvek tudományos színvonala elismerést váltottak ki. Könyvkiadási tevékenységünk azonban volumenét illetően nem mondható kielégítőnek. Viszont ha az Osztály könyvkiadási tervét tekintjük és számításba vesszük a már megjelent könyveket, és azokat, amelyek a közeljövőben kerülnek folyamatosan kiadásra, jobbá válik könyvírási tevékenységünk. Rövidesen több monográfia jellegű önálló munka elkészülése várható.

## Nemzetközi kapcsolatok

Az elmúlt évek során tudományos életünk nemzetközi kapcsolatai sokoldalúbbá váltak. Tudományos rendezvényekre, akadémiai egyezmény keretében, ösztöndíjjal vagy meghívás alapján a kiutazások száma 1962-ben: 151 fő. Az 1962. évi tárgyalások eredményeként ebben az évben 6 fiatal kutató utazik 6—12 hónapos tanulmányútra.

A baráti országok akadémiáival kötött egyezményekben 16 matematikai, 3 fizikai és 3 csillagászati tárgyú téma szerepel, amelyekben 1962-ben közös kutatások indultak vagy folytatódtak. Az együttes munkák több tudományos eredményét közös publikációk is rögzítik.

A kétoldalú egyezmények tapasztalatai azt mutatták, hogy a szocialista országok akadémiái gyakran foglalkoznak olyan kutatásokkal, amelyek több akadémiát érintenek. Ezért a múlt évben Varsóban megállapodás jött létre, hogy egyes témakörökben többoldalú tudományos együttműködést alakítanak ki. A következő ilyen témakörökbe való bekapcsolódásra kapott felhívást az Osztály:

*A Föld mesterséges bolygóinak megfigyelése.*

*A számítástechnika tudományos kérdései.*

*A kozmikus sugárzás kutatása.*

*Közös csillagvizsgáló intézet létesítése Bulgáriában.*

Külföldi tudósokkal való kapcsolatainkat elmélyíti az a lehetőség, hogy nemzetközileg jelentős és a magyar matematikai, fizikai, csillagászati élettel kapcsolatot tartó külföldi szakembereket vendégként meghívhatjuk Magyarországra. Tavaly 14 neves külföldi tudós látogatott el hazánkba 5—7 napos tapasztalatcserére. Kapcsolataink a nyugati világ tudósaival részben azoknak a nemzetközi szervezeteknek keretei között is bővülnek, amelyekben nemzeti bizottsággal, illetve egyéni tagsággal rendelkezünk (IUPAP, IMU stb.).

## Rendezvények

Az Osztály szeptember 25—30 között rendezte meg Tihanyban a *Nemzetközi Nagyenergiájú Fizikai Konferenciát* 17 magyar és 53 külföldi kutató részvételével. A konferencia célja a nagyenergiájú fizikai kutatások újabb eredményeinek ismertetése és megvitatása, továbbá a szocialista országok laboratóriumai közötti együttműködés továbbfejlesztése volt. Az elhangzott előadások száma 49 volt, ebből 6 előadást magyar szerzők tartottak és 3 előadás magyar és külföldi szerzők közös eredményeiről számolt be. Az elemi részecskék kölcsönhatásaival kapcsolatban hangzott el a legtöbb előadás. Érdekes eredményekről számoltak be a budapesti és varsói csoportok az elasztikus pion-nukleon szóródással, az alma-atai, berlini, budapesti, dubnai, prágai és pekingi csoportok pedig a rezonanciákon keresztül történő pionkeltési folyamatokkal kapcsolatban.

Az elmúlt évben az Osztály 7 felolvasó ülést rendezett, amelyeken a dolgozatok címszerinti bemutatásán kívül a következő előadások hangzottak el:

RÉDEI LÁSZLÓ: *A véges Ábel-csoportok Frobenius—Stickelberger—Dirichlet—Hajós-féle elmélete.*

PÁL LÉNÁRD: *Neutronok élettartamának és a későneutronok effektív hányadának meghatározása a neutronsokszorozás fluktuációinak alapján* (székfoglaló).

KALMÁR LÁSZLÓ: *A kvalitatív információelmélet problémái* (székfoglaló).

ERDŐS PÁL: *Gráfelméleti extrem feladatok* (székfoglaló).

ERDŐS PÁL—RÉNYI ALFRÉD: *Aszimetrikus gráfok.*

GYULAI ZOLTÁN: *A határréteg elmélet továbbfejlesztése.*

RÉDEI LÁSZLÓ: *A végesen generálható kommutatív félcsoportok elmélete.*

KÓNYA ALBERT: *Kvantumszámok az atom statisztikus elméletében* (székfoglaló).

Az Osztály ebben az évben a következő kongresszusokat, kollokviumokat rendezi:

*VII. Európai Molekula-spektroszkópiai Kongresszus* (az IUPAP támogatásával rendezi a III. és VII. Osztály, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat és a Magyar Kémikusok Egyesülete kb. 500—600 külföldi résztvevővel).

*UNESCO Matematikai Tanfolyam* a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika alkalmazásai tárgykörben (fejlődő országok matematikusai részére, 7 hónapos időtartammal).

*Abel-csoportok* tárgykörű kollokvium (a Nemzetközi Matematikai Unió megbízásából a III. Osztály közösen rendezi a Bolyai János Matematikai Társulattal kb. 35 külföldi résztvevővel).

*Szilárdtestfizikai Konferencia* (az Eötvös Loránd Fizikai Társulat az NDK Fizikai Társulattal közösen rendezi az Osztály közreműködésével Warnemündeben).

*Magfizikai Kollokvium* (az Eötvös Loránd Fizikai Társulat az Országos Atomenergia Bizottság támogatásával és az Osztály közreműködésével rendezi meg kb. 40 külföldi résztvevővel).

*A matematika közgazdasági alkalmazásai* tárgykörű kollokvium (a Bolyai János Matematikai Társulat rendezi az Osztály közreműködésével kb. 50 külföldi résztvevővel).

*A valószínűségszámítás fizikai alkalmazásai kollokvium* (az Eötvös Loránd Fizikai Társulat a Bolyai János Matematikai Társulattal közösen rendezi az Osztály közreműködésével csak magyar résztvevőkkel).

*Sugárvédelmi* ülésszak (az Eötvös Loránd Fizikai Társulat rendezi a KFKI-val közösen, az Osztály közreműködésével, kizárólag magyar résztvevőkkel).

*Plazmafizika és alkalmazása* tárgykörű ülésszak (az Eötvös Loránd Fizikai Társulat rendezi az Osztály közreműködésével, kizárólag magyar résztvevőkkel).

*Elméleti fizikai nyári iskola* (az Eötvös Loránd Fizikai Társulat rendezi az Osztály közreműködésével, kizárólag magyar résztvevőkkel).

## A társulatok munkája

*A Bolyai János Matematikai Társulat* az Osztállyal közösen 43 külföldi résztvevővel kollokviumot rendezett a *Matematika alapjai, matematikai gépek és alkalmazásaik* témakörből, továbbá 18 külföldi résztvevővel *Számelmélet* témakörből. Oktatási vonalon a Társulat legjelentősebb rendezvénye az UNESCO támogatásával a Művelődésügyi Minisztérium megbízásából megrendezett *matematikaoktatási szimpózium* volt, 18 külföldi és 6 megfigyelő résztvevővel. Az *Ifjúság Matematikai Kör* jó munkájának eredménye, hogy a magyar diákok a IV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián kiemelkedő helyezést értek el. A Társulat Pécsett módszertani kérdésekről rendezett középiskolai tanárok számára sikeres vándorgyűlést. Jól bevált együttműködési egyezményt kötött a Társulat a Csehszlovák Matematikai Társulattal.

A Társulat kötelessége többek között, hogy a matematika alkalmazásait minden erejével elősegítse. Ebből a célból rendezte meg az említett két kollokviumot és ebből a célból rendezi meg a Társulat ebben az évben *a matematika közgazdasági alkalmazásai kollokviumot.* Hasonló célkitűzéssel a Társulat ebben az évben egy a matematika alkalmazásaival és alkalmazóival foglalkozó szakosztályt létesít. Hazánkban egyre több helyen foglalkoznak a matematika alkalmazásaival, de nem volt eddig egy szerv, amely az ez irányú tevékenységet összefogta volna. Reméljük, hogy a létesítendő szakosztály teljesíteni tudja ezt a feladatot.

A Társulat tevékenyen részt vesz az *oktatási reform* kapcsán a középiskolai és egyetemi matematikaoktatás társadalmi bírálatában. A középiskolai tantervről igen komoly, érdemi vita megrendezésére került sor.

Az *Eötvös Loránd Fizikai Társulat* egyik legsikeresebb rendezvénye az Osztállyal közösen rendezett *Elektron- és Vákuumfizikai* kollokvium volt, amelyen 52 külföldi és 100 magyar szakember vett részt. A Társulat első ízben rendezett a múlt évben *nyári iskolát elméleti fizikából,* kizárólag magyar résztvevőkkel. Ez az iskola a fizikusok továbbképzésének világszerte elterjedt formája. Eredményes volt a Társulat égisze alatt rendezett *szemináriumsorozat* a soktest-probléma témakörben. Igen eredményesen működött a *Sugárvédelmi Szakcsoport,* amely előadásokkal, vitaestek szervezésével kívánja megteremteni a kutatómunka kiszélesítéséhez szükséges alapokat. Eredményes volt a Magyar Biofizikai Társasággal közösen rendezett *Vándorgyűlés,* amelyen 250 fizikus és középiskolai tanár vett részt.

Nagy súlyt helyezett a Társulat a középiskolai tanárok és tanulók továbbképzésére. Jelentős rendezvény volt a fizikatanárok részére rendezett *ankét,* amelyen 300 tanár vett részt, hogy szakmai és módszertani ismereteit gyarapítsa a mechanika és csillagászat témakörében. A Társulat nyilvános vitaülést rendezett a középiskolai fizika *oktatás reformjával* kapcsolatban. Pezsgő élet volt az *Ifjúsági Fizikai Körben,* amelynek keretében a Társulat összegyűjti a fizika iránt érdeklődő legkiválóbb középiskolai tanulókat és elősegíti önképzésüket.

Gyümölcsöző volt az együttműködés a múlt évben a NDK Fizikai Társulatával és a Csehszlovák Fizikai Társulattal. Előkészítette a Társulat a Lengyel Fizikai Társulattal való együttműködési egyezmény aláírását.

## Az Osztály anyagi ellátottsága

Beruházási keret 1962-ben: 5 500 000 Ft.

Beruházási keret 1963-ban: 6 900 000 Ft

Akadémiai intézetek létszáma 1962-ben: 305 fő.

Akadémiai intézetek létszáma 1963-ban: 320 fő (TKFA-nál 15 fő).

Az egyetemi intézetekben akadémiai álláson dolgozók száma 1962-ben: 47 fő, 1963-ban: 49 fő (ebből TKFA-ból alkalmazott volt 11 fő).

Akadémiai intézetek költségvetési összege 1962-ben: 15 318 000 Ft, 1963-ban: 17 759 000 Ft.

Az Akadémia által támogatott egyetemi intézetek támogatási kerete, intézetek béralapja 1962-ben: 2 439 000 Ft, 1963-ban: 2 501 000 Ft.

Az Osztályhoz tartozó kutatóintézetek és akadémiai tanszéki kutatócsoportok létszáma az 1963. év elején a következő:

| | |
|---|---|
| Atommag Kutató Intézet | 110 fő, |
| Matematikai Kutató Intézet | 89 „ |
| Csillagvizsgáló Intézet | 33 „ |
| Elméleti Fizikai Kut. Csoport | 19 „ |
| Napfizikai Obszervatórium | 6 „ |
| Számítástechnikai Központ | 64 „ |
| ELTE Matematikai Intézet | 3 „ |
| ELTE Elméleti Fizikai Intézet | 8 „ |
| EKMÜE Kísérleti Fizikai Intézet | 17 „ |
| Szegedi Tud. Egyetem Kísérleti Fizikai Intézet | 12 „ |
| Orvosi Fizikai Intézet Bp. | 9 „ |

# ÚJABB EREDMÉNYEK A DISZKRÉT GEOMETRIÁBAN

Írta: FEJES TÓTH LÁSZLÓ*

Az 1959-ben rendezett oberwolfachi geometriai kollokviumon egy előadást tartottam *Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie* címen. Ez az előadás 1960-ban egy folyóiratban is megjelent [1]. Ugyanebben az évben jelent meg HEPPES ALADÁR és MOLNÁR JÓZSEF hasonló tárgyú cikksorozatának első része, amely az euklideszi síkra vonatkozó kérdésekkel foglalkozik. Az 1962-ben megjelent második részben a szerzők állandó görbületű felületeken felmerülő diszkrét geometriai kérdéseket tárgyalnak [2]. A térbeli problémáknak szánt harmadik rész még nem jelent meg.

HEPPES és MOLNÁR az én ismertetésemet már számos újabb eredmény bemutatásával egészítette ki. A diszkrét geometria rohamos fejlődését bizonyítja az a tény, hogy az ő sokoldalú, nagy területet felölelő ismertetésük ellenére már újból időszerűvé vált a legújabb eredmények áttekintése. Olyan eredményekről lesz tehát szó, amelyek HEPPES és MOLNÁR dolgozatainak lezárása után jöttek létre vagy azután jelentek meg.

Ismertetésemben nem törekszem teljességre. Úgy érzem, túlzás nélkül beszélhetünk „magyar diszkrét geometriai iskoláról", s talán nem ér a sovinizmus vádja, ha előtérbe helyezem azokat az eredményeket, amelyeket ez az iskola ért el vagy amelyek keletkezésében a mi iskolánknak része volt.

A diszkrét geometria különböző kutatási területei közt nehéz határvonalat vonni. Áttekinthetőség kedvéért anyagunkat mégis néhány alcím szerint csoportosítjuk.

## Körelhelyezések

Régebben észrevettem, hogy „kevéssé különböző" nagyságú köröket nem lehet a síkban sűrűbben elhelyezni mint egyenlő nagyságúakat. Pontosabban a következőről van szó. Tekintsünk egy körhalmazt, s képezzük két tetszés szerinti sugár hányadosát. E hányadosok alsó határát a körhalmaz *homogenitásának* nevezzük. Legyen $s(q)$ az összes $q$ homogenitású körelhelyezés (felső) sűrűségének felső határa. Akkor a fenti észrevétel szerint van egy olyan 1-nél kisebb pozitív $q_0$ szám, amelyre $s(q_0) = s(1) = \pi/\sqrt{12} = 0{,}906\ldots$.

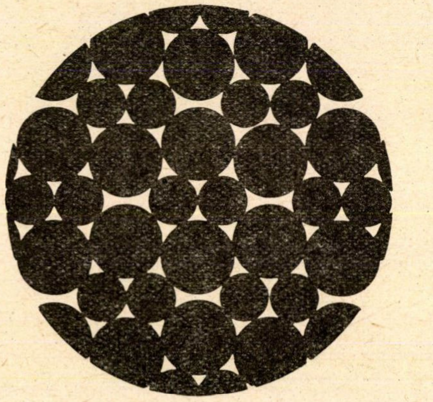
Felmerült természetesen a kérdés: milyen kicsinek választható ez a $q_0$ szám? MOLNÁR JÓZSEF azt sejtette, hogy az ilyen tulajdonságú $q_0$ számok minimuma $Q = 0{,}645\ldots$. Az 1. ábrán látható körelhelyezés sűrűsége ugyanannyi, mint az egybevágó körökkel elérhető maximális sűrűség, vagyis $\pi/\sqrt{12}$; a kis és nagy körök sugár-

* Előadta az 1963. évi április 11-én tartott nyilvános osztályülésen.

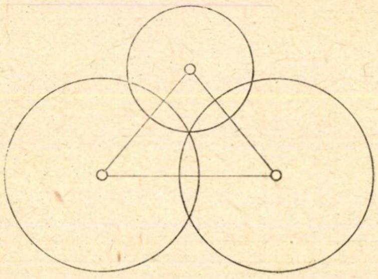
viszonya ekkor éppen $Q$. Bármilyen kevéssel csökkentve azonban a sugárviszonyt, szerkeszthető $\pi/\sqrt{12}$-nél nagyobb sűrűségű körelhelyezés.

Bár a *Molnár*-féle sejtés helyességének bizonyításától messze vagyunk, A. FLORIAN [3] bebizonyította, hogy $q_0$ 0,906-nak vehető. Ha tehát egységnyi sugarú körök helyett a síkot olyan körökkel akarjuk a lehető legsűrűbben kitölteni, amelyek sugara a (0,906, 1) intervallumba esik, akkor még biztos, hogy semmit sem nyertünk.

Az $s(q)$ függvényre eddig is jó alsó és felső becsléseket ismertünk. Az említett *Florian*-féle eredmény azonban megadja e függvény értékét egy egész intervallumban.



*1. ábra*



*2. ábra*

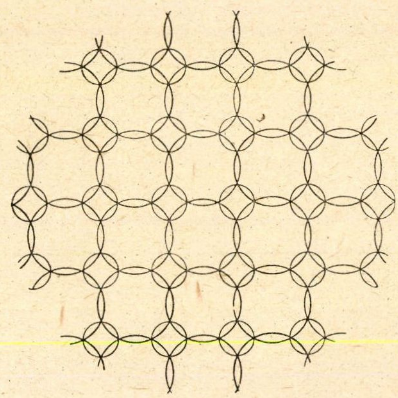
Az $s(q)$ függvény duálisa, $S(q)$, az összes $q$ homogenitású körfedések (alsó) sűrűségének alsó határa. Vajon itt is létezik egy olyan 1-nél kisebb pozitív $q_0$ szám, amelyre $S(q_0)=S(1)=2\pi/\sqrt{27}=1,209\ldots$? Ez a kérdés még nincs eldöntve. Valószínűnek látszik, hogy a válasz igenlő és MOLNÁR egy másik sejtése szerint a legkisebb ilyen tulajdonságú $q_0$ szám közelítő értéke 0,712.

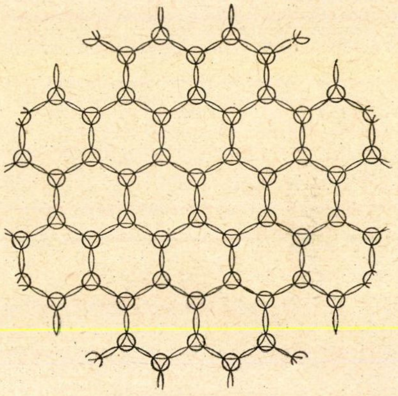
Tekintsük egy ponton átmenő, szimmetrikus helyzetű három 1, 1 és $q$ sugarú kör sűrűségét a középpontjaik által meghatározott háromszögben (2. ábra). Ez a sűrűség függ még egy paramétertől, mondjuk a két egységnyi sugarú kör középpontjának egymástól mért távolságától. Tekintsük a sűrűség minimumát, $D(q)$-t. Egy MOLNÁRral közösen írt dolgozatban kimondottuk azt a sejtést, hogy $S(q)\geqq D(q)$. FLORIAN, aki a $s(q)$-ra vonatkozó megfelelő sejtésünket előzőleg igazolta, ennek a sejtésnek a bizonyításában egy érdekes részeredményt ért el [4]. Bebizonyította, hogy egy olyan körfedés sűrűsége, amelyben csak kétfajta, mégpedig 1- és $q$-sugarú körök szerepelnek, nem lehet kisebb mint $D(q)$. Ez az eredmény azért érdemel figyelmet, mert ez a korlát a $q=1$ helyen kívül két további helyen, mégpedig a $q=1/2$ és $q=1/4$ hely közelében, pontos. Ezt ugyancsak FLORIAN [5] bizonyította be, miután MOLNÁR előzőleg konstruált olyan 1/2 és 1, illetőleg 1/4 és 1 sugarú körökből álló körfedéseket, amelyek sűrűsége $10^{-5}$ pontossággal megközelíti $D(1/2)$ és $D(1/4)$ értékét (3. ábra).

Szórjunk most szét a síkon adott $s$ sűrűséggel egybevágó köröket. Ha $\pi\sqrt{12}/<s<2\pi/\sqrt{27}$, akkor a körök részben egymásra borulnak, anélkül hogy a síkot teljesen lefednék. Kérdés, milyen elrendezésben fedik le a sík legnagyobb részét?

Régebben megmutattam, hogy akkor, ha a körközéppontok szabályos háromszögrácsot alkotnak.

Ezt az eredményt IMRE MARGIT [6] a következőképpen általánosította. Tekintsünk egy állandó görbületű felületen egy háromélű csúcsokkal bíró szabályos mozaikot, válasszuk ki ennek $n$ tetszés szerinti lapját s nézzük ezek egyesített halmazát, $E$-t. Kérdés, milyen elrendezésben borítja le $n$ egybevágó kör $E$ területének legnagyobb részét? Ennek a problémának természetesen csak akkor lehet egyértelmű megoldása, ha a körök nem kisebbek, mint a mozaiklapokba írt körök és nem nagyobbak, mint az azok köré írt körök. Ebben az esetben — ez IMRE MARGIT tétele — a köröknek koncentrikusoknak kell lenniök a kiválasztott mozaiklapokkal.


*3a. ábra*


*3b. ábra*

Rakjunk az euklideszi sík egy adott tartományába adott számú, tetszés szerinti nagyságú, egymásba nem nyúló köröket. Milyen méretű és helyzetű körökre lesz azok sugárösszege vagy, ami egyre megy, kerületösszege a lehető legnagyobb? Megmutattam, hogy „nagy számú" kör esetén „hatos kötésű" *egybevágó* körök választása a legkedvezőbb. Ezekhez a vizsgálatokhoz kapcsolódva LÁSZLÓ ZOLTÁN [7] felső korlátokat adott az egységgömbön fekvő, egymásba nem nyúló $n>2$ kör sugár- és kerületösszegére, amelyek az $n=3, 4, 6$ és 12 esetben pontosak és $n$ nagy értékeire aszimptotikusan pontosak.

Érdekes kutatási területnek ígérkezik egy hengerfelület legsűrűbb kitöltésének kérdése egységnyi sugarú körökkel. Legyen egy $T$ keresztmetszetű (végtelen) hengeren elhelyezhető egységsugarú körök sűrűségének szuprémuma $h(T)$. Ha $T<1/\pi$, akkor nem helyezhető a hengerre egy egységsugarú kör sem, s így $h(T)=0$. Másrészt könnyen belátható [8], hogy

$$T_{pq} = \frac{1}{\pi}(p^2+pq+q^2), \quad p, q = 0, 1, 2, \ldots, p+q>0$$

alakban felírható keresztmetszetekre

$$h(T_{pq}) = \sup_{T\geq\frac{1}{\pi}} h(T) = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

Mit mondhatunk $\inf\limits_{T \geqq \frac{1}{\pi}} h(T)$ értékéről?

Ha $\frac{1}{\pi} \leqq T \leqq \frac{3}{\pi}$, akkor [8]

$$h(T) = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi T(4-\pi T)}},$$

s így

$$\min_{\frac{1}{\pi} \leqq T \leqq \frac{3}{\pi}} h(T) = h\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Lehetséges mármost, hogy minden $1/\pi$-nél nem kisebb $T$-re $h(T) \geqq \pi/4$. Ez azt jelentené, hogy egy olyan hengerfelület, amelyre egy egységnyi sugarú kör már ráhelyezhető, mindig kitölthető egységnyi sugarú körökkel legalább $\pi/4$ sűrűséggel.

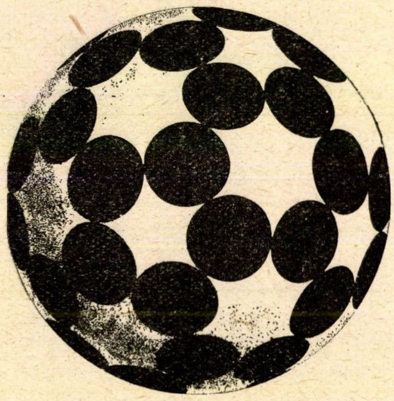
Meg kell még említenünk MOLNÁR JÓZSEF [9] egy új kutatási területét, amelyen már eddig is meglepően szép eredményeket ért el teljesen elemi, egyszerű eszközökkel. Képzeljük, hogy egy várost akarunk építeni egyenlő, kör alaprajzú házakkal, úgy, hogy minden házhelyhez érintőlegesen csatlakozzék egy-egy adott nagyságú kör alakú helikoptertér. Házhely házhelybe és házhely helikoptertérbe természetesen nem nyúlhat, de helikoptertér helikoptertérbe igen, úgyhogy több háznak lehet egy közös helikoptere. Milyen elrendezésben építhető km$^2$-enként a legtöbb ház? Arról van itt általánosabban szó: hogyan kell adott „térigénnyel" fellépő egybevágó tartományokat a legsűrűbben elhelyezni? Itt a térigényt megadó tartományok „mereven" hozzá vannak kapcsolva az elhelyezendő tartományokhoz. További problémák keletkeznek, ha az egyes tartományok térigénye bizonyos feltételek mellett változhat. Képzelt városunkban minden háznak esetleg két helikoptertérre és egy ugyancsak kör alakú „zöld területre" lehet szüksége, de ezeknek a köröknek a kölcsönös helyzete nincs okvetlenül megszabva: megengedhetjük, hogy ezek a „belső" körön egymás átfedése nélkül gördüljenek.

MOLNÁR mármost ilyen problémák megoldásaként rendkívül érdekes és változatos körrendszereket nyert, amelyek közt szerepel a NIGGLI által felsorolt 31 homogén körelhelyezés, sőt az ezeket is tartalmazó 131 SINOGOWITZ-féle körrendszer is. MOLNÁR ilyen irányú kutatásai még nincsenek lezárva, de eddigi eredményei is nagy haladást jelentenek abban az újabb törekvésben, amely a különböző szabályos alakzatok szélsőérték-tulajdonságokkal való jellemzésére irányul. (l. 4. ábrák).

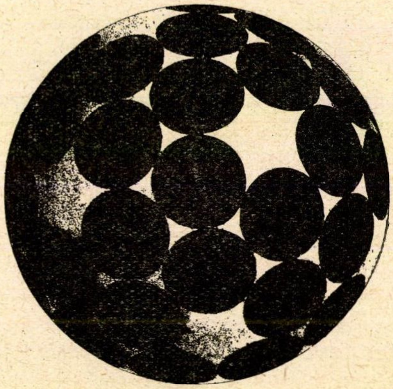
### Extremális pontrendszerek a gömbön

TAMMES, holland biológus, 1930-ban különböző virágok pollenszemein levő nyílások tanulmányozása során a következő, bizonyos hírességre szert tett problémát vetette fel: Hogyan kell egy gömbön $n$ pontot úgy elhelyezni, hogy a köztük fellépő minimális távolság maximális legyen?

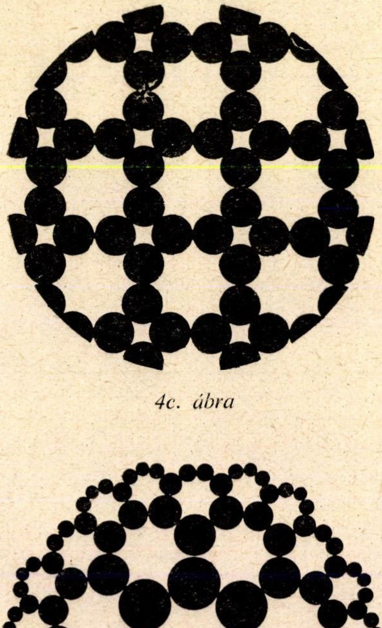
TAMMEStől függetlenül magam is felvetettem ezt a problémát több mint 20 évvel ezelőtt s egy becslést adtam a minimális távolság maximumára. Ez a becslés, amely ekvivalens a fentebb említett *László*-féle egyenlőtlenségek kongruens körökre vonatkozó esetével, megadja a megoldást $n=3$-, 4-, 6- és 12-re. Ezekre a pontszá-



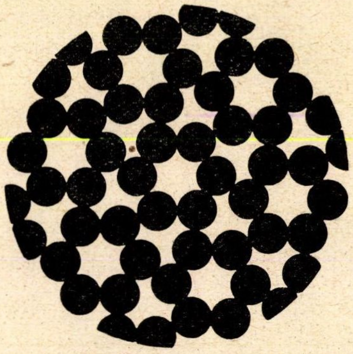
*4a. ábra*



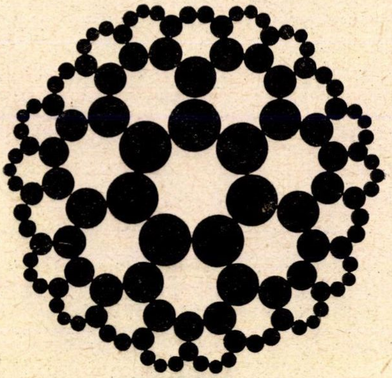
*4b. ábra*



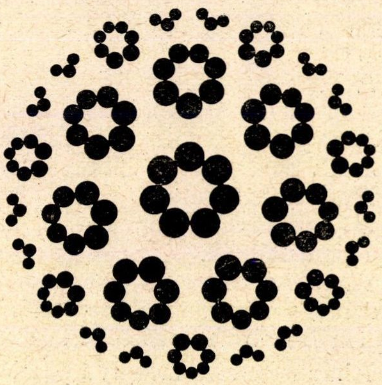
*4c. ábra*



*4d. ábra*

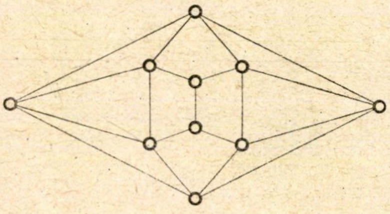


*4e. ábra*



*4f. ábra*

mokra az extremális pontrendszereket a szabályos trigonális poliéderek (trigonális diéder, tetraéder, oktaéder és ikozaéder) csúcspontjai adják. Nagyon egyszerű az $n=5$ eset, amely azért érdemel figyelmet, mert itt a megoldás nem egyértelmű. Az egyik megoldás úgy adódik, hogy az oktaéder 6 csúcsa közül az egyiket elhagyjuk. Az általános megoldásban egy-egy pont a pólusokba, három pedig az egyenlítőre kerül úgy, hogy kölcsönös távolságuk ne legyen kisebb 90°-nál. Az $n=7$, 8 és 9 esetet SCHÜTTE és van der WAERDEN intézte el. Kiemelendő az $n=8$ eset, amelynek megoldását a (3, 3, 3, 4) szimbólumú archimedeszi antiprizma adja. 1958-ban DANZER megmutatta egy Oberwolfachban tartott előadásban, hogy az $n=11$ eset megoldása az, hogy az ikozaéder 12 csúcsa közül egyet elhagyunk. Újabban pedig ROBINSON megoldotta a TAMMES-féle problémát $n=24$-re, megmutatva, hogy az extremális pontrendszert a (3, 3, 3, 3, 4) szimbólumú félig szabályos test csúcsai szolgáltatják.



5. *ábra*

Ezen előzmények után a legújabb eredményt ezen a téren DANZER [10] érte el, aki SCHÜTTE és van der WAERDEN, valamint saját módszereit tökéletesítve és általánosítva elintézte az $n=10$ esetet is. Megoldásként az a pontelrendeződés adódott, amelyet SCHÜTTE adott meg mint legjobbnak sejtett pontrendszert. Ennek a pontrendszernek a gráfja, amely a minimális távolságú pontok összekötése által jön létre, az 5. ábrán látható.

Ezek szerint teljesen ismerjük az extremális pontrendszereket $n \leqq 12$-re, valamint a kivételesen érdekes $n=24$ esetben. Minthogy a probléma megoldása tetszés szerinti pontszámra lehetetlennek látszik, beérhetjük ennyivel és a kérdést többé-kevésbé lezártnak tekinthetjük.

Most egy másik, szférikus pontrendszerekre vonatkozó szélsőértékproblémát említek, amely az előbbivel szemben azért érdemel figyelmet, mert (bár első pillanatra nehezebbnek látszik a fentinél) megoldását minden pontszámra ismerjük.

Tekintsünk a gömbön $n$ pontot, kössük össze mindegyiket mindegyikkel egy-egy legrövidebb főkörívvel, s képezzük a keletkező $\binom{n}{2}$ gömbi távolság összegét. Milyen elrendezésben lesz ez a kölcsönös szférikus távolságösszeg a lehető legnagyobb?

A HEPPES ALADÁRral együtt elért részeredmények alátámasztották azt a sejtést, hogy a megoldás $n$ paritásától függ a következő módon. Páros $n$-re a gömb középpontjára szimmetrikus minden pontrendszer extremális. Páratlan $n$-re az extremális pontrendszer felbomlik egy (esetleg üres) a gömb középpontjára szimmetrikus részhalmazra és egy főkörön fekvő részhalmazra. A főkörön a pontok úgy helyezkednek el, hogy bármelyik által meghatározott két nyílt félkörön ugyanannyi pont fekszik.

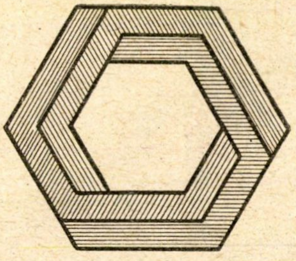
Páros $n$-re SPERLING bizonyította be a sejtés helyességét igen szellemes módon. Az ő módszerének továbbfejlesztésével LARCHERnek [11] nem régiben sikerült a páratlan $n$-re vonatkozó sejtést is igazolnia.

Nincs megoldva még az a probléma, amely akkor keletkezik, ha a gömb helyett az elliptikus síkon vizsgáljuk ugyanezt a kérdést. Az eredeti problémát így is fogalmazhatjuk: milyen elrendezésben lesz $n$ félegyenes által alkotott valamennyi szög összege maximális? Most arról van szó: mikor lesz $n$ egyenes által alkotott valamennyi (nem tompa) szög összege maximális? Úgy látszik, hogy ebben a problémában az a döntő, hogy $n$ hárommal osztva milyen maradékot ad.

## Stabilitási kérdések

N. G. DE BRUIJN mutatott először rá véges sok konvex testnek a térben való olyan elhelyezésének lehetőségére, amelyben bármelyiket a többi rögzíti. Közösen folytatott vizsgálataink során [12] HEPPES egy aránylag egyszerű konkrét példát konstruált egy ilyen „relatív stabil" testrendszerre, amely egy konvex 12-lapból és ezt körülvevő 12 egybevágó tetraéderből áll. A 13 test közül egyiket sem lehet úgy elmozgatni, hogy a többi közül egy se mozduljon el. (Valószínűnek látszik, hogy már a 12 tetraéder is relatív stabil rendszert alkot, de ennek bizonyítása további meggondolásokat igényelne.)

Ismeretes, hogy abszolút stabil rendszer (amelynek elemei csak úgy mozgathatók, mintha a többihez mereven hozzá lennének kapcsolva) nem alkotható konvex testekből, sőt belső pontra csillagkonvex testekből sem. Iránykonvex testekre ez nem igaz, amint azt két egymásba fonódó gyűrű példája mutatja. A 6. ábra egy szabályos hatszögből és három egybevágó iránykonvex tartományból álló abszolút stabil rendszert mutat. Vajon készíthető már három iránykonvex síkidomból is abszolút stabil rendszer? Ezt a nem könnyű kérdést V. POLÁK oldotta meg nemleges válasszal.



*6. ábra*

Ehhez a témakörhöz tartozik egy testet rögzítő pontrendszerek kérdése. Azt mondjuk, hogy egy testet a határán fekvő bizonyos pontok (eltolással szemben) rögzítik, ha a testet nem lehet úgy eltolni, hogy közben valamelyik pont ne kerüljön a test belsejébe. *Primitív rögzítő pontrendszer*ről beszélünk, ha a pontok közül egy sem hagyható el. Felvetettem azt a kérdést, legfeljebb hány pontból állhat egy konvex test primitív rögzítő rendszere?

TOMOR BENEDEK [13] megmutatta, hogy a síkban a keresett szám 6. Ha tehát egy konvex lemezt több mint 6 pont rögzít, akkor valamelyik pont biztosan felesleges. A csúcspontjaival rögzített szabályos hatszög mutatja, hogy 6 pontra szükség lehet. Én rámutattam a csúcspontjaival rögzített rombdodekaéder példájára, amelyen látható, hogy a térben a keresett szám legalább 14. Ezután HAJÓS GYÖRGY egy egyszerű példán megmutatta, hogy az $n$-dimenziós térben egy konvex test primitív rögzítő rendszere tartalmazhat $2(2^n-1)$ pontot (ennél többet azonban valószínűleg nem). Másrészt GRÜNBAUM [14] ötletes módon megmutatta, hogy egy $n$-dimenziós konvex test már $2n$ ponttal is mindig rögzíthető (de ennél kevesebb ponttal általában nem). Abban a sokkal nehezebb problémakörben, amelyben eltolások helyett tetszés szerinti mozgásokat veszünk figyelembe, POLÁK ért el érdekes kezdeti eredményeket. Nem volna érdektelen annak a kérdésnek vizsgálata sem, mi mondható akkor, ha mozgások helyett például területtartó affinitásokat tekintünk.

Tekintsünk az euklideszi síkon egy (relatív) stabil körelhelyezést, amelyben tehát minden kört a szomszédos körök rögzítenek. A körök lehetnek inkongruensek, de bizonyos érdektelen esetek diszkussziójának elkerülése céljából feltesszük, hogy a körök sugarának pozitív alsó és véges felső határa van (vagyis hogy a körök homogenitása pozitív). Válasszunk ki egy kört. Ennek kerületét a szomszédos körökkel való érintési pontok részívekre bontják. A legnagyobb részív középponti szögét, $\lambda$-t, a kör *labilitásá*nak, ennek komplementerjét, $\pi-\lambda$-t pedig a kör *stabilitásá*nak nevezzük. A *körelhelyezés stabilitásán* a leglabilisabb kör stabilitását, pontosabban a $\sigma=\inf(\pi-\lambda)$ értéket értjük.

Hogyan érhető el adott sűrűség mellett maximális stabilitás, vagy ami egyre megy, adott $\sigma$ stabilitás mellett minimális sűrűség? Rajzoljunk egy kör köré olyan érintősokszöget, amelynek minden szöge legfeljebb egy szög kivételével $\sigma$, míg a fennmaradó szög legalább $\sigma$. Bebizonyítottam, hogy egy $\sigma$ stabilitású körelhelyezés sűrűsége sohasem lehet kisebb a körnek erre a sokszögre vonatkozó sűrűségénél. Ez a sűrűségkorlát pontos mindazon esetekben, amikor a tekintett sokszögből egy mozaik nyerhető az oldalakon való szukcesszív tükrözéssel. Ez a $\sigma=\pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ és $2\pi/3$ esetben következik be. Ezekre a stabilitási értékekre a minimális sűrűségű körrendszer egy (3, 12, 12) és (4, 8, 8) típusú félig szabályos és egy $\{6, 3\}$, $\{4, 4\}$ és $\{3, 6\}$ típusú szabályos mozaik csúcsai köré írt *egybevágó* körökből áll.

Ezt az eredményt DOMINYÁK IMRE [15] kiterjesztette a gömbfelületre és a hiperbolikus síkra. Az első esetben feltesszük, hogy minden kör sugara legalább $r$, a másodikban, hogy legfeljebb $r$. A fent említett sokszög szerepét egy $r$ sugarú kör köré írt olyan sokszög veszi át, amelynek érintési pontjai a kört legfeljebb egy ív kivételével $\pi-\sigma$ szögű ívekre bontják, míg a megmaradó ív szöge $\leqq\pi-\sigma$. Az így adódó sűrűségkorlát számos (a hiperbolikus síkon „számtalan") érdekes esetben elérhető.

## Sejthalmazokra vonatkozó izoperimetrikus problémák

Bizonyos növényi szövetekben a sejtek nem töltik ki teljesen a rendelkezésükre álló térrészt. Ilyen szövetekkel kapcsolatos meggondolások vezettek a következő problémához: Hogyan kell egy „nagy" síkidomot adott számú, egységnyi kerületű, de szabadon változó alakú lemezekkel a legjobban kitölteni? Ezt a problémát csak konvex lemezekre vizsgáltam és megmutattam, hogy az a legkedvezőbb, ha a lemezek körívekkel lekerekített egybevágó szabályos hatszögek. HEPPES [16] észrevette, hogy a konvexitás feltétele elhagyható és eredményemet más irányban is élesítette. HEPPES észrevétele indított a következő tétel bizonyítására [17]: Tekintsünk az euklideszi vagy a hiperbolikus síkon egy háromélű csúcsokkal bíró szabályos mozaikot, válasszuk ki ennek $n$ különböző lapját s nézzük ezek egyesített halmazát, $E$-t. Bárhogy is bontjuk fel $E$-t $n$ összefüggő résztartományra, mindig lesz olyan résztartomány, amelynek kerülete legalább akkora, mint egy mozaiklapé.

Gömbi mozaikokra ez a tétel nem vihető át minden további nélkül, de itt is kimondható egy hasonló, igen általános tétel.

Több matematikust foglalkoztatott az a kérdés, melyik az egységnyi térfogatú térkitöltő testek közül a minimális felszínű. Valószínűnek látszik, hogy a konvex térkitöltők között a félig szabályos csonka oktaéder a legjobb. Más azonban a probléma megoldása, ha a konvexitást nem kötjük ki. Lord Kelvin megadott egy minimálfelületek által határolt „eltorzult csonka oktaédert", amelynek kongruens példányaival a tér éppen úgy kirakható, mint a torzítatlan csonka oktaéderekkel, amelynek felszíne azonban kisebb, mint az ugyanolyan térfogatú csonka oktaéderé.

HEPPES ALADÁR [18] ezt a kérdést általánosabb feltételek mellett vizsgálva egy meglepő tételhez jutott, amely úgy interpretálható, hogy „belső" buborékot tartalmazó szappanhabban mindig kell lenni nem konvex buboréknak. Pontosabban: legyen a $V_1, \ldots, V_n$ térfogatú konvex testek egyesített halmaza, $E$ olyan, hogy legalább az egyik test teljesen $E$ belsejében feküdjön; akkor $E$ felbontható $n$ nem csupa konvex $V_1, \ldots, V_n$ térfogatú testre, amelyek felszínösszege kisebb, mint az eredeti konvex testek felszínösszege.

Ennek a mélyenfekvő tételnek a bizonyításában alkalmazott igen szellemes módszerek több önmagukban is érdekes mellékeredményt hoztak felszínre. Sikerült többek között megadni a gömbnek olyan konvex sokszögekre történő felbontásainak teljes felsorolását, amelyek minden szöge 120°-os.

Szabadjon itt még egy megoldatlan problémára rámutatnom. H. STEINHAUS *Kaleidoskop der Mathematik* című jól ismert könyvében (Berlin 1959) felhívja a figyelmet azokra az érdekes törésvonalakra, amelyek egy folyóparton száradó iszaptáblán keletkeznek. Hasonló vonalakat látunk száradáskor erősen összehúzódó mázzal bevont kerámiákon is. Tegyük fel, hogy a törésvonalak egymásután keletkeznek, úgyhogy minden töréskor az egyik legnagyobb területű résztartomány két egyenlő területű részre hasad a legrövidebb vonal mentén. Mi mondható az $n$-edik törés után létrejött törésvonalak összhosszáról vagy, ami egyre megy, a résztartományok kerületösszegéről?

Legyen a résztartományok kerületösszege $n$ résztartományra való bomlás után $K_n$. Könnyen megmutatható, hogy ha az eredeti tartomány egy $T$ területű téglalap, akkor

$$4\sqrt{T} \leqq \varliminf_{n\to\infty} \frac{K_n}{\sqrt{n}} \leqq 2(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}})\sqrt{T},$$

$$2(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}})\sqrt{T} \leqq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{K_n}{\sqrt{n}} \leqq \sqrt{18}\sqrt{T}.$$

Vajon fennállanak ezek az egyenlőtlenségek bármely $T$ területű tartományra is? Valószínűleg igen. Ez abból sejthető, hogy nagy $n$-re a résztartományok „közelítőleg" téglalapok lesznek.

### Körfelhők

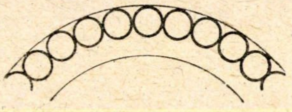
A kör- és gömbfelhők vizsgálata HORNICH következő problémájából indult ki: Hány (anyagi) egységgömbbel takarható el radiálisan egy ugyanilyen gömb, olyan értelemben, hogy az eltakarandó gömb középpontjából kiinduló minden félegyenes legalább egy takaró gömböt találjon? Ezzel a kérdéssel foglalkozó egyik dolgozatomban több analóg problémát is érintettem. Vizsgálataimhoz GRÜNBAUM, DANZER, HEPPES, újabban pedig KRAMMER GERGELY csatlakozott. Szabadjon a „régebbi" eredmények közül kettőt kiemelnem annak illusztrálására, milyen változatos kutatási területről van itt szó. GRÜNBAUM megmutatta, hogy egy pontot eltakaró egybevágó gömbök minimális száma öt, HEPPES pedig bebizonyította, hogy egy rácsszerű gömbelhelyezésen mindig „keresztül lehet dugni" egy egyenest.

KRAMMER [19] a következő kérdésekkel foglalkozott. Készítsünk egy $r$ sugarú $k$ körhöz egy egységnyi sugarú körökből álló (radiálisan takaró) körfelhőt, vagyis rakjunk $k$ köré sem egymásba, sem pedig $k$-ba nem nyúló egységnyi sugarú köröket úgy, hogy minden $k$ középpontjából kiinduló félegyenes legalább egy egységnyi sugarú kört messen vagy érintsen. Legyen $K$ az összes kört tartalmazó, $k$-val koncentrikus legkisebb kör és $R$ ennek a körnek a sugara. A $R-r$ különbséget a felhő *vastagságának* nevezzük. Első kérdés az, hogy rögzített $r$ esetén melyik az a felhő, amelynek vastagsága minimális. KRAMMER megmutatta, hogy a legjobb felhő mindig egy zárt láncot alkot, amelyben minden kör érinti a következőt, mégpedig $r$-től függően az alábbi lehetőségek egyike szerint (7. ábra):

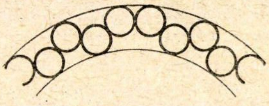
*a)* minden kör érinti $K$-t,

*b)* a körök váltakozva érintik $K$-t és $k$-t,

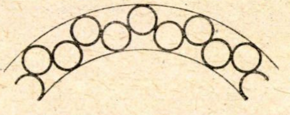
*c)* két szomszédos kör érinti $K$-t, a többi váltakozva $k$-t és $K$-t.



*7a. ábra*



*7b. ábra*



*7c. ábra*

A másik kérdés: mi a minimális vastagságnak, $v(r)$-nek a felső határa? KRAMMER eredménye szerint

$$\sup v(r) = 2+\operatorname{cosec}\frac{\pi}{39}-\operatorname{cosec}\frac{\pi}{38} \approx 2+\frac{1}{\pi}.$$

Rajzoljunk egy $\bar{r}=\operatorname{cosec}\frac{\pi}{38}-1$ sugarú kört. Erre éppen még ráhelyezhető 38 egységkör. A kör sugarát kissé növelve már csak 39 egységkör alkothat felhőt. Ennek a felhőnek a vastagsága akkor minimális, ha a körök egy *a)* típusú körláncot alkotnak. Ekkor $R=\bar{R}=1+\operatorname{cosec}\frac{\pi}{39}$, s így elég kicsiny pozitív $\varepsilon$ értékre

$$v(\bar{r}+\varepsilon) = \bar{R}-(\bar{r}+\varepsilon).$$

Minthogy azonban $v(\bar{r})=2$, a fenti $\bar{R}-\bar{r}$ felső korlát nem érhető el.

## Poliéderekre vonatkozó szélsőértékproblémák

Tekintsük az euklideszi térben egy fix gömböt tartalmazó konvex poliéderek összességét. Melyik poliédernek lesz az élhosszösszege a legkisebb? Ennek a problémának diszkrét geometriai jellege nyilvánvaló, ha egy konvex poliédert úgy definiálunk, mint véges sok pont konvex burkát. Arról van tehát szó, hogyan kell a térben véges sok pontot bizonyos szempontból a legkedvezőbben kitűzni. Ezt az általam felvetett problémát BESICOVITCH és EGGLESTON oldotta meg, igazolva azt a sejtésemet, hogy a legjobb poliéder a gömb köré írt kocka.

Ezzel a problémával egyidejűleg felvetettem azt a kérdést is, mi a probléma megoldása, ha a háromszöglapú poliéderek közt keressük a legjobbat. Az euklideszi térben ez a probléma nehéznek ígérkezik. Ezt alátámasztja az a sejtés, hogy itt két extremális poliéder van: a szabályos tetraéder és a szabályos oktaéder. De egy COXETERrel közösen írt dolgozatunkban [20] megoldottuk a problémát a nem euklideszi terekben a poliéderben fekvő gömb sugarának, $r$-nek, speciális értékeire. A szférikus térben egy $r=\arcsin 1/4=0{,}2527\ldots$ sugarú gömböt tartalmazó háromszöglapú poliéderek közt a szabályos tetraéder és a (nem szükségképpen szabályos) trigonális diéder élhosszösszege a legkisebb. A hiperbolikus térben $r=0{,}364\ldots$-re. a szabályos oktaéder, $r=0{,}828\ldots$-ra a szabályos ikozaéder a legjobb.

TOMOR BENEDEK [21] ezen diszkrét sugárértékek helyett kis intervallumokat adott meg, amelyekbe eső sugárértékekre még mindig a megfelelő szabályos test az extremális poliéder.

Vizsgáltam ezeknek a problémáknak azokat a négydimenziós analogonjait, amelyekben az élhosszösszeg helyett is eggyel magasabb dimenziós mértékszámot, a (kétdimenziós) lapok területösszegét tekintjük. Az ezzel kapcsolatos eredményeim közül csak azt emelem ki, hogy a négydimenziós hiperbolikus térben megadható egy konkrét nagyságú gömb úgy, hogy az ezt tartalmazó, tetraédercellákkal bíró konvex politópok közül a körülírt szabályos 600-cellára a legkisebb a lapok területösszege.

Az élhosszösszegre vonatkozó fenti probléma kivételt képez abban, hogy az (bizonyos esetekben) könnyebbnek bizonyult a nem-euklideszi térben mint az euklidesziben. Az euklideszi térben a szabályos testek különböző szélsőértéktulajdonságai ismeretesek és ezeknek a nem-euklideszi terekbe való átvitele gyakran igen nehéz. Tudjuk például, hogy az euklideszi térben az adott félszínű konvex 4-, 6- és 12-lapok között a szabályos tetraéder, hexaéder és dodekaéder térfogata a legnagyobb. De, mondjuk a dodekaéder esetében, semmi támpontunk sincs az analóg állítás bizonyítására nem-euklideszi terekben. Ezt a kérdést illetően csupán egy szerény részeredményről számolhatok be: egy aránylag egyszerű direkt bizonyítást adtam a szabályos tetraéder izoperimetrikus tulajdonságára a hiperbolikus térben [22]. Pozitív görbületű terekben az analóg kérdés tudomásom szerint még nyitott.

Itt kell még megemlítenem TOMOR BENEDEK [21] egy egyenlőtlenségét, amely egy állandó görbületű térben fekvő, adott sugarú gömböt tartalmazó, adott lap- és csúcspontszámú konvex poliéder felszínére vonatkozik és amely mind az öt szabályos testre pontos. A bizonyítás hasonló eszközökkel történik, mint a térfogatra vonatkozó ismert analóg egyenlőtlenségé. Mindamellett a felszín esetén néhány további meggondolásra is szükség volt.

## Állandó görbületű terek legsűrűbb kitöltése gömbökkel

Ebben a tárgykörben egy igen jelentős eredményről számolhatok be. Tekintsünk egy euklideszi vagy nem-euklideszi térben négy egymást kölcsönösen érintő $r$ sugarú gömböt, valamint ezek $B(r)$ sűrűségét a középpontjaik által meghatározott tetraéderben. BÖRÖCZKY KÁROLY [23] bebizonyította, hogy $r$ sugarú gömbök bármely elhelyezésének sűrűsége $\leqq B(r)$.

Aki valaha megpróbálta megbecsülni azt, hogy az euklideszi tér hányadrésze tölthető ki egybevágó gömbökkel, vagy aki tudja, hogy az első durva becslés sem volt könnyű, hogy annak javítása szinte századértékenként történt és hogy a pontos becslést ma sem ismerjük, az bizonyára értékelni fogja az euklideszi vagy nem-euklideszi térre vonatkozó *Böröczky*-féle éles sűrűségkorlátot. De itt többről van szó mint egy jó becslésről. A fenti korlát ti. a nem-euklideszi terekben bizonyos sugárértékekre pontos, s így ezekre a sugárértékekre megadja a legsűrűbb gömbelhelyezés problémájának egzakt megoldását. Ha ui. a tekintett tetraéder olyan, hogy kongruens példányaiból szabályos mozaik alkotható, akkor — BÖRÖCZKY tétele alapján — e mozaik csúcsai köré írt $r$ sugarú gömbök adják a térnek $r$ sugarú gömbökkel való legsűrűbb kitöltését.

A szférikus térben négy, tetraéderekből álló szabályos mozaik van. Egyikük, a legérdekesebb, 600 tetraéderből áll és 120 csúcsa van. Ezért, ha volnának 120 nyílással bíró 4-dimenziós pollenszemek és a nyílások TAMMES hipotézisének megfelelően úgy keletkeznének, hogy mind lehetőleg távol kerüljön egymástól, akkor azok a szabályos 600-cella csúcsaiban helyezkednének el.

Még érdekesebb a hiperbolikus tér esete. Itt egyetlen szabályos mozaik van, amelynek cellái tetraéderek, mégpedig aszimptotikus (végtelen élhosszúságú) tetraéderek. Mivel most $r=\infty$, a megfelelő gömbelhelyezés paraszférákból áll. Ennek a paraszféra-rendszernek a sűrűsége a következő érdekes módon állítható elő:

$$S=\lim_{r\to\infty} B(r)=\left(1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}--++\dots\right)^{-1}=0{,}859\dots$$

Mármost biztosra vehető, hogy a hiperbolikus térben $B(r)$ $r$-nek növekvő függvénye. Ebből következne, hogy bármely pozitív $r$-re $B(r)<S$. Ha sikerülne $B(r)$ monotonitását bebizonyítani, akkor a legsűrűbb gömbelhelyezés problémája a hiperbolikus térben el lenne intézve olyan értelemben, hogy véges vagy végtelen sugarú egybevágó gömbök összes lehetséges elhelyezései közt a tekintett paraszféra-rendszer bizonyulna a legsűrűbbnek. Míg tehát az euklideszi térben a legsűrűbb gömbelhelyezés problémájának megoldásától messze vagyunk, addig úgy látszik, hogy a hiperbolikus térben a probléma egy számolástechnikai kérdéssé redukálódik.*

BÖRÖCZKY tételének előzményei röviden a következők. Az analóg 2-dimenziós probléma elintézése után a figyelem természetes módon a 3-dimenziós problémára, különösen pedig a legsűrűbb gömbelhelyezés problémájának a hiperbolikus térben várható szép megoldására terelődött [24, 25, 26]. A szférikus teret illetően korábban észrevettem, hogy a 600-cella csúcsai a „4-dimenziós *Tammes*-féle probléma" szempontjából lokálisan extremális konfigurációt alkotnak. BÖRÖCZKY tételének az $n$-dimenziós euklideszi térre vonatkozó megfelelőjét ROGERS bizonyította be. Újabban pedig COXETER [27] egy rendkívül érdekes, éles becslést nyert egy $n$-dimenziós euklideszi egységgömbre ráhelyezhető egységgömbök számára, annak a feltevésnek a felhasználásával, hogy a *Rogers*-féle becslés a szférikus térben is helyes. Ennek a feltevésnek a jogosultsága $n\leqq 3$-ra BÖRÖCZKY tételével igazolást nyert.

BÖRÖCZKY tulajdonképpen egy gömb *Dirichlet*-féle cellájának a térfogatára ad egy alsó korlátot azáltal, hogy a cellának csupán egy olyan koncentrikus gömbbe eső részét tekinti, amelynek belsejében már biztosan nem lehet a cellának csúcsa. Ez az általam több mint húsz évvel ezelőtt alkalmazott gondolat képezte a kiindulási pontját MOLNÁR JÓZSEF doktori disszertációjának és az ahhoz csatlakozó fentebb ismertetett eredményeinek is. Az euklideszi síkon, ahol ezt az ötletet először alkal-

* Az előadás elhangzása óta A. FLORIAN-nak sikerült $B(r)$ monotonitását bebizonyítani. Ezzel a legsűrűbb gömbelhelyezés problémája a hiperbolikus térben a fenti értelemben megoldódott.

maztam, könnyen nyerhető a kívánt becslés annak a feltételnek a felhasználásával, hogy a kör középpontjából a cella oldalaira bocsátott merőlegesek talppontjai nem lehetnek közelebb egymáshoz, mint az eredeti kör sugara. Erre a becslésre HAJÓS GYÖRGY geometriai szemináriumában MOLNÁR egy előadásának diszkussziója közben egy olyan bizonyítás született, amely a talpponti feltételt nem használja ki, s így a nem-euklideszi esetben is alkalmazható. Minthogy BÖRÖCZKYt nyilván ezek a gondolatok inspirálták, érdemének csökkentése nélkül elmondhatjuk, hogy szép eredménye a magyar diszkrét geometriai iskola talajában termett.

## IRODALOM


[1] L. FEJES TÓTH, Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie. *Elemente der Mathematik* **15** (1960) 25–36.

[2] HEPPES ALADÁR és MOLNÁR JÓZSEF, Újabb eredmények a diszkrét geometriában I–II. *Matematikai Lapok* **11** (1960) 330–355, **13** (1962) 39–72.

[3] A. FLORIAN, Zum Problem der dichtesten Kreispackung*. *Monatsh. f. Math.* (nyomás alatt).

[4] A. FLORIAN, Überdeckung der Ebene durch Kreise. *Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova* **31** (1961) 77–86.

[5] A. FLORIAN, Zum Problem der dünnsten Kreisüberdeckung der Ebene. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **13** (1962) 397–400.

[6] M. IMRE, Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung.** *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **14** (1963) (megjelenőben).

[7] LÁSZLÓ ZOLTÁN, Körelhelyezések gömbön** *(kézirat)*.

[8] L. FEJES TÓTH, Dichteste Kreispackungen auf einem Zylinder. *Elemente der Mathematik* **17** (1962) 30–33.

[9] MOLNÁR JÓZSEF, Legsűrűbb körelhelyezések adott térigénnyel.**

[10] L. DANZER, Über optimale Lagerungen von 7–11 kongruenten Kreisen auf der 2-Sphäre.*

[11] H. LARCHER, Solution of a geometric problem by FEJES TÓTH. *Michigan Math. J.* **9** (1962) 45–51.

[12] L. FEJES TÓTH und A. HEPPES, Über stabile Körpersysteme. *Compositio Math.* **15** (1963) 119–126.

[13] TOMOR BENEDEK, Konvex alakzatok egy rögzítési problémája. *Matematikai Lapok* **14** (1963) (nyomás alatt).

[14] B. GRÜNBAUM, Fixing systems and inner illumination. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **14** (1963) (megjelenőben).

[15] DOMINYÁK IMRE, Stabilis körrendszerek sűrűségéről** *MTA III. Oszt. Közl.* (Megjelenőben).

[16] A. HEPPES, Filling of a domain by discs. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **8** (nyomás alatt).

[17] L. FEJES TÓTH, Isoporimetric problems concerning tessellations. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **14** (1963) (megjelenőben).

[18] HEPPES, ALADÁR, Sejtrendszerekre vonatkozó izoperimetrikus problémák.**

[19] G. KRAMMER, Über Kreiswolken** *(kézirat)*.

[20] H. S. M. COXETER and L. FEJES TÓTH, The total length of the edges of a non-Euclidean polyhedron with triangular faces. *Quarterly J. Math.* (Oxford) (megjelenőben).

[21] TOMOR BENEDEK, Szabályos poliéderek szélsőértéktulajdonságai állandó görbületű terekben *(kézirat)*.

[22] L. FEJES TÓTH, On the isoperimetric property of the regular hyperbolic tetrahedra.** *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* (megjelenőben).


* Az Oberwolfachban (1962. júl. 23–29) rendezett diszkrét geometriai kollokviumon tartott előadás.

** Az MTA Matematikai Kutató Intézetben tartott előadás.

[23] BÖRÖCZKY KÁROLY, Gömbelhelyezések sürüsége állandó görbületű terekben.**

[24] L. FEJES TÓTH, On close-packings of spheres in spaces of constant curvature. *Publ. Math.* **3** (1953) 158–167.

[25] H. S. M. COXETER, Arrangements of equal spheres in non-Euclidean spaces. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (1954) 263–274.

[26] L. FEJES TÓTH, Kugelunterdeckungen und Kugelüberdeckungen in Räumen konstanter Krümmung. *Archiv. d. Math.* **10** (1959) 308–313.

[27] H. S. M. COXETER, The number of equal non-overlapping spheres that can touch another of the same size.*

# A MIKUSIŃSKI-FÉLE OPERÁTORSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA $n$-ED RENDŰ VÁLTOZÓ EGYÜTTHATÓJÚ LINEÁRIS INHOMOGÉN DIFFERENCIÁLEGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSÁRA

Irta: DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR

Mint ismeretes, lineáris állandó együtthatójú differenciálegyenletek a *Mikusiński*-féle operátorszámítás alkalmazásával bizonyos feltételek mellett — zárt alakban — mindig megoldhatók. Ha azonban az együtthatók változók, akkor a *Mikusiński*-féle operátoros módszer általában nem alkalmazható.

Az alábbiakban a *Mikusiński*-féle operátorszámítás alkalmazásával egy módszert adunk a szóban levő differenciálegyenlet közelítő megoldására.[1] Az eljárás lényegében a *Picard*-féle sorozatos közelítő módszer egy módosításán alapszik.

TÉTEL. *Ha az*

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_0(x)y=f(x) \tag{1}$$

*változó együtthatójú differenciálegyenletben az* $a_i(x)$ *függvények* $(i=0,1,2,\ldots n-1)$ *és* $f(x)$ *valamely* $0\leqq x\leqq A$ *intervallumban folytonosak, továbbá ha* $x=0$ *esetén*

$$y(0)=y'(0)=\ldots y^{(n-1)}(0)=0, \tag{2}$$

*akkor az*

$$Y(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i(x) \tag{3}$$

*függvény, ahol*

$$\varphi_i(x)=\frac{1}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\ldots+\alpha_0}\{f_i(x)\}\qquad (i=0,1,2,\ldots) \tag{4}$$

*(itt s a differenciálás operátora),*

$$f_i(x)=(\alpha_{n-1}-a_{n-1}(x))\varphi_{i-1}^{(n-1)}+\ldots+(\alpha_0-a_0(x))\varphi_{i-1}= \tag{5}$$

$$=f(x)-\sum_{k=0}^{i-1}\varphi_k^{(n)}-\left[a_{n-1}(x)\sum_{k=0}^{i-1}\varphi_k^{(n-1)}+\ldots+a_0(x)\sum_{k=0}^{i-1}\varphi_k\right],$$

$$f_0(x)=f(x),$$

$\alpha_k$ *tetszés szerinti konstans, — olyan megoldása* (1)*-nek, mely értelmezett és folytonos függvénye x-nek a* $0\leqq x\leqq A$ *intervallumban és* $x=0$ *esetén az*

$$Y(0)=Y'(0)=\ldots=Y^{(n-1)}(0)=0 \tag{6}$$

*értéket veszi fel.*

[1] Megjegyezzük, hogy $n$-ed rendű változó együtthatójú lineáris inhomogén differenciálegyenlet közelítő megoldására számos módszer ismeretes. Ezen eljárások között azonban nem ismerünk olyan módszert, mely a modern operátorszámítást alkalmazná.

Mielőtt a bizonyítás gondolatmenetét ismertetnénk, röviden vázoljuk azt a módszert, mellyel a (4) és (5) összefüggéshez jutottunk.

Ha az (1) egyenletből kivonjuk a

$$\varphi_0^{(n)}+\alpha_{n-1}\varphi_0^{(n-1)}+\ldots+\alpha_0\varphi_0=f(x) \tag{7}$$

egyenletet, akkor az

$$(y^{(n)}-\varphi_0^{(n)})+a_{n-1}(x)(y^{(n-1)}-\varphi_0^{(n-1)})+\ldots+a_0(x)(y-\varphi_0)= \tag{8}$$

$$=(\alpha_{n-1}-a_{n-1}(x))\varphi_0^{(n-1)}+\ldots+(\alpha_0-a_0(x))\varphi_0=f_1(x)=$$

$$=f(x)-\varphi_0^{(n)}-[a_{n-1}(x)\varphi_0^{(n-1)}+\ldots+a_0(x)\varphi_0]$$

összefüggést kapjuk.[1] Bevezetve az $y_1^{(k)}=y^{(k)}-\varphi_0^{(k)}$ $(k=0,1,2,\ldots n)$ jelölést, s az így adódó (8) egyenletből kivonva a

$$\varphi_1^{(n)}+\alpha_{n-1}\varphi_1^{(n-1)}+\ldots+\alpha_0\varphi_1=f_1(x) \tag{9}$$

egyenletet, az

$$y_2^{(n)}+a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+a_0(x)y_2=f(x) \tag{10}$$

összefüggéshez jutunk, ahol $y_2^{(k)}=y_1^{(k)}-\varphi_1^{(k)}$ és

$$f_2(x)=(\alpha_{n-1}-a_{n-1}(x))\varphi_1^{(n-1)}+\ldots+(\alpha_0-a_0(x))\varphi_1= \tag{11}$$

$$=f(x)-\varphi_0^{(n)}-\varphi_1^{(n)}-[a_{n-1}(x)(\varphi_0^{(n-1)}+\varphi_1^{(n-1)})+\ldots+a_0(x)(\varphi_0+\varphi_1)].$$

Az itt leírt eljárás ismételt alkalmazásával (teljes indukcióval) már nyerjük a jelzett összefüggéseket.

Ezek után rátérünk annak bizonyítására, hogy a (3) alatti összefüggésben definiált $Y(x)$ létezik és kielégíti a (2) alatti kezdeti feltételt, valamint az (1) alatti differenciálegyenletet.

Mivel

$$g_m=\frac{s^m}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\ldots+\alpha_0} \tag{12}$$

$m<n$ esetén folytonos függvény, az $f(x)$ és $a_i(x)$ függvények pedig feltétel szerint folytonosak a $0\leqq x\leqq A$ zárt intervallumban, így korlátosak is.

Legyen

$$|f(x)|\leqq M, \tag{13}$$

$$|\alpha_i-a_i(x)|\leqq R, \qquad (i=0,1,\ldots,n-1) \tag{14}$$

$$|g_m|\leqq K_m, \tag{15}$$

és

$$\sum_{m=0}^{n-1}K_m=N. \tag{16}$$

[1] A tárgyalás során mindvégig feltételezzük, hogy $\varphi^{(n-1)}(0)=\varphi^{(n-2)}(0)=\ldots=\varphi(0)=0.$

Ezen jelölések mellett a (4) és (5) értelmében

$$|\varphi_0^{(m)}| \leqq K_m Mx, \qquad (m=0,1,\ldots,n-1) \tag{17}$$

$$|f_1(x)| \leqq R \sum_{m=0}^{n-1} |\varphi_0^{(m)}| = MRNx. \tag{18}$$

Teljes indukcióval kapjuk, hogy általában

$$|\varphi_k^{(m)}| \leqq \frac{MK_m}{RN}\frac{(RNx)^{k+1}}{(k+1)!} \leqq \frac{MK_m}{RN}\frac{(RNA)^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{19}$$

Ebből már következik a

$$\varphi_0^{(m)}(x)+\varphi_1^{(m)}(x)+\ldots+\varphi_k^{(m)}(x)+\ldots \qquad (m=0,1,\ldots,n-1)$$

egyenletes konvergenciája, azaz

$$Y^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^{(m)}(x)$$

létezése. Tekintettel arra, hogy

$$|f_{k+1}(x)| \leqq \frac{M(RNx)^{k+1}}{(k+1)!} \leqq \frac{M(RNA)^{k+1}}{(k+1)!}$$

következtében $f_k(x)$ egyenletesen konvergál az azonosan nulla függvényhez, így (5)-ből már következik $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^{(n)}(x)$ egyenletes konvergenciája. Ez viszont ugyancsak az (5) alapján azt jelenti, hogy (3) kielégíti az (1)-et. A (2) teljesülése (4) alapján nyilvánvaló.

MEGJEGYZÉSEK:

1°. Az itt közölt eljárás, akkor is alkalmazható, amikor a kezdeti feltételek nem mind nullák.

2°. *Mivel* $\alpha_k$ *tetszés szerinti konstans értékek, ezért a számítás megkönnyítése végett gyakran célszerű azokat nulláknak választani.* (Ez a speciális választás pontosan a *Picard*-féle eljáráshoz vezet.)

Ez esetben:

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{s^n}\{f_i(x)\} = l^n\{f_i(x)\} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f_i(t)\,dt,$$

$$f_0(x) = f(x),$$

ahol

$$f_i(x) = -[a_{n-1}\varphi_{i-1}^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\varphi_{i-1}].$$

Természetesen elképzelhetők olyan esetek, amikor az együtthatókat nem célszerű nulláknak választani, mert így ugyan egy-egy tag meghatározása több munkát igényel, ezzel szemben viszont az eljárás sokkal gyorsabb konvergenciát biztosíthat.

Érdekes volna megvizsgálni, hogy bizonyos esetben, a számolási munka csökkentése érdekében milyen konstansokat célszerű választani. A jelen dolgozatnak ilyen irányú vizsgálat nem volt célkitűzése.

3°. A közölt eljárás akkor is alkalmazható, ha $\alpha_k$ értékeit a közelítés során véges sok esetben változtatjuk.

4°. Az itt ismertetett módszer természetesen akkor is alkalmazható, ha a differenciálegyenlet együtthatói állandók. Esetenként előnyössé is válhat e módszer alkalmazása, ugyanis ekkor nem kell gyököket számolni, ami egyébként hosszadalmas munkát igényelne.

(Beérkezett: 1963. V. 20)

# TENZORIÁLISAN ÖSSZEFÜGGŐ TEREK EKVIVALENCIA ÉS GÖRBÜLET ELMÉLETÉHEZ

Írta: TAMÁSSY LAJOS

## Bevezetés

A párhuzamos eltolás, vagy a vele igen szoros kapcsolatban levő kovariáns vagy abszolút deriválás vizsgálata a differenciálgeometria egyik fontos részét képezi.[1] Annak ellenére azonban, hogy a vektorok deriválása a differenciálgeometriai vizsgálatok egy jelentős részét teszi ki, a tenzorok abszolút deriválása egészen a legutóbbi időkig alig volt közvetlen vizsgálat tárgya. Ennek oka valószínűleg az, hogy a tenzoroknak egy kontra-, illetve hozzá adjungált kovariáns vektor $n$ él szerinti felbontásának felhasználásával, tehát közvetett úton, a vektorok abszolút deriválása könnyen kiterjeszthető a tenzorokra is[2].

Ezen az úton azonban részben nem adódik a tenzorok abszolút deriválásának bizonyos természetes követelményeket kielégítő legáltalánosabb módja, részben elhalványul a tenzorok abszolút deriválásának geometriai háttere. A jelen munka bizonyos valenciájú tenzorok által képezett vektortereknek közvetlen affin egymáshozrendelése útján, a vektorok közbeiktatása nélkül vizsgálja a tenzorok abszolút deriválását. Ez az út a tenzoroknak a fent említettnél általánosabb deriváltjához vezet. Erre az abszolút deriváltra pedig egy affinösszefüggő geometria építhető, mely a közönséges affinösszefüggést speciál esetként tartalmazza, és melyben állandóan előtérben marad a tenzorok abszolút deriválásának geometriai oldala.

A tekintetbe vett tenzorok halmaza itt a páros rendű tenzorok és invariánsok halmaza lesz. A továbbiakból világosan kitűnik azonban, hogy a páros rendű tenzorok halmaza minden nehézség nélkül pótolható az $n \cdot k$ rendű tenzorok halmazával, ahol $k$ tetszőleges rögzített természetes szám ($k \geqq 3$), $n$ pedig végigfut a természetes számokon. Az általános esetben az összefüggések felírása és az eredmények megfogalmazása nyilván bonyolultabb. Így megelégszünk ennek a ténynek itten való megemlítésével, és eredményeinkben ezt nem fogjuk kifejezésre juttatni.

A tenzorok között a közönséges affinösszefüggő tér (az $L_n$) által indukáltnál általánosabb konnexió létesítésének a gondolata — ha nem is az itt vázolt felfogásban — először S. HOKARI-nál [13] (1934) található meg. A háború után E. BOMPIANI [2] (1946) vizsgálta a kérdést, majd A. COSSU [5—7] foglalkozott több munkájában a problémakörrel. 1960-ban a szerzőnek jelent meg ilyen irányú vizsgálatokat tartalmazó munkája [18], majd M. KUCHARSEWSKI [14] foglalta össze a problémakör addigi eredményeit. Ugyanakkor S. GOŁAB [12] az említett általánosabb affinössze-

[1] Az ezeken a fogalmakon nyugvó különböző affinösszefüggő geometriák megalapozásával több magyar matematikus is foglalkozott. Így VARGA OTTÓ [21] a vonalelemterek affinösszefüggését alapozta meg. FARKAS MIKLÓS [11] a WEYL [22] által bevezetett affinösszefüggő ponterek fogalmának egy koordinátamentes felépítését adta, míg SOÓS GYULA [17] a vonalelemterek lineáris összefüggését a fibrált terek fogalmán keresztül globális eszközökkel vezette be.

[2] Lásd A. DUSCHEK—W. MAYER [8] I. fejezetet és II. fejezet 2. §.

függő tér összefüggési objektumának algebrai komitánsait vizsgálta meg, ami szintén ehhez a tárgykörhöz sorolható. S. BOCHNER-nél [3] (1951) is felmerül az alapprobléma kissé általánosabb formában, amennyiben ő a tenzorokat az általánosabb, de kevésbé használatos tenzoroidokkal pótolja.[3]

VARGA OTTÓnak, PAUL GÜNTHERnek és SOÓS GYULÁnak értékes megjegyzéseiért e helyen is köszönetemet fejezem ki.

## 1. §. Az összefüggési koefficiensek

**1.** Alapterünk egy tetszőleges pontjában a kontravariáns vektorok összessége egy $n$ dimenziós $E_n$ vektorteret alkot, melyet az alaptér érintőterének nevezünk. A kovariáns vektorok ehhez duális érintőterét $E_n^*$-al jelöljük. Bár ez a két tér, mint két $n$ dimenziós vektortér izomorf, és így tisztán algebrai szempontból azonos, mégis, ha az alaptér nem metrikus, úgy nincs semmi indok a közöttük lehetséges végtelen sok izomorf leképezés közül bármelyiknek a kiválasztására. Ha azonban az alapterünk pl. egy *Riemann* tér, akkor a metrika az $E_n$ és $E_n^*$ között egy jól meghatározott izomorfiát tüntet ki. (Mi az $E_n$ és $E_n^*$-ot mint lényegesen különbözőket fogjuk fel.)

Az $E_n$ érintőtérnek az alaptérrel való kapcsolata abban nyilvánul meg, hogy ha az alaptérben egy $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$ koordinátatranszformációt hajtunk végre, akkor az $(x_0)$ koordinátájú $P_0$ pont érintőterében az $\mathfrak{e}_i \to \bar{\mathfrak{e}}_i$ bázistranszformációt kell végrehajtanunk, ahol $\mathfrak{e}_i = A_i^s \bar{\mathfrak{e}}_s$, azaz $\bar{\mathfrak{e}}_i = B_i^s \mathfrak{e}_s$; $A_s^i B_j^s = \delta_j^i$ és $A_k^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}(x_0)$.

Az $E_n$, ill. $E_n^*$ tereknek önmagukkal vagy egymással alkotott tenzori szorzatai képezik a szorzattereket. Pl. ha az $E_n$ bázisvektorai az $\mathfrak{e}_i$-k ($i = 1, 2, \ldots, n$), úgy az önmagával alkotott $n^2$ dimenziós $E_n^{(2)}$ szorzattér definíció szerint az $\mathfrak{e}_i \otimes \mathfrak{e}_j$ párok által van felfeszítve, és abban különbözik egy $n^2$ dimenziós vektortértől, hogy itt nincsenek az összes $\bar{\mathfrak{e}}_i \otimes \bar{\mathfrak{e}}_j = A_{ij}^{rs}(\mathfrak{e}_r \otimes \mathfrak{e}_s)$ $\left(|A_{ij}^{rs}| \neq 0\right)$ bázistranszformációk megengedve, hanem csak azok, ahol $A_{ij}^{rs}$ $A_i^r A_j^s$ formájú $\left(|A_r^i| \neq 0\right)$, és egy ilyen transzformációt akkor kell az $E_n^{(2)}$-ben végrehajtani, ha az $E_n$-ben az $\mathfrak{e}_i = A_i^r \bar{\mathfrak{e}}_r$ transzformáció következik be.[4]

**2.** Keressünk az $n$ dimenziós tér páros rendszámban kontra-, ill. kovariáns tenzorainak és invariánsainak $\mathfrak{P}$ halmaza felett a tenzor komponenseiben, a komponensek első parciális deriváltjaiban, és a koordinátadifferenciálokban külön-külön lineáris, valamint az utóbbiban homogén, általában a helytől függő olyan abszolút differenciáloperátort, mely tenzorhoz vele egyenlő rendű tenzort rendel, mely független a koordinátarendszertől, összegnél és szorzatnál megtartja a közönséges differenciálra ismert szabályokat és invariánshoz a közönséges differenciált rendeli. Azaz, ha ez az operátor $\vartheta$, akkor

$$\vartheta T = L_i\left(T, \frac{\partial T}{\partial x}, x\right) dx^i \tag{1}$$

[3] S. BOCHNER [3] 463. oldal.

[4] Ezekre a fogalmakra nézve lásd A. LICHNEROWITZ [15] 85., 86., 89. pont, vagy N. BOURBAKI [4] munkáját.

$$\vartheta T^{i\ldots}{}_{\ldots s} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdots \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^s} \vartheta T^{k\ldots}{}_{\ldots l} \tag{2}$$

$$\overline{\vartheta T} = \vartheta \overline{T} \tag{3}$$

$$\vartheta(T+U) = \vartheta T + \vartheta U \tag{4}$$

$$\vartheta(T \cdot U) = \vartheta T \cdot U + T \cdot \vartheta U \tag{5}$$

$$\vartheta I = dI, \tag{6}$$

ahol $T$ és $U$ $\mathfrak{P}$ elemei, $L_i$ bilineáris $T$ és $\frac{\partial T}{\partial x}$-ben, $I$ invariánst, $d$ pedig a közönséges differenciált jelöli. $\bar{x}$-al az új koordinátákat, felülvonással általában az új koordinátarendszerben vett értékeket jelöljük.

Első feladatunkul a legáltalánosabb ilyen típusú operátor formájának meghatározását tűzzük ki. Először csak másodrendű tenzorokra szorítkozunk. Az itt nyert eredményből azonban már könnyű lesz az általános formát meghatározni.

$\vartheta T^{ij}$ (1) és (4) miatt $T^{kl}$ és $\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^r}$-ben együttesen csak lineáris lehet, és $\vartheta T^{ij}$ kifejezésében nem szerepelhet $T^{kl}$ és $\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^r}$-től szabad, csak $x$-től függő tag. Így

$$\vartheta T^{ij}(x) = \psi^{ij}{}_{kl}{}^{r}{}_{t}(x) \frac{\partial T^{kl}}{\partial x^r} dx^t + \gamma_{kl}{}^{ij}{}_{t}(x) T^{kl} dx^t. \tag{7}$$

Ahhoz, hogy $\vartheta T^{ij}$ a koordinátarendszertől független legyen, és hogy másodrendű kontravariáns tenzort képezzen, a $\psi$-knek és a $\gamma$-nak

$$\bar{\psi}^{ab}{}_{cd}{}^{e}{}_{f} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^d} \frac{\partial \bar{x}^e}{\partial x^r} \frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^f} \psi^{ij}{}_{kl}{}^{r}{}_{u} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{cd}{}^{ab}{}_{f} = {} & \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^d} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial \bar{x}^f} \gamma_{kl}{}^{ij}{}_{t} + \\ & + \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j} \left( \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^c \partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^d} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^d \partial \bar{x}^m} \right) \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^r} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^f} \psi^{ij}{}_{kl}{}^{r}{}_{t}\end{aligned} \tag{9}$$

szerint kell transzformálódniuk.

Tekintsük most a $T^{ij}(x) U_{ij}(x) = I(x)$ kifejezést. $I(x)$ abszolút differenciálja (5) és (6) szerint is kiszámítható. Ezek egybevetéséből

$$\begin{aligned}T^{ij} \vartheta U_{ij} = {} & T^{ij}(dU_{ij} - \gamma_{ij}{}^{kl}{}_{t} U_{kl} dx^t) + \\ & + U_{ij} \left( \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^t} - \psi^{ij}{}_{kl}{}^{r}{}_{t} \frac{\partial T^{kl}}{\partial x^r} \right) dx^t.\end{aligned} \tag{10}$$

Ennek tetszőleges $T^{ij}(x)$ tenzorra tetszőleges $dx^t$ mellett fenn kell állnia. Így pl. ha $T^{11} = 1$, minden más komponens pedig zéró. Ebből látható, hogy ahhoz, hogy

$\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^r}$-től független, (5) és (6)-nak is eleget tevő $\vartheta U_{ij}$ létezzék, szükséges a jobboldali második zárójelében levő kifejezés eltűnése, azaz

$$\psi^{ij}{}_{kl}{}^{r}{}_{t}=\delta^i_k\delta^j_l\delta^r_t.$$

A $\psi^{ij}{}_{kl}{}^{r}{}_{t}$ ilyen megválasztása független a koordinátarendszertől, mert (8) szerint $\psi$ is tenzor. Így (7), (10) és (9)-ből

$$\vartheta T^{ij} = dT^{ij}+\gamma_{kl}{}^{ij}{}_{t}T^{kl}\,dx^t \tag{11}$$

$$\vartheta U_{ij} = dU_{ij}-\gamma_{ij}{}^{kl}{}_{t}U_{kl}\,dx^t \tag{12}$$

$$\bar{\gamma}_{cd}{}^{ab}{}_{f} = \frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial\bar{x}^c\partial\bar{x}^f}\delta^b_d+\delta^a_c\frac{\partial\bar{x}^b}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial\bar{x}^d\partial\bar{x}^f}+ \tag{13}$$
$$+\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{x}^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^c}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^d}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^f}\gamma_{kl}{}^{ij}{}_{t}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy (13) figyelembevételével (12) is eleget tesz (1)—(4)-nek, és ezek (5)-öt is kielégítik.

Ha most $\vartheta A^{ij\dots}{}_{vp\dots}$-t akarjuk meghatározni, ahol $A$ $\mathfrak{P}$ egy magasabbrendű eleme, akkor $A$-t kontraháljuk $\mathfrak{P}$ másodrendű elemeivel, míg invariánst nem kapunk. Erre alkalmazzuk (5)-öt és (6)-ot, majd ezek eredményeinek egybevetéséből

$$\vartheta A^{ij\dots}{}_{vp\dots} = dA^{ij\dots}{}_{vp\dots}+(\gamma_{kl}{}^{ij}{}_{t}A^{kl\dots}{}_{vp\dots}+\dots-\gamma_{vp}{}^{kl}{}_{t}A^{ij\dots}{}_{kl\dots}-\dots)\,dx^t. \tag{14}$$

Újból könnyen ellenőrizhető (1)—(6) teljesedése. Ezen paragrafus meggondolásainak menetét figyelembe véve igaz a következő tétel:

1. TÉTEL: *A kontra-, ill. kovariáns indexeikben párosrendű tenzorok körében az* (1)—(6) *feltételeknek eleget tevő legáltalánosabb abszolút differenciáloperátor* (14) *formájú, ahol az operátort meghatározó mennyiségek transzformációs törvénye* (13).

Megjegyezzük, hogy ha a $\mathfrak{P}$ halmazt leszűkítenénk pl. a másodrendű kontravariáns tenzorok halmazára, és így a másodrendű kovariáns tenzorokat és az invariánsokat is kizárnánk, ez már lényeges megszorítást jelentene. Ekkor ugyanis a felsorolt követelményeknek — melyek közül ebben az esetben (5) és (6) természetesen kiesne — eleget tevő legáltalánosabb differenciáloperátor nem (11), hanem (7) formájú lenne.

(11)-et a következőképpen is megkaphattuk volna: Legyen az $E_n^{(2)}(x)$ egy bázisa $\mathfrak{e}_i(x)\otimes\mathfrak{e}_j(x)$ és az $E_n^{(2)}(x+dx)$ egy bázisa az $\mathfrak{e}'_k(x+dx)\otimes\mathfrak{e}'_l(x+dx)$. Ezek között egy lineáris leképezést egyértelműen meghatároz az egyik bázisnak a másik térre való leképezése. Nyilvánvalóan az összes ilyen leképezés leírható az $(\mathfrak{e}_i\otimes\mathfrak{e}_j)\to$ $\to(\mathfrak{e}'_i\otimes\mathfrak{e}'_j)-\gamma_{ij}{}^{kl}(x+dx)\,(\mathfrak{e}'_k\otimes\mathfrak{e}'_l)$ formában. Ha még a $dx$-ben való linearitást is megköveteljük, úgy ez az $(\mathfrak{e}_i\otimes\mathfrak{e}_j)\to(\mathfrak{e}'_i\otimes\mathfrak{e}'_j)-\gamma_{ij}{}^{kl}{}_{t}(x)\,(\mathfrak{e}'_k\otimes\mathfrak{e}'_l)dx^t$ formát veszi fel. Tekintsük most a $T=T^{ij}(\mathfrak{e}_i\otimes\mathfrak{e}_j)\in E_n^{(2)}(x)$ tenzort. Ehhez az előbbi leképezés az $E_n^{(2)}(x+dx)$

$$\tilde{T} = T^{ij}(x)[(\mathfrak{e}'_i\otimes\mathfrak{e}'_j)-\gamma_{ij}{}^{kl}{}_{t}(x)(\mathfrak{e}'_k\otimes\mathfrak{e}'_l)\,dx^t] =$$
$$= [T'^{ij}(x+dx)-dT^{ij}(x)](\mathfrak{e}'_i\otimes\mathfrak{e}'_j)-\gamma_{ij}{}^{kl}{}_{t}T^{ij}(x)(\mathfrak{e}'_k\otimes\mathfrak{e}'_l)\,dx^t =$$
$$= T'^{ij}(x+dx)(\mathfrak{e}'_i\otimes\mathfrak{e}'_j)-[dT^{kl}+\gamma_{ij}{}^{kl}{}_{t}(x)T^{ij}(x)\,dx^t](\mathfrak{e}'_k\otimes\mathfrak{e}'_l) \equiv T'-\vartheta T$$

elemét rendeli, ahol (11) a $T'-\tilde{T}=\vartheta T$ különbség komponenseivel azonos. (12) és (13)-at a továbbiakban az (1)—(6) követelményekből lehetne levezetni. — Az itt tárgyalt és az 1. tételben megoldott probléma azonban nem azonos, mint ezt az 1. tételt követő megjegyzés is megvilágítja.

Ezekután definiáljuk $\mathfrak{P}$ elemeinek két szomszédos $P(x)$ és $P'(x+dx)$ pontban való párhuzamosságát.

DEFINÍCIÓ: $A(P)$ párhuzamosan van eltolva $P'$-be, ha $\vartheta A=0$.

A $\mathfrak{P}$ felett a $\gamma$ segítségével definiált teret $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$-val jelöljük, és tenzoriálisan összefüggőnek nevezzük.

Megjegyezzük még, hogy *a)*: A (13) transzformációs törvény eleget tesz a tranzitív tulajdonságnak. Így a $\gamma$-k egy lineáris másodosztályú differenciálgeometriai objektumot alkotnak.[5] *b)*: Nincs értelme $\gamma$ két felső indexében, ill. két első indexében való szimmetriáról beszélni, mert ezek a tulajdonságok egy transzformációnál általában elvesznek. Azonban a $\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t=\gamma_{lk}{}^{ji}{}_t$ összefüggés invariáns. Arra nézve, hogy egy szimmetrikus, ill. antiszimmetrikus $T^{ij}$-vel együtt $\vartheta T^{ij}$ is hasonló tulajdonságú legyen, ez az összefüggés szükséges és elegendő.[6]

## 2. §. A redukció esete

1. $\mathfrak{P}$ felett az (1. 1)—(1. 6)-nak a

$$(1)\qquad DA^{ij\ldots}{}_{vp\ldots}=dA^{ij\ldots}{}_{vp\ldots}+(\Gamma_t{}^i{}_k A^{kj\ldots}{}_{vp\ldots}+\ldots-\Gamma_t{}^k{}_v A^{ij\ldots}{}_{kp\ldots}-\ldots)\,dx^t$$

$$(2)\qquad \overline{\Gamma}_b{}^a{}_c=\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial\bar{x}^b\partial\bar{x}^c}+\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^b}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^c}\Gamma_j{}^i{}_k$$

is eleget tesz. Így a $DA$ eltűnésével is definiálhatunk egy affinösszefüggést. Ezt $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$-val jelöljük és indukáltnak nevezhetjük, mivel a $\Gamma$ közönséges affinösszefüggés hozta létre. Megmutatjuk, hogy $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ speciálesetként tartalmazza $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$-t. Az 1. tétel értelmében elegendő lenne csak arra rámutatni, hogy $\vartheta$ nem ekvivalens $D$-vel $\mathfrak{P}$ felett. Azt is meg akarjuk azonban mutatni, hogy $\vartheta$ hogyan és mikor tartalmazza $D$-t.

Ezt a kérdést másodrendű kontravariáns tenzorok esetében E. BOMPIANI, míg vegyes másodrendű tenzorok esetén hozzá hasonló úton A. COSSU vizsgálta.[7] Bompiani eredménye szerint a redukcióhoz szükséges és elegendő, hogy egy tetszőleges (2) transzformációjú $\Gamma$ geometriai objektum segítségével képezett

$$P_{kl}{}^{ij}{}_t\overset{\mathrm{def}}{=}\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t-\delta^i_k\Gamma_l{}^j{}_t-\delta^j_l\Gamma_k{}^i{}_t$$

tenzor felbontható legyen a

$$(3)\qquad P_{kl}{}^{ij}{}_t=\delta^i_k T_l{}^j{}_t+\delta^j_l T_k{}^i{}_t$$

formában (ahol $T$ valamilyen tenzor). Könnyű látni, hogy ha $P$, mely függ $\Gamma$-tól, valamilyen $\Gamma$ mellett felbontható a (3) formában, akkor minden más $\Gamma^*$ mellett is

[5] Lásd K. YANO [23] 18. oldal vagy J. ACZÉL—S. GOŁAB [1] I. fejezet.
[6] Lásd E. BOMPIANI [2] 481. oldal, vagy M. KUCHARZEWSKI [14] 68. oldal.
[7] E. BOMPIANI [2] 481. oldal, és A. COSSU [6] 422. oldal.

felbontható. — Ez a feltétel azonban relatív, mivel továbbra is nyitott kérdés, hogy $P$-nek mikor létezik a (3) felbontása, és hogy melyek a felbontásban fellépő $T$ tenzor komponensei.

Gyorsan hozzájuthatunk ehhez az eredményhez az előző bekezdésben elmondottaktól függetlenül és számunkra kissé alkalmasabb formában is. Legyenek adva az $x$ koordinátarendszerben a $\Gamma$-k, és ezzel

$$DT^{ij} = dT^{ij} + (\Gamma_k{}^i{}_t T^{kj} + \Gamma_l{}^j{}_t T^{il})\, dx^t. \tag{4}$$

(1. 11) és (4) csak a megfelelő $T^{kl}$ koefficienseiben különbözik. Definiáljuk tehát úgy a $\gamma$-kat, hogy $T^{kl}$ koefficiensei a két kifejezésben egyenlők legyenek. Így legyen

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t = \delta_l^j \Gamma_k{}^i{}_t + \delta_k^i \Gamma_l{}^j{}_t. \tag{5}$$

Könnyű látni, hogy ebben az esetben (1. 14) is összeesik (1)-gyel. (5) egy zéróra redukált formában (2) és (1. 13) figyelembevételével tenzorreláció. — Továbbá adott $\gamma$ mellett (5) általában nem állhat fenn, hiszen (5) szerint pl. a $\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t$ közül többnek el kell tűnnie. Így igaz a

2. TÉTEL. *A $\vartheta$ segítségével definiált affinösszefüggés speciálesetként tartalmazza a $\mathfrak{P}$ felett a $D$ segítségével definiált affinösszefüggést. Hogy az előbbi az utóbbira redukálódjon, annak szükséges és elegendő feltétele* (5) *teljesedése.*

**2.** Kérdés, mikor oldható meg (5).

Mivel ezen egyenletrendszer megoldhatósága csak a $\gamma$-tól függ, és a megoldhatóság független a koordinátarendszertől, így kell, hogy a $\gamma$-k között a koordinátarendszertől független összefüggések létezzenek, melyek (5) megoldhatóságának szükséges és elegendő feltételeit fejezik ki. Ezeket akarjuk most meghatározni.[8] Eközben megkapjuk (5) független egyenleteit, melyek mind egyetlen ismeretlent tartalmaznak és így (5) megoldására — a megoldhatóság fennállta esetén —, egyidejűleg egy igen egyszerű eljárást is kapunk.

Mivel (5) jobboldala szimmetrikus az $i$ és $j$, valamint $k$ és $l$-ben, így a megoldhatósághoz szükséges, hogy

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t - \gamma_{lk}{}^{ji}{}_t = 0 \tag{6}$$

fennálljon. Továbbá (5)-ből következően szükséges a

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t = 0 \qquad \text{ha } i \neq k \text{ és } j \neq l \tag{7}$$

összefüggés is. (6) és (7) teljesedését a továbbiakban feltesszük.

Most az (5) egyenletrendszer egyenleteit három részre bontjuk:

A) ahol $i \neq k$ és $j \neq l$.

Ezek elhanyagolhatók, mert (7) figyelembevételével minden $\Gamma_p{}^v{}_t$-re teljesednek.

B) ahol $i = k$, de $j \neq l$.

Így ezek

$$\gamma_{1l}{}^{1j}{}_t = \Gamma_l{}^j{}_t, \;\ldots,\; \gamma_{nl}{}^{nj}{}_t = \Gamma_l{}^j{}_t \qquad (j \neq l) \tag{8}$$

[8] A legközvetlenebb ilyen feltétel az (5) lineáris egyenletrendszer koefficienseiből alkotott eredeti és bővített mátrix rangjának megegyezését kifejező. Ez azonban egy viszonylag bonyolult összefüggés, melynél áttekinthetőbbet fogunk megadni.

formájúak. Ezen részrendszer megoldhatóságának a szükséges és elegendő feltétele az, hogy

$$(9) \qquad \gamma_{r_0 l}{}^{r_0 j}{}_t - \gamma_{s_0 l}{}^{s_0 j}{}_t = 0 \qquad (j \neq l)$$

legyen. (Ha két indexre szummázni kellene, de azok a $_0$ jellel vannak ellátva, akkor a szummáció elmarad.)

C) ahol $i=k$ és $j=l$.

Az idetartozó egyenletek

$$(10) \quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad \gamma_{11}{}^{11}{}_t = 2\Gamma_1{}^1{}_t, \ldots, \gamma_{nn}{}^{nn}{}_t = 2\Gamma_n{}^n{}_t \\ &\text{b)} \quad \gamma_{12}{}^{12}{}_t = \Gamma_1{}^1{}_t + \Gamma_2{}^2{}_t, \ldots, \gamma_{n-1n}{}^{n-1n}{}_t = \Gamma_{n-1}{}^{n-1}{}_t + \Gamma_n{}^n{}_t \end{aligned}$$

formájúak, amely részrendszer megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele az, hogy

$$(11) \qquad \gamma_{k_0 l_0}{}^{k_0 l_0}{}_t - \frac{1}{2}(\gamma_{k_0 k_0}{}^{k_0 k_0}{}_t + \gamma_{l_0 l_0}{}^{l_0 l_0}{}_t) = 0$$

legyen.

(6), (7), (9) és (11) együtt (5) megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele egy tetszőleges kiinduló koordinátarendszerben. Azonban a megoldhatóság független a koordinátarendszertől, mivel (5) tenzorreláció. Így ha (6), (7), (9) és (11) egy koordinátarendszerben fennáll, úgy ezeknek minden koordinátarendszerben fenn kell állani.[9] Ezzel megmutattuk, hogy

3. TÉTEL. (5) *megoldhatóságának, azaz annak, hogy* $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$*-ra redukálódjon a koordinátarendszertől független szükséges és elegendő feltétele* (6), (7), (9) *és* (11) *fennállása. Ebben az esetben a* $\Gamma_j{}^i{}_k$ *értékeit* (8) *és* (10, a) *szolgáltatják.*

(8) és (10)-ből látható, hogy (5) megoldása egyértelmű:

4. TÉTEL. *A* $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ *legfeljebb egyféleképpen redukálódik egy* $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$*-ra.*

(8) és (10, a) segítségével a $\gamma$-ból (2) transzformációjú $\Gamma$-t vezettünk le. Tehát az így meghatározott $\Gamma$ a $\gamma$-nak egy algebrai komitánsa.[10] A $\gamma$-ból azonban algebrai úton több (2) transzformációjú geometriai objektumot lehet képezni, habár ezen objektumok közül a 4. tétel értelmében legfeljebb egy elégíti ki (5)-öt. Az ilyen algebrai komitánsok meghatározása a tárgya S. GOŁAB egy újabb dolgozatának. A kérdéssel foglalkozott ugyanakkor M. KUCHARZEWSKI is.[11] Ilyen algebrai komitáns a következő paragrafusban értelmezendő $G_k{}^h{}_t$ $\frac{1}{n+1}$-szerese is. GOŁAB vizsgálataiban a 3. tétel eredményei újra kiadódnak[12] kissé megváltoztatott formában, aminek az oka az, hogy bár (5) megoldása egyértelmű, ez a megoldás a $\gamma$ komponensei között a megoldhatóság esetében fennálló (6), (7), (9) és (11) miatt többféleképpen fejezhető ki.

[9] Ez még nem jellemzi azt, hogy a felsorolt egyenletek tenzorrelációk, csak azt, hogy a felsorolt egyenletek transzformáltjai ekvivalensek az új koordinátarendszerben felírt (6), (7), (9), (11) egyenletek rendszerével. (6) és (7)-ről azonban közvetlenül, míg (9) és (11)-ről kisebb számolással látható, hogy valóban tenzorrelációk.

[10] Lásd J. ACZÉL–S. GOŁAB [1] 16. oldal, vagy J. A. SCHOUTEN [16] 164. oldal.

[11] S. GOŁAB [12], és M. KUCHARZEWSKI [14] 6. §.

[12] S. GOŁAB [12] 20. oldal.

**3.** A $\gamma$ és a $\Gamma$-k között (5)-ön kívül más érdeklődésre számottartó kapcsolat is fennállhat. Így pl. a

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_{t} = \delta_l^j \Gamma_k{}^i{}_t + \delta_k^i \Gamma_l^{*j}{}_t, \tag{12}$$

(ahol $\Gamma$ és $\Gamma^*$ két különböző (2) transzformációjú objektum). Ezt a kettősredukció esetének fogjuk nevezni. A kettősredukció felléptének feltételeit ugyanúgy vizsgálhatjuk, mint ahogyan az előző pontban a közönséges redukció esetét vizsgáltuk. Ebben az esetben is fenn kell állni (7)-nek, (6)-nak azonban nem. A B) esetben (6) hiánya miatt (9) mellett a megoldhatóságnak egy másik feltétele is jelentkezik:

$$\gamma_{kr_0}{}^{ir_0}{}_t - \gamma_{ks_0}{}^{is_0}{}_t = 0 \qquad (i \neq k). \tag{13}$$

Végül a C) esetben (10) helyett a

$$\gamma_{i_0j_0}{}^{i_0j_0}{}_t = \Gamma_{i_0}{}^{i_0}{}_t + \Gamma^*_{j_0}{}^{j_0}{}_t \tag{14}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Mint könnyű látni, (14) megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele

$$\gamma_{i_0r_0}{}^{i_0r_0}{}_t - \gamma_{r_0r_0}{}^{r_0r_0}{}_t - \gamma_{i_0j_0}{}^{i_0j_0}{}_t + \gamma_{r_0j_0}{}^{r_0j_0}{}_t = 0. \tag{15}$$

Az említett feltételek fennállta esetén a megoldás:

$$\begin{aligned} &\Gamma_k{}^i{}_t = \gamma_{k1}{}^{i1}{}_t = \ldots = \gamma_{kn}{}^{in}{}_t && (i \neq k) \\ &\Gamma^{*j}_l{}_t = \gamma_{1l}{}^{1j}{}_t = \ldots = \gamma_{nl}{}^{nj}{}_t && (j \neq l) \\ &\Gamma_{i_0}{}^{i_0}{}_t = \gamma_{i_0r_0}{}^{i_0r_0}{}_t - \gamma_{r_0r_0}{}^{r_0r_0}{}_t + c_t \\ &\Gamma^*_{j_0}{}^{j_0}{}_t = \gamma_{r_0j_0}{}^{r_0j_0}{}_t c_t, \end{aligned} \tag{16}$$

ahol $r$ tetszőleges index, $c_t$ pedig $r$ rögzítése után választott konstans.

Ha közönséges, azaz (5) formájú redukció lehetséges, akkor nyilván kettős redukció is lehetséges (pl. abban a speciális formában, hogy $\Gamma^* = \Gamma$). Fordítva azonban nem. — Kérdés, mennyiben erősebbek a közönséges redukció feltételei, mint a kettős redukcióé?

A közönséges redukció feltételei: (6), (7), (9), (11). Jelöljük ezeket I-gyel. A kettős redukció feltételei: (7), (9), (13), (15). Jelöljük ezeket II-vel. — Először megmutatjuk, hogy I-ből következik II. (6) fennállta esetén ugyanis (13) összeesik (11)-el; továbbá (11)-ből következik (15). Ha ugyanis (15) baloldalán $\gamma_{i_0r_0}{}^{i_0r_0}{}_t$-t és $\gamma_{r_0j_0}{}^{r_0j_0}{}_t$-t ezek (11)-ből vett értékeivel pótoljuk, akkor $\frac{1}{2}[\gamma_{i_0i_0}{}^{i_0i_0}{}_t + \gamma_{j_0j_0}{}^{j_0j_0}{}_t] - \gamma_{i_0j_0}{}^{i_0j_0}{}_t$-t kapunk eredményül, ami (11) szerint zéró. — Könnyű látni, hogy II-ből nem következik I. Ha azonban II-höz még (6)-ot is hozzávesszük, akkor ezekből már következik I. Ehhez egyedül (11) teljesedését kell megmutatni. Képezzük a

$$\gamma_{i_0r_0}{}^{i_0r_0}{}_t - \frac{1}{2}[\gamma_{i_0i_0}{}^{i_0i_0}{}_t + \gamma_{r_0r_0}{}^{r_0r_0}{}_t] \tag{17}$$

kifejezést, mely olyan típusú, mint (11) baloldala. Fejezzük ki (15)-ből $\gamma_{r_0r_0}{}^{r_0r_0}{}_t$-t, valamint az $i_0$ és $r_0$ szerepének (15)-ben való felcserélése után $\gamma_{i_0i_0}{}^{i_0i_0}{}_t$-t. Helyettesítsük ezeket a (17) kifejezésbe. Így a $\gamma_{i_0r_0}{}^{i_0r_0}{}_t - \frac{1}{2}[\gamma_{i_0r_0t}{}^{i_0r_0} + \gamma_{r_0i_0}{}^{r_0i_0}{}_t]$ kifejezéshez jutunk, ami (6) figyelembevételével zérót ad. Így (15) és (6)-ból (11) következik.

Ha tehát a kettős redukció feltételeihez még (6)-ot is hozzávesszük, akkor a közönséges redukció (szükséges és elegendő) feltételeivel ekvivalens egyenletrendszert kapunk. Így azt is lehet mondani, hogy a kettős redukció feltételei (7), (9), (13), (15); míg a közönséges redukció feltételeihez ezeken kívül még (6) is hozzátartozik. Ilyen formában a közönséges és kettős redukció aszerint válik szét, hogy (6) teljesedik vagy sem.

6. TÉTEL: *A közönséges redukció egy szükséges és elegendő feltétel rendszere* (7), (9), (13), (15) *(azaz a kettős redukció feltételei) és* (6).

Megjegyezzük, hogy bár a közönséges redukció esetében (16) mindig megoldása a kettős redukció (12) alapegyenletének, ebben a megoldásban azonban csak akkor lesz $\Gamma = \Gamma^*$, azaz (16) csak akkor megoldása egyúttal (5)-nek is, ha $c_t$-t úgy választjuk, hogy

$$c_t \equiv \Gamma_{r_0}{}^{r_0}{}_t = \frac{1}{2}\,\gamma_{r_0 r_0}{}^{r_0 r_0}{}_t.$$

## 3. §. Az ekvivalencia

Egy, az $x$ koordinátarendszerre vonatkoztatott $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ tér, és egy, az $\bar{x}$ koordinátarendszerre vonatkoztatott $\{\mathfrak{P}, \bar{\gamma}\}$ tér akkor ekvivalens egymással, ha van olyan egyértelműen megfordítható

$$x^i = x^i(\bar{x}) \tag{1}$$

függvényrendszer, mely a két tér pontjait úgy rendeli egymáshoz, hogy az egymásnak megfelelő pontokban a $\gamma$ és $\bar{\gamma}$ között az (1.13) összefüggés áll fenn. Ha az említett tulajdonságokkal rendelkező (1) függvényrendszer létezik, akkor (1.13) ekvivalens

$$\bar{\gamma}_{cd}{}^{ab}{}_f(\bar{x})\,p^g_a p^h_c = p_c{}^g{}_f p^h_d + p_d{}^h{}_f p^g_c + \gamma_{kl}{}^{gh}{}_t(x)\,p^k_c p^l_d p^t_f \tag{2}$$

$$\left(p^g_a(\bar{x}) \equiv \frac{\partial x^g}{\partial \bar{x}^a}; \quad p_c{}^g{}_f(\bar{x}) \equiv \frac{\partial^2 x^g}{\partial \bar{x}^c\, \partial \bar{x}^f}\right)$$

összefüggéssel, ami adott $\gamma$ és $\bar{\gamma}$ mellett az (1) függvényrendszerre kirótt differenciálegyenletrendszer. (2)-t egy úgynevezett vegyes rendszerré[13] alakítjuk át, és ennek segítségével a kívánt tulajdonságú megoldás létezésére feltételeket fogunk levezetni.

Tegyük fel, hogy a fenti tulajdonságokkal rendelkező (1) függvényrendszer létezik, és jelöljük (1) $\bar{x}^j = \bar{x}^j(x)$ inverzének $x^k$ szerinti parciálisait $q^j_k$-val. (2)-ből

$$p^g_a p^h_b(\bar{\gamma}_{fc}{}^{ba}{}_d + \bar{\gamma}_{df}{}^{ba}{}_c - \bar{\gamma}_{cd}{}^{ab}{}_f) = p_c{}^g{}_d p^h_f + p_d{}^h{}_c p^g_f + (\gamma_{tk}{}^{hg}{}_l + \gamma_{lt}{}^{hg}{}_k - \gamma_{kl}{}^{gh}{}_t)\,p^h_c p^l_d p^t_f.$$

Ezt $q^f_g$-vel kontrahálva,

$$p_c{}^h{}_d = \frac{1}{n+1}\left(\bar{G}_c{}^b{}_d p^h_b - G_k{}^h{}_l p^k_c p^l_d\right), \tag{3}$$

ahol

$$G_k{}^h{}_t \equiv \gamma_{rk}{}^{hr}{}_t + \gamma_{tr}{}^{hr}{}_k - \gamma_{kt}{}^{rh}{}_r. \tag{4}$$

[13] Lásd J. M. THOMAS–O. VEBLEN [20], vagy L. P. EISENHART [9] 16. oldal, vagy L. P. EISENHART [10] 1. § vagy L. TAMÁSSY [19].

(3) segítségével (2)-t olyan formára hozhatjuk, ami a további összefüggések áttekinthetőségét nagymértékben elősegíti. $p_c{}^g{}_d$ (3) szerinti értékét (2)-be visszahelyettesítve,

(5) $$A^{gh}{}_{klt}p^k_c p^l_d p^t_f = \bar{A}^{ab}{}_{cdf}p^g_a p^h_b,$$

ahol

(6) $$A^{gh}{}_{klt} \equiv (n+1)\gamma_{kl}{}^{gh}{}_t - (\delta^h_l G_k{}^g{}_t + \delta^g_k G_l{}^h{}_t).$$

Így az említett vegyes rendszer a (3)-at jelentő

(8)
a) $$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} = p^i_a(\bar{x})$$

b) $$\frac{\partial p^g_c}{\partial \bar{x}^d} = \frac{1}{n+1}\left(\bar{G}_c{}^a{}_d(\bar{x})p^g_a - G_k{}^g{}_l(x)p^k_c p^l_d\right)$$

differenciálegyenletekből és az (5) skalárösszefüggésből áll. Nyilván a (2) differenciálegyenletrendszer minden megfordítható megoldása kielégíti a (8), (5) vegyes rendszert és fordítva. Ugyanis ha az (5) összefüggést (melyben az $A$ (6) által van meghatározva) megfelelően rendezzük, és a (8, b) jobboldalán álló kifejezéseket (8, b) baloldalával, ill. $p_c{}^g{}_d$-vel helyettesítjük, akkor (2)-t kapjuk vissza. Így a $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ és $\{\mathfrak{P}, \bar{\gamma}\}$ akkor és csak akkor ekvivalens, ha (8)- és (5)-nek van olyan megoldási rendszere, melyben (1) megfordítható.

A (8), (5) vegyes rendszer megoldhatóságára alkalmazható a *Thomas—Veblen*-féle tétel.[13] Ebből a célból képezzük (8) integrabilitási feltételeit (8) figyelembevételével. (8, a) integrabilitási feltétele (8, b) figyelembevételével

(9) $$\bar{S}_c{}^a{}_d p^g_a = S_k{}^g{}_t p^k_c p^t_d,$$

ahol[14]

(10) $$S_k{}^g{}_t \equiv \frac{1}{n+1}(G_k{}^g{}_t - G_t{}^g{}_k).$$

(8, b) integrabilitási feltétele (8) figyelembevételével

(11) $$\bar{R}^a{}_{bcd}p^s_a = R^s{}_{hji}p^h_b p^j_c p^i_d,$$

ahol[14]

(12) $$R^s{}_{hji} \equiv \frac{1}{(n+1)^2}(G_h{}^v{}_j G_v{}^s{}_i - G_i{}^v{}_j G_v{}^s{}_h) + \frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial G_j{}^s{}_h}{\partial x^i} - \frac{\partial G_j{}^s{}_i}{\partial x^h}\right).$$

(5) $\bar{x}^s$ szerinti deriválása előtt megjegyezzük, hogy a $G$

(13) $$\bar{G}_j{}^s{}_i = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m}\left[(n+1)\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i}G_v{}^m{}_t\right]$$

transzformációs törvénye alapján $\frac{1}{n+1}G_i{}^j{}_k$ alkalmas arra, hogy segítségével a

[14] Az $1/n+1$ faktor beiktatásának a célszerűségét a 12. és 13. tétel világítja meg.

szokott módon kovariáns deriváltat képezzünk.[15] Az $\frac{1}{n+1}\overset{\prime}{G}$ segítségével az $\bar{x}^s$ szerint képezett kovariáns deriváltat egy függőleges vonal mögé írt $s$ betűvel jelölve, (5) $\bar{x}^s$ szerinti parciálisa (8) figyelembevételével

$$\bar{A}^{ab}{}_{cdf|s}p^g_a p^h_b = A^{gh}{}_{klt|v}p^k_c p^l_d p^v_s. \tag{14}$$

Könnyen látható, hogy egy tetszőleges mennyiség tenzoriális transzformációs törvényét leíró kifejezés $\bar{x}^u$ szerinti deriváltja (8) figyelembevételével egy olyan kifejezést ad, mely ezen mennyiség $\frac{1}{n+1}G$ segítségével képezett kovariáns deriváltjának tenzoriális transzformációs törvényét írja le. Így a *Thomas—Veblen*-féle kritérium segítségével a következő feltételt kapjuk.

7. TÉTEL: *A $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ és $\{\bar{\mathfrak{P}}, \bar{\gamma}\}$ tér ekvivalenciájához szükséges, hogy létezzék olyan $N$ szám, hogy az $A$, $S$, $R$-nek az $\frac{1}{n+1}G$ segítségével képezett első $N-1$ kovariáns deriváltja tenzoriális transzformációs törvényét kifejező összefüggések kompatibilisek legyenek $\bar{x}$ minden értékére egy $n$ dimenziós tartományban, és hogy az $N$-edik kovariáns deriváltak transzformációs törvényét kifejező összefüggések az előzők következményei legyenek.*

Az elegendőséghez azt kell még biztosítani, hogy a megoldások közt szereplő $x^i(\bar{x}, c)$ függvényrendszer (ahol $c$ a megoldásban fellépő konstansokat jelöli) megfordítható legyen, azaz a $|p^i_a(\bar{x}, c)|$ determináns valamilyen $c$ értékrendszerre ne tűnjön el. Hasonló kérdéssel foglalkozik a szerző [19] dolgozatának 1. tétele is, aminek bizonyításában az volt a lényeges, hogy a $p^i_a$ elemei között több mint $n^2-n$ „szabadon választható" legyen, ami biztosítva van, ha a megoldásban fellépő paraméterek száma nagyobb, mint az ismeretlenek száma mínusz $n$. Az említett tétel bizonyításának gondolatmenete alapján igaz a

8. TÉTEL: *A $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ és $\{\bar{\mathfrak{P}}, \bar{\gamma}\}$ tér ekvivalenciájához elegendő, ha a* (8), (5) *vegyes rendszer megoldható, és a megoldásban fellépő konstansok száma minden $\bar{x}$ pontban nagyobb, mint az ismeretlenek számának és $n$-nek a különbsége.*

Ez nyilván teljesül, ha minden integrabilitási feltétel azonosság.

Megemlítjük, hogy [19] 3. és 4. tétele alapján és azokhoz hasonló formában az ekvivalencia szükséges és elegendő feltételeit is megfogalmazhatjuk.

Az ekvivalencia kérdésével újabban a fentiektől különböző módon M. KUCHARZEWSKI is foglalkozott.[16]

A 7. és 8. tételből, illetve a hozzájuk vezető meggondolásokból már világosan kitűnik a

9. TÉTEL: *Az $A$, $R$ és $S$, valamint ezek $\frac{1}{n+1}G$ segítségével képezett kovariáns deriváltjai a $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ egy teljes differenciálvariáns rendszerét képezik.*

[15] Lásd L. P. EISENHART [9] 3. oldal.
[16] M. KUCHARZEWSKI [14] 5. §.

## 4. §. Görbület és torzió

1. DEFINÍCIÓ: A $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ teret akkor nevezzük affinnak, ha van olyan koordinátarendszer, ahol a $\gamma$ összes komponense azonosan eltűnik.

Az előző paragrafus és az itteni definíció értelmében a $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ affin voltának a feltétele az, hogy a

$$(1) \qquad p_c{}^g{}_f p_d^h + p_d{}^h{}_f p_c^g + \gamma_{kl}{}^{gh}{}_t(x) p_c^k p_d^l p_f^t = 0$$

differenciálegyenletrendszernek legyen az

$$(2) \qquad x^i = x^i(\bar{x})$$

függvényekre megfordítható megoldása.

10. TÉTEL: $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ *affin voltának szükséges és elegendő feltétele az R és A görbületi és az S torziótenzor eltűnése.*

$R$, $A$ és $S$ tenzorok. Ha ugyanis $x^i = x^i(\bar{x})$ nem ismeretlen függvényeket jelentenek, mint az előző paragrafusban, hanem egy transzformációt leíró ismert függvényrendszert, akkor (3. 11), (3. 5) és (3. 9) nem feltételek, hanem transzformációs törvények. Ez azonban azt jelenti, hogy $R$, $A$ és $S$ tenzorok.

Az említett tenzorok eltűnése valóban szükséges. A $\gamma$ komponensei, ill. ezek parciálisai (3. 12), (3. 6), (3. 10) és (3. 4) szerint ugyanis az $R$, $A$ és $S$ kifejezéseinek minden tagjában előfordulnak. Ha $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ affin, akkor definíciónk szerint van olyan koordinátarendszer, melyben a $\gamma$ minden koefficiense azonosan eltűnik. Ekkor azonban eltűnnek a $\gamma$ parciálisai, és így az $R$, $A$ és $S$ is, és ez tenzorvoltuk miatt minden koordinátarendszerben igaz.

Az előző paragrafus első két tételére támaszkodva megmutatjuk, hogy $R$, $A$ és $S$ eltűnése esetén $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ ekvivalens az $\bar{x}$ koordinátarendszerre vonatkoztatott azon $\{\mathfrak{P}, \bar{\gamma}\}$-val, melynél $\bar{\gamma}$ azonosan eltűnik. Ez definíciónk értelmében tételünknek azt az állítását bizonyítja, hogy a mondott feltételek elégségesek.

Megoldandó vegyes rendszerünk most a

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \qquad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} = p_a^i(\bar{x}) \\ &\text{b)} \qquad \frac{\partial p_c^g}{\partial \bar{x}^d} = -\frac{1}{n+1} G_k{}^g{}_t(x) p_c^k p_d^t \end{aligned}$$

differenciálegyenletrendszerre redukálódik. A (3. 8b)-ben szereplő $\bar{G}$ a $\bar{\gamma}$ eltűnése miatt esik ki. A (3. 5) baloldala feltételünk, jobboldala pedig a $\bar{\gamma}$ eltűnése miatt válik zéróvá. Ebben az esetben $R$ és $S$ feltételünkben szereplő eltűnése miatt létezik a 7. tételben megkívánt tulajdonságokkal rendelkező $N$, mégpedig $N = 1$. — Az integrabilitási feltételek itt azonosságok lévén, a megoldásban fellépő paraméterek száma megegyezik (3) ismeretleneinek számával. Így teljesül a 8. tétel feltétele is. Ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy a 10. tételben mondott feltételek elegendők.

**2.** Az $A$ tenzor geometriai jelentése.

11. TÉTEL: *Annak, hogy* $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ *egy szimmetrikus* $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$*-ra redukálódjon, szükséges és elegendő feltétele az A görbületi tenzor eltűnése.*

Tegyük fel, hogy $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ redukálódik, azaz (2. 5) fennáll. Ezt az $A$ (3. 6) kifejezésébe helyettesítve (3. 4) figyelembevételével $A$-ra a következő kifejezést kapjuk:

$$A^{gh}{}_{klt} = 2\{(n-1)\delta_l^h \Gamma_{[k}{}^g{}_{t]} + \delta_l^h \delta_t^g \Gamma_{[k}{}^r{}_{r]} + (n-1)\delta_k^g \Gamma_{[l}{}^h{}_{t]} + \delta_k^g \delta_t^h \Gamma_{[l}{}^r{}_{r]}\}. \tag{4}$$

Ebből látható, hogy ha $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ egy szimmetrikus $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$-ra redukálódik, akkor $A=0$.

Tegyük fel megint, hogy $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ redukálódik és helyettesítsük (2. 5)-öt (3. 4)-be. Így

$$G_k{}^g{}_t = 2\Gamma_k{}^g{}_t + (n-1)\Gamma_t{}^g{}_k + 2\delta_t^g \Gamma_{[r}{}^r{}_{k]}. \tag{5}$$

Ha most $A=0$, akkor (3. 6) szerint $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ redukálódik egy olyan $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$-ra, ahol $\Gamma = \frac{1}{n+1} G$, azaz

$$G_k{}^g{}_t = (n+1)\Gamma_k{}^g{}_t. \tag{6}$$

Ezt (5)-be helyettesítve

$$(n-1)\Gamma_{[k}{}^g{}_{t]} = \delta_t^g \Gamma_{[r}{}^r{}_{k]}. \tag{7}$$

Ha itt $g \neq t$, akkor $\Gamma_k{}^g{}_t = \Gamma_t{}^g{}_k$. Ha pedig $g=t$, akkor (7)-ből

$$\Gamma_{[k}{}^{t_0}{}_{t_0]} = \frac{1}{1-n} \Gamma_{[k}{}^r{}_{r]} \qquad (t_0\text{-ra nem szummázunk!}) \tag{8}$$

azaz $\Gamma_{[k}{}^{t_0}{}_{t_0]}$ független $t$ értékétől. Így $\Gamma_{[k}{}^r{}_{r]} \equiv \Gamma_{[k}{}^1{}_{1]} + \dots + \Gamma_{[k}{}^n{}_{n]} = n\Gamma_{[k}{}^{t_0}{}_{t_0]}$. Ezt (8)-ba visszahelyettesítve $\left(1 - \frac{n}{1-n}\right) \Gamma_{[k}{}^{t_0}{}_{t_0]} = 0$, azaz a $g=t$-re is $\Gamma_k{}^g{}_t = \Gamma_t{}^g{}_k$, ami azt jelenti, hogy az $A=0$ esetében $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ egy szimmetrikus $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$-ra redukálódik.

A 11. tételből, (6)-ból, valamint az $R$ definícióját jelentő (3. 12)-ből következik a

12. TÉTEL: *Az $A$ tenzor eltűnése esetén $R$ és $S$ a $\Gamma$ által indukált (közönséges) affinösszefüggő tér görbületére és torziójára redukálódik.*

Ha $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ affin, akkor a 10. tétel szerint eltűnik az $A$. Ekkor a 11. tétel szerint $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ egy $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$-ra redukálódik, és ez a redukció a 4. tétel szerint egyértelmű. $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$ azonban egy része az összes tenzorok $\mathfrak{T}$ halmaza felett a $\Gamma$ által generált közönséges affinösszefüggő térnek. Az $R$ és $S$ eltűnése (10. tétel) miatt azonban a 12. tétel szerint eltűnik a $\{\mathfrak{T}, \Gamma\}$-nak mind a görbülete, mind a torziója. Így igaz a

13. TÉTEL: *Ha $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ affin, (a jelen paragrafus elején adott definíció értelmében), akkor ez egy közönséges affin térnek a párosrendű tenzorokat magában foglaló része.*

Bár az 1 § (6), (7), (9) és (11) összefüggései elég egyszerű tenzoriális formában írt szükséges és elegendő feltételét adják a $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ redukciójának, megmutatjuk, hogy ilyen feltétel az $A$ segítségével is nyerhető.

14. TÉTEL: *A $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ redukciójának szükséges és elegendő feltétele, hogy $A$ az*

$$A^{gk}{}_{klt} = (n-1)\delta_l^h U_k{}^g{}_t + \delta_l^h \delta_t^g U_k{}^r{}_r + (n-1)\delta_k^g U_l{}^h{}_t + \delta_k^g \delta_t^h U_l{}^r{}_r \tag{9}$$

*formában legyen előállítható, ahol $U$ valamilyen, az alsó indexeiben antiszimmetrikus tenzor.*

Ha $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ redukálódik, akkor az $A$ (4)-ből is nyerhető, ami (9) formájú, tehát a feltétel szükséges.

A feltétel elegendő is. Válasszunk egy olyan $\overset{*}{\Gamma}$-ot, hogy erre

$$(10) \qquad 2\overset{*}{\Gamma}_{[j}{}^{i}{}_{k]} = U_j{}^i{}_k$$

álljon fenn. Legyen

$$(11) \qquad \overset{*}{\gamma}_{kl}{}^{ij}{}_t \overset{\text{def}}{=} \delta^i_k \overset{*}{\Gamma}_l{}^j{}_t + \delta^j_l \overset{*}{\Gamma}_k{}^i{}_t.$$

Így

$$(12) \qquad \gamma_{kl}{}^{ij}{}_t = \overset{*}{\gamma}_{kl}{}^{ij}{}_t + T_{kl}{}^{ij}{}_t,$$

ahol $T$ tenzor.[17] — Ki fogjuk mutatni, hogy $T$ előállítható két redukálódó $\bar{\gamma}$ és $\tilde{\gamma}$ különbségeként, amiből $T$ felbonthatósága következik, a (11)-hez hasonló formában, ami (12)-vel együtt már a $\gamma$ redukcióját fogja biztosítani.

Képezve a $\overset{*}{\gamma}$ segítségével a (3. 6) szerinti $A^*$ tenzort, azt találjuk, hogy $A = A^*$, mivel $A^*$ a $\overset{*}{\gamma}$ redukciója miatt (4) formájú, ez pedig (10) alapján a feltétel szerint (9) formájú $A$-val egyenlő. Másrészről, ha (3. 6)-ban a $\gamma$ helyébe a (12) szerinti $\overset{*}{\gamma} + T$-t helyettesítjük, akkor $A = A^* + H$, ahol

$$H^{gh}{}_{klt} \equiv (n+1) T_{kl}{}^{gh}{}_t - \delta^h_l (T_{rk}{}^{gr}{}_t + T_{tr}{}^{gr}{}_k - T_{kt}{}^{rg}{}_r) - \delta^g_k (T_{rl}{}^{hr}{}_t + T_{tr}{}^{hr}{}_l - T_{lt}{}^{rh}{}_r).$$

Az $A = A^*$ alapján $H = 0$.

Legyen most $\bar{\gamma}_{kl}{}^{ij}{}_t$ a szimmetrikus $\bar{\Gamma}_j{}^i{}_k$-ból a (11) formában képezett objektum. Így a 11. tétel szerint $\bar{A} = 0$. Legyen továbbá $\tilde{\gamma} \overset{\text{def}}{=} \bar{\gamma} - T$. Így (3. 6)-ból $\tilde{A} = \bar{A} - H$, és $\bar{A} = H = 0$ miatt $\tilde{A} = 0$. Ekkor viszont $\tilde{\gamma}$ redukálódik valamilyen $\tilde{\gamma}_{kl}{}^{ij}{}_t = \delta^i_k \tilde{\Gamma}_l{}^j{}_t + \delta^j_l \tilde{\Gamma}_k{}^i{}_t$ formában. Így a $\tilde{\gamma} = \bar{\gamma} - T$-ből

$$T_{kl}{}^{ij}{}_t = \delta^i_k (\bar{\Gamma}_l{}^j{}_t - \tilde{\Gamma}_l{}^j{}_t) + \delta^j_l (\bar{\Gamma}_k{}^i{}_t - \tilde{\Gamma}_k{}^i{}_t) \equiv \delta^i_k t_l{}^j{}_t + \delta^j_l t_k{}^i{}_t,$$

ahol $t$ tenzor. $T$-nek ezt az értékét (12)-be helyettesítve, (11) figyelembevételével, és a $\overset{*}{\Gamma} + t = \Gamma$ jelöléssel

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t = \delta^i_k (\overset{*}{\Gamma}_l{}^j{}_t + t_l{}^j{}_t) + \delta^j_l (\overset{*}{\Gamma}_k{}^i{}_t + t_k{}^i{}_t) = \delta^i_k \Gamma_l{}^j{}_t + \delta^j_l \Gamma_k{}^i{}_t,$$

tehát $\gamma$ redukálódik.

## IRODALOM

[1] Aczél, J.—Gołąb, S.: *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa, 1960.
[2] Bompiani, E.: Le connessioni tensoriali, *Atti Acad. Naz. Lincei* **1** (1946), 478—482.
[3] Bochner, S.: A new viewpoint in differential geometry, *Canadian Journal of Math.* **3** (1951), 460—470.
[4] Bourbaki, N.: *Élémente de mathématique, I. Partie, Livre II: Algèbre. Chapitre III: Algèbre multilinéaire.*, Paris, 1948.

[17] Ez látható a $\gamma$, ill. a $\overset{*}{\gamma}$ (1.13) transzformációs törvényéből.

[5] Cossu, A.: Sulle connessioni tensoriali integrabili, *Atti Acad. Naz. Lincei* **19** (1955), 258—264.
[6] Cossu, A.: Connessioni tensoriali per tensori doppi misti, *Atti Acad. Naz. Lincei*, **19** (1956), 421—427.
[7] Cossu, A.: Nozioni generali sulle connessioni tensoriali di specie qualunque, *Rend. Mat. ed Appl.* **21** (1962), 167—218.
[8] Duschek, A.—Mayer, W.: *Lehrbuch der Differentialgeometrie, Band* II., Leipzig, 1930.
[9] Eisenhart, L. P.: *Non Riemannian-geometry*, New York, 1927.
[10] Eisenhart, L. P.: *Continuous groups of transformations*, Princeton, 1933.
[11] Farkas, M.: Discussion of the geometry of affinelly connected spaces by direct method, *Publ. Math. Debrecen*, **8** (1961), 25—54.
[12] Goŀab, S.: Sur les comitants algebriques d'une objet de la connexion linéaire tansorielle, *Annali di Mat. Pura ed Appl.* **54** (1961), 13—21.
[13] Hokari, S.: Über die Bivektorübertragung, *Journal Fac. Sci. Hokkaido Univ.* **2** (1934), 104—117.
[14] Kucharzewski, M.: Über die Tensorübertragung, *Annali di Mat. Pura ed Appl.* **54** (1961), 64—83.
[15] Lichnerowicz, A.: *Algèbre et Analyse linéaires*, Paris 1947.
[16] Schouten, J. A.: *Ricci-calculus*, Berlin 1954.
[17] Soós, Gy.: A Finsler-féle fibrált terek elméletéhez, *Magy. Tud. Ak. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **13** (1963), 17—64.
[18] Tamássy, L.: Über den Affinzusammenhang von, zu Tangentialräumen gehörenden Produkträumen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **11** (1960), 65—82.
[19] Tamássy, L.: Über die geometrische Anwendung eines Differentialgleichungssystems, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **11** (1960), 187—196.
[20] Thomas, J. M.—Veblen, O.: Projective invariants of affine geometry of paths. *Annals of Math.* **27** (1926), 279—296.
[21] Varga, O.: Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 7—17.
[22] Weyl, H.: Reine Infinitesimalgeometrie, *Math. Zeitschrift* **2** (1918), 384—411.
[23] Yano, K.: *The theory of Lie-derivatives and its applications*, Amsterdam 1956.

(Beérkezett: 1963. VIII. 6.)

# MÁSODRENDŰ ELLIPTIKUS—PARABOLIKUS TÍPUSÚ EGYENLETEKRE VONATKOZÓ PEREMÉRTÉK-PROBLÉMÁK EGY EGYSÉGES ELMÉLETÉRŐL*

Írta: GAETANO FICHERA

A jelen dolgozat másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletekre vonatkozó peremérték-problémák elméletével foglalkozik. Lényege egy ötlet, mely a másodrendű lineáris elliptikus-parabolikus típusú egyenletek — beleértve a teljesen elliptikus egyenletek klasszikus eseteit, a hővezetés egyenletét és az elsőrendű egyenleteket — peremérték-problémáinak egy egységes elméletére vonatkozik.

Az elmélet a jelen pillanatban nem lép fel a teljesség igényével. Mindazonáltal, véleményem szerint, a további kutatás számára számos vonzó területet tár fel és ezért a mostanáig elért eredmények érdemesek arra, hogy itt tárgyaljuk őket.

Ezen elmélet első eredményeit 1956-ban érte el a szerző [4]. Egy teljesebb tárgyalás abban a sokszorosított jegyzetben található, mely a szerzőnek 1957-ben Rómában, az Olasz Felsőbbmatematikai Intézetben (Istituto Italiano di Alta Matematica) tartott előadásait tartalmazza [5].

1958-ban K. O. FRIEDRICHS közölt egy dolgozatot [7] lineáris differenciálegyenletekre vonatkozó, típustól független peremérték-problémákról. A *Friedrichs*-féle elmélet vonatkozik olyan egyenletekre is, melyek lehetnek a probléma vizsgálatánál szóba jövő tartomány valamely résztartományában hiperbolikus, míg egy másik résztartományában elliptikus típusúak. Azonban nem látszik lehetségesnek bevonni a FRIEDRICHS által vizsgált egyenletek osztályába minden elliptikus-parabolikus típusú egyenletet, minthogy FRIEDRICHS bizonyos szimmetria-feltétellel él, melyre a jelen tárgyalásban nincs szükség.

A szerző véleménye szerint nagyon érdekes lenne összehasonlítani a *Friedrichs*-féle és a jelen elméletet.

## 1. §. Feltételek és a másodrendű lineáris elliptikus-parabolikus típusú egyenletekre vonatkozó általános peremérték-probléma felállítása

Jelölje $X^{(r)}$ az $r$-dimenziós valós *Descartes*-féle teret. Legyen $x \equiv (x_1, \ldots, x_r)$ az $X^{(r)}$ egy pontja és $B$ egy összefüggő nyílt halmaz $X^{(r)}$-ben.

Azt mondjuk, hogy egy függvény a $C^m(B)$ ($m$ nem-negatív egész) osztályba tartozik, ha $h$-adrendű ($h \leqq m$) parciális deriváltjaival együtt folytonos $B$-ben. Legyenek $a^{ij}(x)$ $(i, j = 1, \ldots, r)$, $b^i(x)$ $(i = 1, \ldots, r)$ és $c(x)$ rendre a $C^2(B)$, $C^1(B)$, $C^0(B)$ osztályba tartozó valós függvények.

A következő másodrendű lineáris differenciáloperátort fogjuk vizsgálni:

$$L(u) \equiv a^{ij} u_{x_i x_j} + b^i u_{x_i} + cu \;^{1} \qquad (a^{ij} \equiv a^{ji}),$$

* MRC Technical Summary Report No. 110, September, 1959. 97—120. old.

[1] Az összegezési konvenciót az egész dolgozatban használni fogjuk.

és feltételezzük, hogy az $a^{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$ kvadratikus alak pozitív definit vagy semi-definit minden $x \in B$ pontban, amit úgy fogunk kifejezni, hogy $L$ pozitív elliptikus-parabolikus operátor $B$-ben. Az az eset, midőn esetleg $B$ bizonyos pontjaiban $a^{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \equiv 0$, nincs kizárva.

Ez azt jelenti, hogy a differenciáloperátor $B$ valamely részhalmazán — mely esetleg $B$-vel egybeesik — elsőrendű operátorrá fajulhat el.

Legyen $A$ olyan, $B$-ben levő korlátos nyílt halmaz, melynek $\Sigma$ határa egybeesik saját $\bar{A}$ lezártjának határával.

A célból, hogy a $\Sigma$-ra teendő pontos feltételeket megadhassuk, először definiálni fogjuk az $X^{(r)}$-beli *reguláris* $(r-1)$-*sejt*et.

Legyen $x = x(t)$ az $(r-1)$-dimenziós Descartes-féle tér valamely zárt $D$ tartományában értelmezett függvény, melynek értékkészlete $X^{(r)}$-be esik és amely a következő feltételeknek tesz eleget:

a) $D$ homeomorf egy $(r-1)$-dimenziós gömbbel,

b) $x(t)$ egy-egyértelműen képezi le $D$-t $X^{(r)}$ valamely részhalmazára,

c) a $\dfrac{\partial(x)}{\partial(t)}$ *Jacobi*-féle mátrix rangja $r-1$ $D$ valamennyi pontjában,

d) $D$ határának $(r-1)$-dimenziós *Lebesgues*-féle mértéke nulla.

$x(t)$ $\Sigma_0$ értékkészlete $X^{(r)}$ egy *reguláris* $(r-1)$-*sejt*je. $D$ határának képét $\Sigma_0$ *perem*ének nevezzük.

Feltételezzük, hogy $\Sigma$ véges számú reguláris $(r-1)$-sejtre bontható fel: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_m$, oly módon, hogy ezen sejtek közül bármely kettő közös pontjai legfeljebb perempontjaik lehetnek.

Feltételezzük továbbá, hogy a *Green—Gauss*-féle azonosság, amely egy $A$ felett képezett $r$-szeres integrált $\Sigma$ felett képezett $(r-1)$-szeres integrálba transzformál át, alkalmazható $A \cup \Sigma$-ra.

Jelölje $\Sigma'_h$ a $\Sigma_h$ $(h = 1, \ldots, m)$ azon részhalmazát, melynek valamennyi $x \in \Sigma'_h$ pontjában $\Sigma_h$ érintő hiper-síkja az $L$ operátorra vonatkozóan karakterisztikus. Ez azt jelenti, hogy $\Sigma_h$ $x$ pontbeli normálisának $n_1, \ldots, n_r$ iránycosinusai az $a^{ij}(x)n_in_j = 0$ egyenletnek tesznek eleget. $\Sigma_h$ valamennyi $x$ pontjában, mely nem esik $\Sigma_h$ peremére, definiálva van a

$$b(x) = (b^i - a^{ij}_{x_j})n_i$$

függvény, ahol $n_1, \ldots, n_r$ a $\Sigma_h$ $x$ pontbeli, $A$ belseje felé mutató normálisának iránycosinusai.

Minden egyes rögzített $h$ esetén $b(x)$ definícióját folytonosság révén kiterjeszthetjük az egész $\Sigma_h$-ra.[2]

Legyen $\Sigma'_h$-nak a $b(x) \geqq 0$ feltétel által meghatározott részhalmaza $\Sigma^{(1)}_h$. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\Sigma^{(1)} = \Sigma^{(1)}_1 \cup \Sigma^{(1)}_2 \cup \ldots \cup \Sigma^{(1)}_m,$$

$$\Sigma^{(2)} = (\Sigma'_1 \cup \Sigma'_2 \cup \ldots \cup \Sigma'_m) - \Sigma^{(1)},$$

$$\Sigma^{(3)} = \Sigma - (\Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)}).$$

[2] A $b(x)$ különböző $h$ indexekre vonatkozó kiterjesztései általában nem egyeznek meg két különböző $\Sigma_h$ közös perempontjaiban.

Ily módon a $\Sigma$ halmazt három diszjunkt $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{(3)}$ részhalmazra bontottuk szét. Észre kell venni, hogy ezen halmazok némelyike üres lehet.

Legyen $\Sigma_D^{(3)}$ és $\Sigma_N^{(3)}$ két olyan diszjunkt halmaz, hogy

$$\Sigma^{(3)} = \Sigma_D^{(3)} \cup \Sigma_N^{(3)}.$$

Feltételezhetjük, hogy a $\Sigma_D^{(3)}$ vagy a $\Sigma_N^{(3)}$ halmaz üres. Természetesen mindkét halmaz üres, ha $\Sigma^{(3)}$ üres.

Legyenek $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ rendre az $A$-n, $\Sigma^{(2)} \cup \Sigma_D^{(3)}$-on és $\Sigma_N^{(3)}$-on értelmezett, adott függvények.

Az általános elliptikus-parabolikus egyenletre vonatkozó peremérték-probléma, melyet vizsgálni fogunk, a következő:

$$
\begin{aligned}
&L(u)=f && A\text{-ban},\\
&u=g && \Sigma^{(2)} \cup \Sigma_D^{(3)}\text{-on},\\
(1.1)\qquad &a^{ij}(x)u_{x_i}n_j=h && \Sigma_N^{(3)}\text{-on}.
\end{aligned}
$$

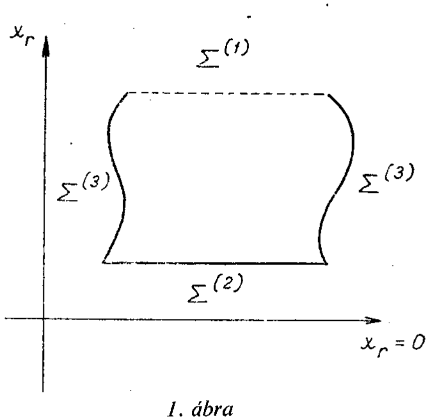
## 2. §. Speciális esetek és példák

Tegyük fel, hogy $a^{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$ pozitív definit $B$ minden pontjában, vagyis, hogy $L$ teljesen elliptikus operátor. Ebben a speciális esetben mind $\Sigma^{(1)}$, mind pedig $\Sigma^{(2)}$ üres. Ha $\Sigma_N^{(3)}$-at üresnek tételezzük fel, akkor az (1.1) peremérték-probléma a klasszikus Dirichlet-probléma. Ha $\Sigma_D^{(3)}$ üres, akkor egy általános elliptikus operátorra vonatkozó Neumann-problémával állunk szemben. Abban az esetben, midőn sem $\Sigma_D^{(3)}$ sem $\Sigma_N^{(3)}$ nem üres, az (1.1) probléma egy elliptikus operátorra vonatkozó vegyes Dirichlet—Neumann peremérték-problémára redukálódik.

Most tegyük fel a következőt:

$$L(u) \equiv L_0(u) - u_{x_r},$$

ahol $L_0$ az $r-1$ darab $x_1, \ldots, x_{r-1}$ változóban elliptikus operátor. Ebben az esetben $L$ a jól ismert parabolikus típusú hővezetési egyenlet operátora. $\Sigma^{(1)}$ a $\Sigma$ azon része, ahol a belső $n$ normális párhuzamos az $x_r$ tengellyel és avval ellenkező irányú (szaggatott vonal az 1. ábrán), $\Sigma^{(2)}$ a $\Sigma$ azon része, ahol $n$ párhuzamos az $x_r$ tengellyel és avval megegyező irányú. $\Sigma^{(3)}$ a perem azon része, ahol $n$ és az $x_r$ tengely 0-tól és $\pi$-től különböző szöget zárnak be.



*1. ábra*

Tekintsük a következő általánosabb parabolikus operátort:

$$L(u) \equiv L_0(u) - b^r(x)u_{x_r},$$

ahol $L_0$ definíciója ugyanaz, mint fentebb (az $x_1, \ldots, x_{r-1}$ változókban elliptikus operátor), és $b^r(x)$ egy tetszés szerinti, nem szükségszerűen állandó előjelű, $A \cup \Sigma$ban értelmezett függvény. Nem zárjuk ki azt az esetet, midőn $L_0$ az $x_r$ változótól is függ.

Legyen $W^+$ $[W^-]$ a $\Sigma$ azon (esetleg üres) része, ahol a belső $n$ normális párhuzamos az $x_r$ tengellyel, és avval megegyező [ellenkező] irányú. $W_1^+$ $[W_1^-]$ legyen $W^+$ $[W^-]$ azon részhalmaza, ahol $b^r(x) \geqq 0$ $[b^r(x) \leqq 0]$, és $W_2^+$ $[W_2^-]$ legyen a fennmaradó rész. Teljesülnek a következő relációk:

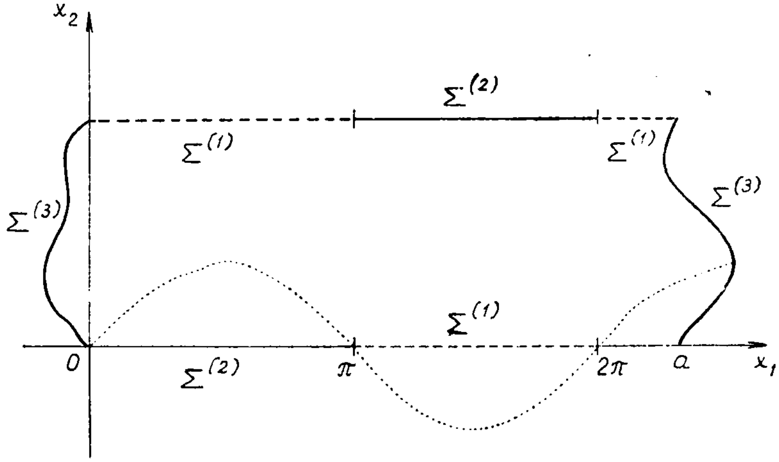
$$\Sigma^{(1)} \supset W_1^+ \cup W_1^- ; \; \Sigma^{(2)} \supset W_2^+ \cup W_2^- .$$

Könnyű látni, hogyan oszlanak el $\Sigma$ azon pontjai, ahol az érintősík nincs definiálva.

Példaként tekintsük a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \sin x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_1, x_2)$$

araboplikus egyenletet a 2. ábrán megadott tartományban.




*2. ábra*

A szaggatott vonal jelöli $\Sigma$ azon $\Sigma^{(1)}$ részét, ahol semmiféle peremfeltételt sem szabad előírni.

Nagyon egyszerű és elemi példákként tekintsük a következő két elsőrendű egyenletet:

$$u_{x_1} + c(x)u = f(x),$$

$$x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + c(x)u = f(x).$$

A 3., illetve a 4. ábrán $\Sigma$ $\Sigma^{(1)}$ és $\Sigma^{(2)}$ részei vannak feltüntetve az első, illetve a második egyenletre vonatkozóan ($\Sigma^{(1)} \equiv$ szaggatott vonal, $\Sigma^{(2)} \equiv$ folytonos vonal).

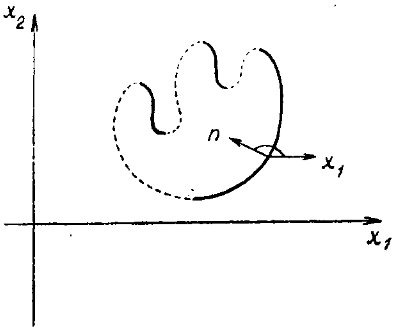
Érdekesebb példaként tekintsük az elsőrendű

$$b_1 u_{x_1} + b_2 u_{x_2} + cu = f$$

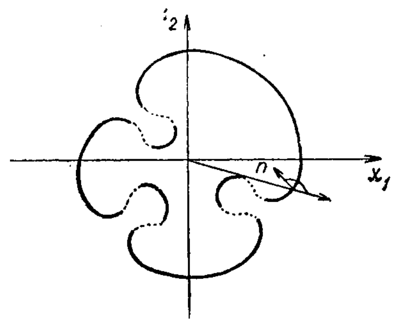
egyenletet a $-a_1 \leqq x_1 \leqq a_1$, $-a_2 \leqq x_2 \leqq a_2$ $(a_1 > 0, a_2 > 0)$ intervallumban, és tegyük fel, hogy

$$b_1(-a_1, x_2) \geqq 0, \qquad b_1(a_1, x_2) \leqq 0,$$
$$b_2(x_1, -a_2) \geqq 0, \qquad b_2(x_1, a_2) \leqq 0.$$

Ekkor $\Sigma^{(2)} \equiv \emptyset$ és $\Sigma \equiv \Sigma^{(1)}$. Ez példa peremfeltétel nélküli problémára. Ezt a speciális esetet PICONE vizsgálta 1928-ban (lásd [14]), és ő bizonyította be, hogy a $c<0$




*3. ábra*




*4. ábra*

esetben valamely *reguláris* megoldást már egyedül az a tulajdonsága egyértelműen meghatározza, hogy eleget tesz az egyenletnek.

Másrészről, ha tekintjük a

$$-b_1 u_{x_1} - b_2 u_{x_2} + cu = f$$

egyenletet, ahol $b_1$ és $b_2$ $\Sigma$-án a fenti egyenlőtlenségeknek tesznek eleget szigorú értelemben*, akkor $\Sigma \equiv \Sigma^{(2)}$ és $\Sigma^{(1)} \equiv \emptyset$. Vagyis $u$ értékét az egész peremen elő kell írni.

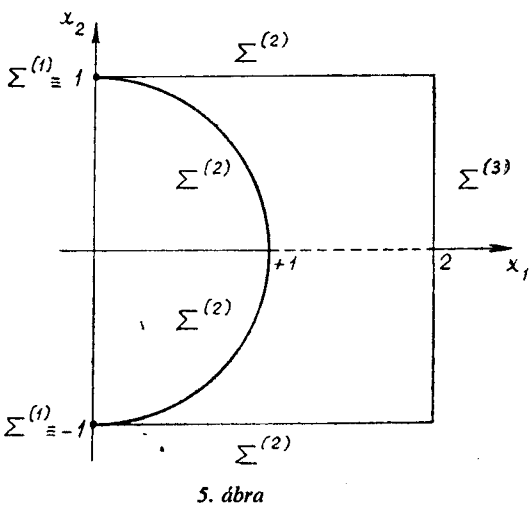
Lássunk most néhány más, másodrendű parabolikus típusú egyenletre vonatkozó példát. Először tekintsük az

$$(x_1^2 + x_2^2 - 1) u_{x_1 x_2} +$$
$$+ x_2(x_1^2 + 2x_2^2 - 2) u_{x_2} + cu = f$$

egyenletet. Legyen $A$ a következő feltétellel megadott tartomány:

$$x_1^2 + x_2^2 > 1, \quad 0 < x_1 < 2, \quad -1 < x_2 < 1.$$

Ebben az esetben $\Sigma^{(1)}$ a $(0, 1)$ és a $(0, -1)$ pontokból áll; $\Sigma^{(3)}$ az $(x_1 = 2, -1 < x_2 < 1)$ szakasz, $\Sigma^{(2)}$ a perem fennmaradó része. Ha $A$ gyanánt az előző tartománynak az $x_2 > 0$ félsíkban levő részét vesszük, akkor a peremnek az $x_1$ tengelyen fekvő része $\Sigma^{(1)}$ (5. ábra).



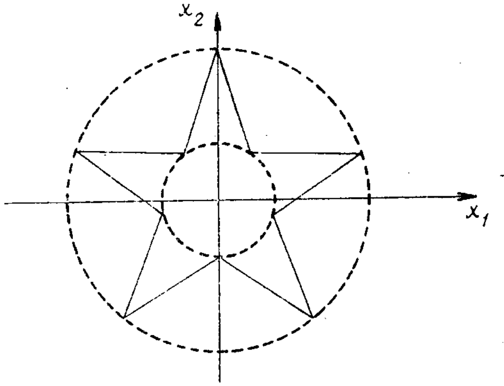

*5. ábra*

* Az egyenlőség esete ki van zárva *(A ford.)*

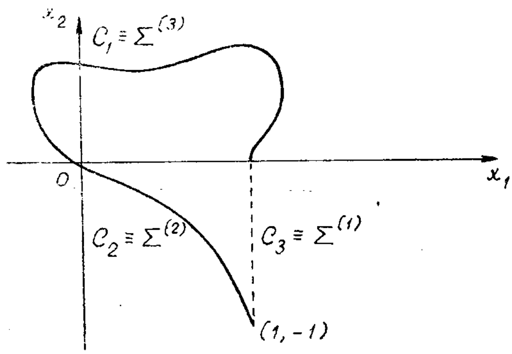
Az

$$x_2^2 u_{x_1 x_1} - 2x_1 x_2 u_{x_1 x_2} + x_1^2 u_{x_2 x_2} - 2x_1 u_{x_1} - 2x_2 u_{x_2} + cu = f$$

egyenlet esetén, az origóval mint középponttal rendelkező kör alakú tartománynál az egész perem $\Sigma^{(1)}$. Ezzel szemben a 6. ábrán megadott csillag alakú tartománynál az egész perem $\Sigma^{(3)}$. Az első esetben újabb példánk van peremfeltétel nélküli problémára, míg a második esetben $u$ értékét az egész peremen előírhatjuk.




6. ábra




7. ábra

Utolsó példaként tekintsük a következő, vegyes elliptikus—parabolikus típusú egyenletet:

$$k(x_2) u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = f;$$

$k(x_2)$ $x_2 > 0$ esetén pozitív, $x_2 \leqq 0$ esetén eltűnő függvény. Legyen $A$ a következő görbékkel határolt tartomány (lásd 7. ábra):

1. reguláris $C_1$ ív, mely az $x_1$ tengely 0 és 1 pontját köti össze, és amely teljesen az $x_2 > 0$ félsíkban fekszik;

2. $C_2$ ív ($x_2 < 0$ feltétellel), mely az origót az $(1, -1)$ ponttal köti össze, és amelynek érintője sehol sem párhuzamos az $x_2$ tengellyel;

3. az $(1, 0)$ és az $(1, -1)$ pontokat összekötő $C_3$ szakasz.

Ebben az esetben

$$\Sigma^{(3)} = C_1 \cup C_2, \quad \Sigma^{(1)} = C_3.$$

Valóban, $u$ értékét mind $C_1$-en, mind pedig $C_2$-ön előírhatjuk.

A következő paragrafusokban megmutatjuk, milyen értelemben és milyen további feltételek mellett léteznek az (1.1) olyan egyértelműen meghatározott megoldásai (speciálisan, a példaként említett problémák olyan megoldásai), melyek folytonosan függnek az adatoktól.

### 3. §. A priori integrál-becslések és maximum-elvek

Legyen $C_L$ a következő feltételeknek eleget tevő valós $u$ függvények osztálya:

a) $u$ elsőrendű deriváltjaival együtt folytonos $A \cup \Sigma$-ban $[u \in C^1(A \cup \Sigma)]$,

b) $u$ másodrendű deriváltjai folytonosak $A$-ban $[u \in C^2(A)]$,

c) az $L(u)$ függvény korlátos $A$-ban.

$L^*$ jelölje az $L$ operátor formális adjungáltját:

$$L^*(u)=(a^{ij}u)_{x_ix_j}-(b^iu)_{x_i}+cu\equiv a^{ij}u_{x_ix_j}+b^{*i}u_{x_i}+c^*u,$$

ahol

$$b^{*i}=2a^{ij}_{x_j}-b^i,\quad c^*=a^{ij}_{x_ix_j}-b^i_{x_i}+c.$$

I. *Legyen $p$ valamely, az $1\leqq p<+\infty$ feltételnek eleget tevő valós szám és létezzék egy $C^2(A\cup\Sigma)$ osztályba tartozó és $A\cup\Sigma$-ban a*

$$w\leqq 0,\quad L^*(w)+(p-1)cw>0 \tag{3.1}$$

*feltételt kielégítő függvény. Minden $u\in C_L$ függvényre, mely $\Sigma^{(2)}\cup\Sigma^{(3)}$-on majdnem mindenütt eltűnik, a következő egyenlőtlenség érvényes:*

$$\left(\int_A |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqq p\frac{\max\limits_{A\cup\Sigma}|w|}{\min\limits_{A\cup\Sigma}[L^*(w)+(p-1)cw]}\left(\int_A |L(u)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2}$$

Jelöljön $\delta$ egy tetszés szerinti pozitív számot. A *Green*-féle integráltétel felhasználásával igazolható a következő azonosság:

$$\begin{aligned}&\int_A\{(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}}L^*(w)-w\langle p[(p-1)u^2+\delta](u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-2}a^{hk}u_{x_h}u_{x_k}+\\ &+p(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1}uL(u)+c(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1}[(1-p)u^2+\delta]\rangle\}dx=\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$=\int_{\Sigma^{(1)}\cup\Sigma^{(2)}} w(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}}b\,d\sigma+\int_{\Sigma^{(3)}}\left[p^2(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1}wua^{hk}u_{x_h}n_k-(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}}(a^{hk}w_{x_h}n_k-bw)\right]d\sigma.$$

Mivel $\Sigma^{(1)}$-en majdnem mindenütt $b\geqq 0$, és $A\cup\Sigma$-ban $a^{hk}u_{x_h}u_{x_k}\geqq 0$, $w\leqq 0$, ezért az $u$-ra tett feltétel értelmében következik:

$$\int_A (u^2+\delta)^{\frac{p}{2}}\{L^*(w)-cw(u^2+\delta)^{-1}[(1-p)u^2+\delta]\}\,dx\leqq$$

$$\leqq p\int_A (u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1}uwL(u)\,dx+\delta^{\frac{p}{2}}\left[\int_{\Sigma^{(2)}} wb\,d\sigma-\int_{\Sigma^{(3)}}(a^{hk}w_{x_h}n_k-bw)\,d\sigma\right].$$

Látható, hogy $A\cup\Sigma$-ban $x$-re vonatkozóan egyenletesen

$$\lim_{\delta\to 0}(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}}\{L^*(w)-cw(u^2+\delta)^{-1}[(1-p)u^2+\delta]\}=(u^2)^{\frac{p}{2}}\{L^*(w)-(1-p)cw\},$$

$$\lim_{\delta\to 0}(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1}u=(u^2)^{\frac{p}{2}-1}u.$$

(3.3)-ból következik

$$\int_A |u|^p dx\leqq p\frac{\max\limits_{A\cup\Sigma}|w|}{\min\limits_{A\cup\Sigma}[L^*(w)+(p-1)cw]}\int_A |u|^{p-1}|L(u)|\,dx. \tag{3.4}$$

Ez $p=1$ esetén megegyezik (3. 2)-vel. $p>1$ esetén (3. 2) (3. 4)-ből a *Schwarz—Hölder* egyenlőtlenségnek a jobboldalon álló integrálra való alkalmazásával adódik.

II. *Ha $c<0$ $A\cup\Sigma$-ban, vagy $c^*<0$ $A\cup\Sigma$-ban, akkor a* (3. 1) *feltételnek eleget tevő $p$ és $w$ léteznek.*

Az első esetben ($c<0$) feltehetjük, hogy $w=-1$ és $p$ olyan nagy, hogy $A\cup\Sigma$-ban

$$\min_{A\cup\Sigma}[-a^{hk}_{x_h x_k}+b^h_{x_h}-pc]>0.$$

A második esetben ($c^*<0$) feltehetjük, hogy $w=-1$, és $p$ olyan kicsiny, hogy

$$\min_{A\cup\Sigma}[(1-p)c-c^*]>0$$

(speciálisan $p=1$).

Nyilvánvaló a következő tétel:

III. *Ha $c<0$ és $c^*<0$ $A\cup\Sigma$-ban, akkor a* (3. 1) *feltétel a $w=-1$ választással minden $p\geqq 1$ esetén teljesül.*

IV. *Legyen $c$ negatív $A\cup\Sigma$-ban. Jelöljön $w$ egy tetszés szerinti, $C^2(A\cup\Sigma)$ osztálybeli, $A\cup\Sigma$-ban negatív függvényt és $p_0$ olyan valós számot, melyre $L^*(w)+(p_0-1)cw\geqq 0$ $A\cup\Sigma$-ban. Minden $p>p_0$, $p\geqq 1$ számra és minden $\Sigma^{(2)}\cup\Sigma^{(3)}$-on majdnem mindenütt eltűnő $u\in C_L$ függvényre érvényes a következő egyenlőtlenség:*

$$\left(\int_A |u|^p cw\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqq\frac{p}{p-p_0}\left(\int_A\left|\frac{L(u)}{c}\right|^p cw\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.5}$$

Minthogy $w$ $p>p_0$ esetén eleget tesz a (3. 1) feltételnek, $p>p_0$ és $p\geqq 1$ esetén (3. 3)-ból következik ($\delta\to 0$ határátmenettel), hogy

$$\int_A (u^2)^{\frac{p}{2}}[L^*(w)-(1-p)cw]\,dx\leqq p\int_A (u^2)^{\frac{p}{2}-1}uwL(u)\,dx.$$

Mivel $L^*(w)-(1-p)cw\geqq(p-p_0)w$, az előző egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\int_A |u|^p cw\,dx\leqq\frac{p}{p-p_0}\int_A |u|^{p-1}|w|\,|L(u)|\,dx, \tag{3.6}$$

ami $p=1$ esetén megegyezik (3. 5)-tel. A $p>1$ esetben a következő áll fenn:

$$\begin{aligned}\int_A |u|^{p-1}|L(u)|\,|w|\,dx &\leqq\left(\int_A\left[|u|^{p-1}|c|^{\frac{p-1}{p}}\right]^{\frac{p}{p-1}}|w|\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_A\left[|L(u)|\,|c|^{\frac{1-p}{p}}\right]^p|w|\,dx\right)^{\frac{1}{p}}=\\ &=\left(\int_A |u|^p|c|\,|w|\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_A\left|\frac{L(u)}{c}\right|^p|c|\,|w|\,dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_A |u|^p cw\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_A\left|\frac{L(u)}{c}\right|^p cw\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

(3. 6)-ból és (3. 7)-ből következik a (3. 5) egyenlőtlenség.

(3. 5)-ből a következő maximum-elvet vezetjük le:

V. *Legyen* $c$ *negatív* $A \cup \Sigma$*-ban. Minden,* $\Sigma^{(2)} \cup \Sigma^{(3)}$*-on majdnem mindenütt eltűnő* $u \in C_L$ *függvényre érvényes a következő egyenlőtlenség:*

$$(3.8) \qquad \max_{A \cup \Sigma} |u| \leqq \sup_A \left| \frac{L(u)}{c} \right|.$$ [3]

Ez a $p \to +\infty$ határátmenettel következik (3. 5)-ből.

VI. *Ha a* III. *vagy az* V. *tétel feltételei teljesülnek, akkor az* (1. 1) *problémára, a* $\Sigma_N = \emptyset$ *feltétel mellett, a* $C_L$ *osztályban érvényes az unicitási tétel.*

Nyilvánvaló, hogy az I – VI. tételek az elliptikus $L$ operátorok speciális osztályaira (például elsőrendű operátorokra) érvényesek maradnak ugyanazon bizonyítással, ha a $C_L$ osztályt általánosabban definiáljuk (ha nem kívánjuk meg szükségszerűen $u$ valamennyi deriváltjának létezését és folytonosságát $A$-ban).

Most néhány, az (1. 1) problémára vonatkozó becslést fogunk vizsgálni az általános esetben (azaz $\Sigma_N$-t nem tételezzük fel üresnek).

VII. *Legyen* $p$ $(1 \leqq p < +\infty)$ *valós szám és* $w \in C^2(A \cup \Sigma)$ *a következő feltételnek eleget tevő függvény:*

$$(3.1) \qquad \begin{cases} w \leqq 0, \; L^*(w) + (p-1)cw > 0 & A \cup \Sigma\text{-án} \\ a^{hk} w_{x_h} n_k - bw \geqq 0 & \Sigma^{(3)} - \overline{\Sigma_D^{(3)}}\text{-on majdnem mindenütt.} \end{cases}$$ [4]

*Minden* $u \in C_L$ *függvényre, mely majdnem mindenütt eleget tesz a következő feltételeknek:*

$$u = 0 \quad \Sigma^{(2)} \cup \overline{\Sigma_D^{(3)}}\text{-on},$$

$$a^{hk} u_{x_h} n_k = 0 \quad \Sigma^{(3)} - \overline{\Sigma_D^{(3)}}\text{-on},$$

*érvényes a* (3. 2) *egyenlőtlenség.*

A bizonyítás analóg az I. tétel bizonyításával.[5]

VIII. *Legyen* $c$ *negatív* $A \cup \Sigma$*-ban és létezzék egy olyan,* $A \cup \Sigma$*-ban negatív* $w$ *függvény, melyre*

$$a^{hk} w_{x_h} n_k - bw \geqq 0 \quad \Sigma_N^{(3)}\text{-on}.$$

*Akkor létezik olyan* $p \geqq 1$ *szám, melyre* (3. 1) *teljesül.*

A bizonyítás nyilvánvaló.

IX. *Az előző tétel feltételei mellett, legyen* $p_0$ *olyan valós szám, melyre* $L^*(w) + (p_0 - 1)cw \geqq 0$. $p > p_0$, $p \geqq 1$ *esetén minden, a* VII. *tétel feltételeinek eleget tevő* $u$ *függvényre érvényes a* (3. 5) *egyenlőtlenség.*

[3] C. Pucci [Rend. Acc. Naz. Lincei, (1957)] más módszerrel bizonyította be (3. 8)-t, azon feltétel mellett, hogy $u=0$ az egész $\Sigma$-án. Meg kell jegyezni, hogy a $\Sigma^{(2)} \cup \Sigma^{(3)}$ halmaz, amelyen $u$-ról fel kell tenni — a célból, hogy (3. 8) fennálljon —, hogy majdnem mindenütt eltűnik, üres is lehet, amint azt a 2. §-ban közölt példák némelyike is mutatja.

[4] $\overline{\Sigma_D^{(3)}}$ a $\Sigma_D^{(3)}$ lezártját jelöli.

[5] Részleteket illetően lásd [5]-öt.

Ez a tétel ugyanúgy bizonyítható be, mint a IV. tétel.

X. *A* VIII. *tétel feltételei mellett a* (3. 8) *egyenlőtlenség érvényes minden, a* VII. *tétel feltételeinek eleget tevő u függvényre.*

A VII. és a IX. tételből az (1. 1) problémára vonatkozó unicitási tételek következnek a $C_L$ osztályban.

XI. *Rögzített $p$ $(1 \leqq p < +\infty)$ mellett létezzék a következő feltételeknek eleget tevő $w \in C^2(A \cup \Sigma)$ függvény:*

$$w \leqq 0, \quad L^*(w) + (p-1)cw > 0 \quad A \cup \Sigma\textit{-ban},$$

$$w = 0 \quad \overline{\Sigma_D^{(3)}}\textit{-on majdnem mindenütt},$$

$$a^{hk} w_{x_h} n_k - bw \geqq 0 \quad \Sigma^{(3)} - \overline{\Sigma_D^{(3)}}\textit{-on majdnem mindenütt}.$$

*Minden $u \in C_L$ függvényre, melyre*

$$L(u) = 0 \quad A\textit{-ban},$$

$$a^{hk} u_{x_h} n_k = 0 \quad \overline{\Sigma^{(3)}} - \overline{\Sigma_D^{3}}\textit{-on majdnem mindenütt},$$

*a következő egyenlőtlenség érvényes:*

$$\left(\int_A |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{ \frac{\sup\limits_{\Sigma^{(2)}} |bw|}{\min\limits_{A \cup \Sigma} [L^*(w) + (p-1)cw]} \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \tag{3.9}$$

$$\cdot \left(\int_{\Sigma^{(2)}} |u|^p \, d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} + \left\{ \frac{\sup\limits_{\Sigma_D^{(3)}} |a^{hk} w_{x_h} n_k|}{\min\limits_{A \cup \Sigma} [L^*(w) + (p-1)cw]} \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}} |u|^p \, d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(3. 3)-ból, továbbá az $u$-ra és a $w$-re kirótt feltételekből következik, hogy

$$\int_A \{(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}} L^*(w) - cw(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1} [(1-p)u^2 + \delta]\} \, dx \leqq$$

$$\leqq \int_{\Sigma^{(2)}} bw(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}} \, d\sigma - \int_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}} (u^2+\delta)^{\frac{p}{2}} a^{hk} w_{x_k} n_k \, d\sigma.$$

$\delta \to 0$ esetén a következő adódik:

$$\int_A (u^2)^{\frac{p}{2}} [L^*(w) + (p-1)cw] \, dx \leqq$$

$$\leqq \int_{\Sigma^{(2)}} w(u^2)^{\frac{p}{2}} b \, d\sigma - \int_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}} (u^2)^{\frac{p}{2}} a^{hk} w_{x_h} n_k \, d\sigma;$$

ezen egyenlőtlenségből könnyen következik (3. 9).

XII. *Legyen $c$ negatív $A\cup\Sigma$-ban, és létezzék egy olyan $w\in C^2(A\cup\Sigma)$ függvény, mely eleget tesz a következő feltételeknek:*

$$w<0 \quad A\cup\Sigma\text{-}ban$$

$$a^{hk}w_{x_h}n_k-bw\geqq 0 \quad \overline{\Sigma^{(3)}}-\overline{\Sigma_D^{(3)}}\text{-}on.$$

*Akkor minden, a XI. tétel feltételeinek eleget tevő függvényre érvényes a következő maximum-elv:*

$$\max_{A\cup\Sigma}|u|=\max_{\overline{\Sigma^{(2)}}\cup\overline{\Sigma_3^{(D)}}}|u|. \tag{3.10}$$

Ha $p$ tetszés szerinti páros egész szám, használhatjuk (3. 3)-t $\delta=0$-val. Ekkor, a $w$-re és az $u$-ra kirótt feltételek mellett, a következőt kapjuk:

$$\min_{A\cup\Sigma}[L^*(w)+(p-1)cw]\int_A u^p\,dx\leqq \sup_{\Sigma^{(2)}}|bw|\int_{\Sigma^{(2)}}u^p\,d\sigma+ \tag{3.11}$$

$$+p\max_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}}|w|\int_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}}|u|^{p-1}|a^{hk}u_{x_h}n_k|\,d\sigma+\sup_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}}|a^{hk}w_{x_h}n_k-bw|\int_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}}u^p\,d\sigma.$$

Először tegyük fel, hogy $u=0$ $\overline{\Sigma_D^{(3)}}$-on majdnem mindenütt. Minthogy létezik két olyan pozitív $P_1$ és $P_2$ szám, melyekre elég nagy $p$ esetén

$$P_1\leqq\min_{A\cup\Sigma}[L^*(w)+(p-1)cw]\leqq P_2\,p,$$

következik, hogy

$$\lim_{p\to\infty}\{\min_{A\cup\Sigma}[L^*(w)+(p-1)cw]\}^{\frac{1}{p}}=1.$$

(3. 11)-ből könnyen következik a (3. 10) egyenlőtlenség.

Tekintsük most azt az esetet, midőn $u$ nem tűnik el $\overline{\Sigma_D^{(3)}}$-on majdnem mindenütt. Az

$$\int_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}}|u|^{p-1}|a^{hk}u_{x_h}n_k|\,d\sigma\leqq\Big(\int_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}}u^p\,d\sigma\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}}|a^{hk}u_{x_h}n_k|^p\,d\sigma\Big)^{\frac{1}{p}}$$

*Schwarz—Hölder* egyenlőtlenség alapján (3. 11)-ből a következőt kapjuk:

$$\min_{A\cup\Sigma}[L^*(w)+(p-1)cw]\int_A u^p\,dx\leqq K_p\int_{\Sigma^{(2)}\cup\overline{\Sigma_D^{(3)}}}u^p\,d\sigma, \tag{3.12}$$

ahol

$$K_p=\sup_{\Sigma^{(2)}}|bw|+p\max_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}}|w|\Big(\int_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}}u^p\,d\sigma\Big)^{-\frac{1}{p}}\cdot$$

$$\cdot\Big(\int_{\Sigma_D^{(3)}}|a^{hk}u_{x_h}n_k|^p\,d\sigma\Big)^{\frac{1}{p}}+\sup_{\Sigma_D^{(3)}}|a^{hk}w_{x_h}n_k-bw|.$$

Legyen $M$ olyan pozitív szám, hogy minden páros egész $p$ számra

$$\Big(\int_{\Sigma_D^{(3)}} u^p\,d\sigma\Big)^{-\frac{1}{p}}\Big(\int_{\Sigma_D^{(3)}} |a^{hk}u_{x_h}n_k|^p\,d\sigma\Big)^{\frac{1}{p}} \leqq M.$$

Ekkor a következőket kapjuk:

$$K_p^{\frac{1}{p}} \leqq [\sup_{\Sigma^{(2)}}|bw| + p\max_{\Sigma_D^{(3)}}|w|\,M + \sup_{\Sigma_D^{(3)}}|a^{hk}w_{x_h}n_k - bw|]^{\frac{1}{p}} \leqq p^{\frac{1}{p}}\sup_{\Sigma^{(2)}}|bw| +$$

$$+ M\max_{\Sigma_D^{(3)}}|w| + \sup_{\Sigma_D^{(3)}}|a^{hk}w_{x_h}n_k - bw|]^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{és} \qquad \limsup_{p\to+\infty} K_p^{\frac{1}{p}} \leqq 1.$$

Legyen $p_0$ olyan, hogy $p > p_0$ esetén $\min_{A\cup\Sigma}[L^*(w) + (p-1)cw] \geqq 0$. $p > p_0$ esetén (3. 12)-ből azt kapjuk, hogy

$$(\min_{A\cup\Sigma}[L^*(w) + (p-1)cw])^{\frac{1}{p}}\Big(\int_A u^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqq K_p^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{\Sigma^{(2)}\cup\Sigma_D^{(3)}} u^p\,d\sigma\Big)^{\frac{1}{p}},$$

és $p \to \infty$ esetén adódik (3. 10).

XIII. *Legyen $c$ negatív $A\cup\Sigma$-ban. $L(u) = 0$ valamennyi $C_L$ osztálybeli és $A$-ban azonosan el nem tűnő megoldására a következő maximum-elv érvényes:*

$$|u(x)| \leqq \max_{\Sigma^{(2)}\cup\Sigma^{(3)}}|u|, \qquad x \in A.$$

Tegyük fel, hogy $\Sigma_D^{(3)} = \Sigma^{(3)}$. Akkor az előző tétel feltételeinek eleget tevő $w$ függvény gyanánt a $w \equiv -1$ függvényt választhatjuk. Ebben az esetben a (3. 10) egyenlőtlenség a következő lesz:

$$\max_{A\cup\Sigma}|u| = \max_{\Sigma^{(2)}\cup\Sigma^{(3)}}|u|.$$

Mivel $\max_{A\cup\Sigma}|u| = \max_{\Sigma^{(2)}\cup\Sigma^{(3)}} u$ vagy $\max_{A\cup\Sigma}|u| = -\min_{A\cup\Sigma} u$, következik, hogy $u$-nak $A\cup\Sigma$-ban vagy pozitív maximuma, vagy negatív minimuma van.

A $c < 0$ feltételből jól ismert okoskodással következik, hogy ilyen pozitív maximum vagy negatív minimum $A$ semmilyen pontjában sem léphet fel.[6]

[6] Legyen $x_0$ az $u$ egy minimum-pontja $A$-ban. Akkor

$$[L(u) - cu]_{x=x_0} = a^{hk}(x_0)u_{x_hx_k}(x_0).$$

Fennáll a következő:

$$\sum_{h,k=1}^{r} u_{x_hx_k}(x_0)\lambda_h\lambda_k \geqq 0 \quad \text{és} \quad a^{hk}\lambda_h\lambda_k = \sum_{m=1}^{r}(g_m^h\lambda_h)^2.$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$a^{hk}u_{x_hx_k} = \sum_{m=1}^{r} g_m^h g_m^k u_{x_hx_k} \geqq 0 \qquad x = x_0\text{-ra}.$$

$c < 0$-ból következik, hogy $u(x_0) \geqq 0$. Hasonlóképpen bizonyítható be, hogy $u(x_0) \leqq 0$, ha $x_0$ az $u$ maximum-pontja $A$-ban.

Nyilvánvaló, hogy ugyanez az okoskodás elvégezhető az általános, $\Sigma_N^{(3)} \neq \emptyset$ esetben a (XIII. tétellel analóg) maximum-elv felállítására.

## 4. §. Egy absztrakt egzisztencia-elv

A célból, hogy megadhassuk az (1. 1) probléma gyenge megoldása létezésének szükséges és elegendő feltételét, fel fogunk használni egy *Banach*-terekre vonatkozó absztrakt egzisztencia-elvet.

Legyen $\mathcal{V}$ egy, a valós számtestre vonatkozóan lineáris absztrakt sokaság, továbbá $B_1$ és $B_2$ valós *Banach*-terek. Legyen $M_i$ $(i=1, 2)$ a $\mathcal{V}$ egy lineáris homomorfizmusa $B_i$-be; $\varphi$, illetve $\psi$ jelöljék az adjungált $B_1^*$, illetve $B_2^*$ terek vektorait. Tekintsük valamennyi $v \in \mathcal{V}$-re a következő funkcionálegyenletet:

$$\langle \varphi, M_1(v)\rangle = \langle \psi, M_2(v)\rangle, \tag{4. 1}$$

ahol $\varphi$ adott vektor és $\psi$ ismeretlen. Legyen $\mathcal{V}_2$ az $M_2$ homomorfizmus magja. Az adott $\varphi$ vektornak a következő szükséges feltételt kell kielégítenie:

$$\langle \varphi, M_1(v_2)\rangle = 0 \text{ minden } v_2 \in \mathcal{V}_2\text{-re.} \tag{4. 2}$$

Jelölje $M_1(\mathcal{V}_2)$ a $\mathcal{V}_2$ $B_1$-beli képét az $M_1$ leképezésnél, és $\overline{M_1(\mathcal{V}_2)}$ annak lezártját. Tekintsük a következő *Banach* faktor-teret: $Q = B_1/\overline{M_1(\mathcal{V}_2)}$. Legyen $\mathfrak{M}_1$ az a homomorfizmus, mely a $\mathcal{V}$ $v$ elemét a $Q$ $[M_1(v)]$ ekvivalencia-osztályára képezi le.

Érvényes a következő egzisztencia-elv:

XIV. *A* (4. 1) *funkcionál-egyenlet* $\psi$ *megoldása akkor és csak akkor létezik minden,* (4. 2)-t *kielégítő rögzített* $\varphi$ *mellett, ha van olyan K állandó, hogy minden* $v \in \mathcal{V}$ *elemre teljesül az*

$$\|\mathfrak{M}_1(v)\|_Q \leqq K \|M_2(v)\|_{B_2} \tag{4. 3}$$ [7]

*egyenlőtlenség.*

Legyen $\mathcal{A}$ a $B_2^*$-nak a következő „homogén" probléma $\psi$ megoldás-vektoraiból álló (zárt) altere:

$$\langle \psi, M_2(v)\rangle = 0 \text{ valamennyi } v \in \mathcal{V}\text{-re.}$$

$\mathcal{F}$ jelölje az $\mathcal{F} = B_2^*/\mathcal{A}$ *Banach* faktor-teret. Minden olyan $\varphi \in B_1^*$ elemhez, mely eleget tesz a (4. 2) kompatibilitási feltételnek (vagyis az adjungált $Q^*$ tér valamennyi eleméhez) egyértelműen definiálva van az $\mathcal{F}$ egy olyan $\Psi$ eleme, hogy ha $\psi$ a $\Psi$ ekvivalencia-osztály egy eleme, akkor $\psi$ a (4. 1) egy megoldása.

XV. *A* $\mathcal{F}$ *azon* $\Psi$ *eleme, mely a* $B_1^*$ ((4. 2) *kompatibilitási feltételt kielégítő*) $\varphi$ *elemének felel meg, eleget tesz a*

$$\|\Psi\|_{\mathcal{F}} \leqq K \|\varphi\|_{B_1^*} \tag{4. 4}$$ [8]

*egyenlőtlenségnek.*

A (4. 4) egyenlőtlenséget a (4. 3) *duális egyenlőtlenségének* nevezzük.

[7] Ezen tétel bizonyítására vonatkozóan lásd [3]-at és [5]-öt.

[8] Lásd [3]-at és [5]-öt.

## 5. §. Az (1. 1) probléma gyenge megoldásainak egzisztenciája

Legyen $u \in C_L$ és $v \in C_{L^*}$. Ekkor érvényes az

$$(5.\,1)\qquad \int_A [vL(u)-uL^*(v)]\,dx = \int_{\Sigma^{(3)}} [ua^{hk}v_{x_h}n_k - va^{hk}u_{x_h}n_k]\,d\sigma - \int_{\Sigma^{(1)}\cup\Sigma^{(2)}} uvb\,d\sigma$$

*Green*-féle azonosság.

Tegyük fel, hogy $u$ eleget tesz a következő peremfeltételeknek:

$$(5.\,2)\qquad \begin{cases} u=0 & \Sigma^{(2)}\cup\Sigma_D^{(3)}\text{-on majdnem mindenütt,}\\ a^{hk}u_{x_h}n_k=0 & \Sigma_N^{(3)}\text{-on majdnem mindenütt.}\end{cases}$$

(5. 1)-ből könnyen következik, hogy

$$\int_A [uL^*(v)-vL(u)]\,dx = \int_{\Sigma^{(1)}} uvb\,d\sigma +$$
$$+\int_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}} va^{hk}u_{x_h}n_k\,d\sigma - \int_{\overline{\Sigma^{(3)}-\Sigma_D^{(3)}}} u(a^{hk}v_{x_h}n_k - bv)\,d\sigma.$$

Legyen $\mathcal{V}$ a $C_L^*$ azon függvényeinek a lineáris sokasága, melyekre minden, az (5. 2) feltételt kielégítő $u \in C_L$ esetén

$$\int_{\Sigma^{(1)}} uvb\,d\sigma + \int_{\overline{\Sigma_D^{(3)}}} va^{hk}u_{x_h}n_k\,d\sigma - \int_{\overline{\Sigma^{(3)}-\Sigma_D^{(3)}}} u(a^{hk}v_{x_h}n_k - b)\,d\sigma = 0.$$

Legyen $L(u)=f$. Ekkor minden $v\in\mathcal{V}$ függvényre fennáll a következő:

$$(5.\,3)\qquad \int_A vf\,dx = \int_A uL^*(v)\,dx.$$

*Azt mondjuk, hogy az* (1. 1) *probléma* [*homogén peremfeltételekkel* ($g\equiv 0$, $h\equiv 0$)] $\mathfrak{L}^{(p)}$*-gyenge megoldással rendelkezik, hogyha* $f\in\mathfrak{L}^{(p)}(A)$ *esetén létezik olyan* $u\in\mathfrak{L}^{(p)}(A)$ *függvény, mely minden* $v\in\mathcal{V}$ *függvényre eleget tesz* (5. 3)*-nak.*

A XIV. és a XV. tételből, valamint az $\mathfrak{L}^{(p)}$-térbeli lineáris korlátos funkcionálok előállítási tételeiből az alábbi általános feltétel következik:

XVI. *Az* (1. 1) *probléma* $\mathfrak{L}^{(p)}$*-gyenge megoldása akkor és csak akkor létezik minden olyan* $f\in\mathfrak{L}^{(p)}(A)$ *függvényre, melyre*

$$\int_A v_0 f\,dx = 0, \qquad (v_0\in\mathcal{V},\ L^*(v_0)=0),$$

*ha létezik olyan K állandó, hogy*

$$(5.\,4)\qquad \inf_{v_0\in\mathcal{V}_0}\left(\int_A |v+v_0|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \leqq K\left(\int_A |L^*(v)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

*ahol* $\mathcal{V}_0$ *az összes olyan* $\mathcal{V}$*-beli függvényből álló halmaz, melyek megoldásai az* $L^*(v)=0$ *adjungált egyenletnek.*

*Ha* (5. 4) *teljesül, akkor minden* $\mathfrak{L}^{(p)}$*-gyenge megoldás eleget tesz az*

$$\inf_{u_0 \in \mathfrak{U}_0} \left( \int_A |u+u_0|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqq K \left( \int_A |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{5. 5}$$

*egyenlőtlenségnek, ahol* $\mathfrak{U}_0$ *azon* $\mathfrak{L}^{(p)}$*-beli függvények osztálya, melyek eleget tesznek az*

$$\int_A u_0 L^*(v) \, dx = 0$$

*feltételnek minden* $v \in \mathfrak{V}$ *függvényre.*

Az (5. 5) egyenlőtlenség mutatja, hogy az (1. 1) probléma $u$ megoldása folytonosan függ ($\mathfrak{L}^{(p)}$-normában) az $f$ adattól, *modulo* a probléma sajátmegoldásai.

Ennélfogva, ha az (5. 4)-et már bebizonyítottuk, az utóbbi megjegyzés alapján ésszerűnek látszik az (1. 1) problémát „well posed"* peremérték-problémának tekinteni.

A 3. §-ban bebizonyított a priori becslések és a XV. tétel összevetése alapján kimondhatjuk az alábbi tételt:

XVII. *Az* (5. 4) *egyenlőtlenség érvényes, ha a* VII. *tétel feltételei teljesülnek.*

Az (5. 4) egyenlőtlenséget a (3. 2) duális egyenlőtlenségéből vezettük le.

Az (5. 4) érvényességére további feltételek kaphatók akkor, ha a 3. § $L^*$ operátorral kapcsolatos eredményei alkalmazhatók a $\mathfrak{V}$ osztály függvényeire. Egyszerűség kedvéért tekintsük a $\Sigma^{(3)} = \Sigma_D^{(3)}$ speciális esetet, és tegyük fel, hogy $\mathfrak{V}$ egybeesik $C_L^*$ azon függvényeinek osztályával, melyek eleget tesznek a $v=0$ peremfeltételnek $\Sigma^{*(2)} \cup \Sigma_D^{(3)}$-on majdnem mindenütt, ahol $\Sigma^{*(i)}$ $(i=1, 2)$ ugyanúgy van definiálva az $L^*$-ra vonatkozóan, ahogyan $\Sigma^{(i)}$-t definiáltuk $L$-re vonatkozóan.

Ezt a $\mathfrak{V}$-re vonatkozó feltételt $\alpha)$ feltételnek fogjuk nevezni. Jelölje $\Sigma_0^{(1)}$ a $\Sigma^{(1)}$ azon részhalmazát, ahol $b=0$. Az $\alpha)$ feltétel teljesül, ha az

$$\eta = \begin{cases} u & \Sigma^{(1)} - \Sigma_0^{(1)}\text{-en} \\ a^{hk} u_{x_h} n_k & \Sigma^{(3)}\text{-on} \end{cases}$$

(ahol $u$ végigfut a $C_L$ osztály összes, (5. 2)-nek eleget tevő elemén) függvények által kifeszített tér sűrű $\mathfrak{L}^{(1)}([\Sigma^{(1)} - \Sigma_0^{(1)}] \cup \Sigma^{(3)})$-ban.

Az I. tételből a következő tételt vezetjük le:

XVIII. *Ha az* $\alpha)$ *feltétel teljesül, és létezik egy, a*

$$w(x) \leqq 0, \quad L(w(x)) + \frac{1}{p-1} c^* w(x) > 0 \qquad (p>1) \quad (x \in A \cup \Sigma)$$

*feltételnek eleget tevő* $w$ *függvény, akkor minden* $v \in \mathfrak{V}$ *függvényre érvényes a következő egyenlőtlenség:*

$$\left( \int_A |v|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \leqq K \left( \int_A |L^*(v)|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

* A megfelelő magyar kifejezés még nem létezik. Az értelem szerinti fordítás „helyesen megfogalmazott" vagy „jól felállított" lenne. A megfelelő francia kifejezés: „bien posé". *(A ford.)*

*ahol*

$$K = \frac{p}{p-1} \frac{\max\limits_{A \cup \Sigma} |w|}{\min\limits_{A \cup \Sigma} \left[ L(w) + \frac{1}{p-1} c^* w \right]}.$$

*Ebben az esetben minden rögzített* $f \in \mathfrak{L}^{(p)}(A)$ *függvényre létezik az* (1. 1) *probléma* $\mathfrak{L}^{(p)}$*-gyenge megoldása.*

Tegyük fel, hogy létezik az (5. 2)-nek eleget tevő és $C_L$-hez tartozó $u_n$ függvények egy olyan sorozata, melyre

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |u-u_n|^p\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_A |L(u)-f|^p\, dx = 0. \tag{5. 6}$$

Ekkor az $u$ függvényt (FRIEDRICHS nyomán) az (1. 1) probléma (homogén peremfeltételekkel) $\mathfrak{L}^{(p)}$*-erős megoldás*ának nevezzük. Nyilvánvaló, hogy minden $\mathfrak{L}^{(p)}$-erős megoldás $\mathfrak{L}^{(p)}$-gyenge megoldás is.

A következő problémát (ahol $\Sigma^{(3)} = \Sigma_D^{(3)}$), (1. 1)* problémának fogjuk nevezni:

$$\begin{cases} L^*(v) = f & A \text{ -ban} \\ v = 0 & \Sigma^{*(2)} \cup \Sigma^{*(3)}\text{-on.} \end{cases} \tag{1. 1)*}$$

XIX. *Teljesüljön az* $\alpha$) *feltétel. Ha létezik az* (5. 3) $\mathfrak{L}^{(p)}$*-gyenge* ($p > 1$) *megoldása minden* $f \in \mathfrak{L}^{(p)}$*-re, és ez a megoldás az egyetlen, továbbá, ha az* (1. 1)* *probléma* $\mathfrak{L}^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}$*-gyenge megoldása az egyetlen megoldás, akkor az* (5. 3) *minden* $\mathfrak{L}^{(p)}$*-gyenge megoldása* $\mathfrak{L}^{(p)}$*-erős megoldás is.*

Az (5. 3) $\mathfrak{L}^{(p)}$-gyenge megoldásának egzisztenciája és unicitása folytán fennáll az

$$\int_A |u|^p\, dx \leq K \int_A |f|^p\, dx \tag{5. 7}$$

egyenlőtlenség.

Mivel $\mathfrak{L}^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}(A)$ egyetlen függvénye sem ortogonális minden $L(u)$-ra (ahol $u$ a $C_L$ (5. 2)-nek eleget tevő eleme), ilyen $u_n$ függvénysorozat kiválasztható, oly módon, hogy $L(u_n)$ $f$-hez konvergáljon; ekkor (5. 6) (5. 7)-ből következik.

## 6. §. A $\mathcal{H}$-gyenge megoldások

A következőkben az (1. 1) probléma egy másik megközelítési módját mutatjuk be, amely az elliptikus egyenletekre vonatkozó, az energia-integrálon alapuló jól ismert módszer elliptikus-parabolikus problémáinkra való természetes kiterjesztésének tűnik.

Az egyszerűség kedvéért csak a $\Sigma^{(3)} \equiv \Sigma_D^{(3)}$ esetet vizsgáljuk, homogén peremfeltételekkel:

$$\begin{cases} L(u) = f & A \text{ -ban} \\ u = 0 & \Sigma^{(2)} \cup \Sigma^{(3)}\text{-on.} \end{cases} \tag{1. 1)$_0$}$$

Az $u \in C_L$ és a $v \in C^1(A \cup \Sigma)$ függvényekre érvényes a következő integrál-azonosság:

$$\int_A vL(u)\,dx = -\int_A [a^{hk} v_{x_h} u_{x_k} + u(b^h - a^{hk}_{x_h}) v_{x_k} +$$

$$+ (b^h_{x_h} - a^{hk}_{x_h x_k} - c)uv]\,dx - \int_{\Sigma^{(3)}} va^{hk} u_{x_h} n_k\,d\sigma - \int_{\Sigma} uvb\,d\sigma.$$

Legyen $\mathcal{W}$ a $C^1(A \cup \Sigma)$ osztályhoz tartozó és $\Sigma^{(3)}$-on eltűnő függvények osztálya (ha nem üres). Ha $u \in C_L$, és $u$ $\Sigma^{(2)} \cup \Sigma^{(3)}$-on majdnem mindenütt eltűnik, akkor minden $v \in \mathcal{W}$ függvényre érvényes a következő azonosság:

$$\int_A vL(u)\,dx = -\int_A [a^{hk} v_{x_h} u_{x_k} + u(b^h - a^{hk}_{x_h}) v_{x_k} + (b^h_{x_h} - a^{hk}_{x_h x_k} - c)uv]\,dx - \int_{\Sigma^{(1)}} uvb\,d\sigma.$$

Vezessük be $\mathcal{W}$-ben a következő skaláris szorzatot:

$$(u, v) = \int_A (a^{hk} u_{x_h} v_{x_k} + uv)\,dx + \int_{\Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)}} uv|b|\,d\sigma.$$

A $\mathcal{H}$ tér legyen a $\mathcal{W}$-ből a bevezetett skaláris szorzat segítségével előálló *Hilbert*-tér.

Tekintsük az $u, v \in \mathcal{W}$ függvények következő bilineáris alakját:

$$B(u, v) = -\int_A [a^{hk} v_{x_h} u_{x_k} + u(b^h - a^{hk}_{x_k}) v_{x_h} + (b^h_{x_h} - a^{hk}_{x_h x_k} - c)uv]\,dx - \int_{\Sigma^{(1)}} uvb\,d\sigma.$$

Könnyű belátni, hogy

$$|B(u, v)| \leq M\left(\int_A (|\text{grad}\, v| + v^2)\,dx + \int_{\Sigma^{(1)}} |v|^2\,d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \|u\|,$$

ahol $M$ az $L$ együtthatóitól függő állandó. $B(u, v)$ minden rögzített $v \in \mathcal{W}$ függvényre az $u$ függvény $\mathcal{H}$-n definiált lineáris korlátos funkcionáljának tekinthető.

Adott $f \in \mathfrak{L}^{(2)}(A)$ mellett az $(1.\,1)_0$ probléma *$\mathcal{H}$-gyenge megoldás*ának fogjuk nevezni $\mathcal{H}$ egy olyan $u$ elemét, mely eleget tesz az

$$\int_A vf\,dx = B(u, v)$$

egyenletnek minden $v \in \mathcal{W}$ függvényre.

Nyilvánvaló, hogy az $\alpha)$ feltétel teljesülése esetén minden $\mathcal{H}$-gyenge megoldás $\mathfrak{L}^{(2)}$-gyenge megoldás is.

A *Hilbert*-térbeli lineáris funkcionálok előállítási tétele értelmében $u \in \mathcal{H}$-ra és $v \in \mathcal{W}$-re fennáll a következő:

$$B(u, v) = (u, T(v)).$$

$T(v)$ $\mathcal{W}$-ben értelmezett lineáris transzformáció $\mathcal{H}$-beli értékkészlettel.

$u \in \mathcal{W}$ és $v \in \mathcal{W}$ esetén

$$B(u, v) = -\int_A \Big[a^{hk} v_{x_h} u_{x_k} + \frac{1}{2} u(b^h - a^{hk}_{x_k}) v_{x_h} - \tag{6. 1}$$

$$- \frac{1}{2} v(b^h - a^{hk}_{x_k}) u_{x_h} + \left(\frac{1}{2} b^h_{x_h} - \frac{1}{2} a^{hk}_{x_h x_k} - c\right) uv\Big] dx - \frac{1}{2} \int_{\Sigma^{(1)}} uvb\, d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma^{(2)}} uvb\, d\sigma.$$

Tegyük fel, hogy

$$\frac{1}{2} b^h_{x_h} - \frac{1}{2} a^{hk}_{x_h x_k} - c > m_0 > 0 \qquad A \cup \Sigma\text{-ban}. \tag{6. 2}$$

Ez a feltétel teljesül, ha feltételezzük, hogy $c$ negatív és $|c|$ elég nagy. Ha (6. 2) teljesül, akkor $v \in \mathcal{W}$ esetén könnyen adódik (6. 1)-ből:

$$B(v, v) = \int_A \left[a^{hk} v_{x_h} v_{x_k} + \left(\frac{1}{2} b^h_{x_h} - \frac{1}{2} a^{hk}_{x_h x_k} - c\right) v^2\right] dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Sigma^{(1)}} v^2 b\, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma^{(2)}} v^2 b\, d\sigma \geqq \lambda_0 \|v\|^2 \qquad (\lambda_0 > 0).$$

Következésképpen

$$\|v^2\| \leqq \frac{1}{\lambda_0} |B(v, v)| \leqq |(v, T(v))| \leqq \|v\| \, \|T(v)\|, \tag{6. 3}$$

$$\left(\int_A v^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{1}{\lambda_0} \|T(v)\|.$$

A XIV. tételből kapjuk a következő tételt:

XX. *Ha a* (6. 2) *feltétel teljesül, az* $(1.\ 1)_0$ *probléma* $\mathcal{H}$*-gyenge megoldása minden* $f \in \mathfrak{L}^{(2)}(A)$ *függvényre létezik.*

A $\mathcal{H}$-gyenge megoldás unicitása nyílt kérdés. Ez a $B(u, v)$ bilineáris alaknak az $u, v$ párra vonatkozó folytonosságával függ össze. Amikor a folytonosság fennáll, akkor — minthogy $B(u, v)$ a folytonosság révén kiterjeszthető $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$-ra — (6. 3)-ból könnyen adódik a $\mathcal{H}$-gyenge megoldás unicitása.

$B(u, v)$ folytonos az $u, v$ párra vonatkozóan abban az esetben, midőn $L$ önadjungált, azaz $b^h = a^{hk}_{x_k}$. Ez könnyen látható (6. 1)-ből. Ebben az esetben, ha $c$ negatív $A \cup \Sigma$-ban, a $\mathcal{H}$-gyenge megoldás minden adott $f \in \mathfrak{L}^{(2)}(A)$ esetén létezik és egyetlen.

## IRODALOM

[1] Ascoli, G., Burgatti, P., Giraud, G.: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico e parabolico.* G. C. Sansoni Edit., Firenze, 1936.

[2] Cimmino, G.: Su un problema di valori al contorno per le equazioni a derivate parziali di tipo parabolico, indipendente dalla natura delle caratteristiche. *Atti Acc. Sci. Torino,* 1930.

[3] FICHERA, G.: Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali. *Atti del Convegno Internaz. di Trieste*, 1954.
[4] FICHERA, G.: Sulle equazioni differenziali lineari elittico-paraboliche del secondo ordine. *Atti Acc. Naz. Lincei*, 1956.
[5] FICHERA, G.: *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali.* Corsi Istituto Naz. Alta Matem., 1958. Libreria Veschi, Roma.
[6] FRIEDRICHS, K. O.: The identity of weak and strong extensions of differential operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1944.
[7] FRIEDRICHS, K. O.: Symmetric positive linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1958.
[8] GEVREY, M.: Sur les équations aux derivées partielles du type parabolique. *Journ. de Matem.*, 1913. és 1914.
[9] LAX, P., MILGRAM, A.: Parabolic equations. *Contribution to the Theory of Partial Differential Equations*, Princeton, 1954.
[10] LIONS, J. L.: Problèmes aux limites en théorie des distributions. *Acta Math.*, 1955.
[11] LIONS, J. L.: Sur les problèmes mixtes pour certaines systèmes paraboliques dans les ouvertes non cylindriques. *Ann. Inst. Fourier*, 1957.
[12] MAGENES, E.: Il problema della derivata obliqua regolare per le equazioni lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine in *m* variabili. *Rend. di Matem.*, 1957.
[13] PICONE, M.: *Appunti di Analisi Superiore.* Rondinella, Napoli, 1940.
[14] PICONE, M.: Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine. *Ann. di Mat. Pura e Appl.*, 1929.

*Fordította:* Adler György

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1963. szeptember 23. — Terjedelem: 7,25 (A/5) ív, 22 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 63-3466

Ára: 15,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK



A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL



Index: 26 498